# WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
# ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z FIZYKI 1

prowadząc(a/y) ……………………………………………………………

grupa …………………………. podgrupa ….. zespół ….. semestr letni roku akademickiego 202…../202…….

student(ka) ………………………………………………………………………..

## SPRAWOZDANIE Z PRACY LABORATORYJNEJ nr 46

## BADANIE DRGAN WAHADŁA MATEMATYCZNEGO

pomiary wykonano dnia …………………………….. jako ćwiczenie ………… z obowiązujących ..5..

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **OCENA ZA TEORIĘ** | | | | |
| *data* | | | | |
| **Podejście** (ostateczny termin) | **1** (zasadnicze, przed następnymi zajęciami) | **2** (poprawa, tydzień przed sesją zasad.) | **3** (poprawa, tydzień przed końcem sesji zas.) | **4** (poprawa, tydzień przed końcem sesji popr.) |
| **OCENA KOŃCOWA** | | | | |
| *data* | | | | |

Po wykonaniu sprawozdania wypełnij poniższy **Arkusz Samokontroli** sprawdzając czy wszystkie wymagane czynności zostały wykonane wpisując znak **x** w odpowiednie kwadraty.

**1. Dane informacyjne**

☐ **czy na karcie tytułowej znajdują się:**

a. dane wykonawcy,
b. numer grupy,
c. tytuł ćwiczenia laboratoryjnego,
d. data wykonania sprawozdania,
e. oraz czy wszystkie strony są ponumerowane.

**2. Kompletność sprawozdania**

☐ **czy sprawozdanie zawiera:**

a. wstęp teoretyczny z celem ćwiczenia i krótkim opisem zagadnienia fizycznego, którego dotyczy ćwiczenie,
b. kartę pomiarową z podpisem prowadzącego,
c. obliczenia opatrzone wyjaśniającym opisem,
d. komplet ponumerowanych i opatrzonych pełnym tytułem wykresów i tabel,
e. wyniki wszystkich poleceń wymienionych w pkt. 4 instrukcji do ćwiczenia (Opracowanie wyników pomiarów).

**3. Poprawność obliczeń**

☐ **czy w sprawozdaniu:**

a. podano przykłady obliczeń wraz z rachunkiem jednostek,
b. wstawione do wzoru liczby sprowadzono do tych samych jednostek (np. m, s, itp.),
c. określono wszystkie wymagane niepewności pomiarowe,
d. wyznaczono niepewności obliczonych wielkości, w tym składowe niepewności złożonych,
e. podano wynik i jego niepewności dbając o właściwą liczbę cyfr znaczących.

**4. Poprawność wykresów**

☐ **czy wykresy:**

a. wykonano na papierze milimetrowym,
b. skale osi dobrano tak, aby wykres wypełniał większość obszaru arkusza,
c. opisano osie wraz z jednostkami np. okres T [s], długość wahadła L [cm],
d. naniesiono punkty pomiarowe i ich niepewności jeśli są widoczne w skali rysunku,
e. dokonano aproksymacji wyników krzywą (ale nie linią łamaną), dla prostej podano jej równanie.

**5. Poprawność tabel**

☐ **czy w tabelach:**

a. dane pomiarowe opatrzone są mianem (jednostką) – w nagłówkach kolumn,
b. właściwie określono liczbę cyfr znaczących dla danych zawartych w tabelach.

**6. Podsumowanie**

☐ **czy w podsumowaniu i wnioskach:**

a. podano wynik końcowy wraz z jego niepewnością z właściwą liczbą cyfr znaczących i jednostką,
b. oceniono wpływ rodzaju błędów pomiarowych na wynik końcowy,
c. zawarto wnioski dotyczące przebiegu i oceny pomiarów (np. porównanie z literaturą).

Tabela pomiarowa

Czas $t_i$ mierzony dla n = 10 okresów drgań

| l.p. | L [m] | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | t [s] | | | | | |
| 2. | | | | | | |
| 3. | | | | | | |
| 4. | | | | | | |
| 5. | | | | | | |
| 6. | | | | | | |
| 7. | | | | | | |
| 8. | | | | | | |
| 9. | | | | | | |
| 10. | | | | | | |
| 11. | | | | | | |
| 12. | | | | | | |

Niepewności pomiaru czasu stoperem $\Delta t$ = …..

Niepewności pomiaru długości wahadła $\Delta L$ = …..

Promień kuli R=38 mm z u(R)=1 mm

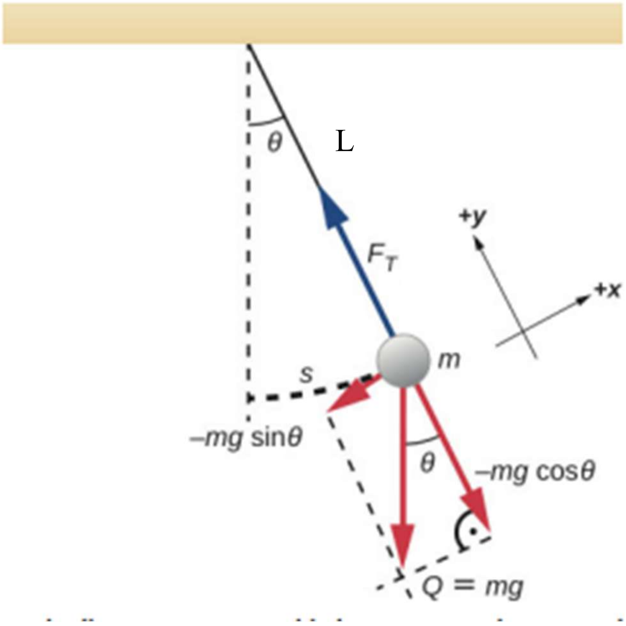
Data i podpis osoby prowadzącej: ………………………………………………………………………………..

# Badanie drgań wahadła matematycznego

## 1. Opis teoretyczny do ćwiczenia

Wahadło było wykorzystywane od niepamiętnych czasów. Jego zastosowania opierają się na wykorzystaniu przyciągania grawitacyjnego pomiędzy dwiema masami - masą Ziemi oraz masą wahadła, czyli np. ciężarka zawieszonego na sznurku, za pomocą którego można wyznaczać pion.
W starożytności drgania odwróconego wahadła służyły do wykrywania trzęsień Ziemi oraz ich kierunku.[1]
Dzięki badaniom Galileusza nad izochronizmem, przez następne blisko 330 lat zastosowanie wahadła umożliwiło budowę najdokładniejszych zegarów, zwiększając dokładność tych urządzeń z 15 minut do 15 sekund na dobę[2], a nawet lepiej.
W przypadku poniższego eksperymentu wahadło zostanie wykorzystane do pomiaru wartości przyspieszenia ziemskiego g, gdyż wartość tego przyspieszenia ma wpływ na długość okresu jego drgań.

Rozważmy masę punktową m zawieszoną na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości L. Na wahadło wychylone z położenia o kąt działa moment siły ciężkości przeciwnie skierowany w stosunku do wektora przyspieszenia. Korzystając z II Zasady Dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego otrzymujemy:




Rys. 1. Schemat wahadła matematycznego.
W przypadku analizy drgań wahadła fizycznego siły należy zastąpić momentami sił.

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \tag{1}$$

gdzie $I = mL^2$ to moment bezwładności masy m.
Wartość momentu siły zależy od składowej siły ciężkości prostopadłej do ramienia wahadła (rys. 1):

$$M = L(mgsin\theta) \tag{2}$$

Wówczas II Zasada Dynamiki Newtona przyjmuje postać

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Lmgsin\theta \tag{3}$$

Znak „–„ oznacza, że składowa siły ciężkości przeciwdziała wychylaniu się masy z położenia równowagi.
Równanie to nie opisuje jednak drgań harmonicznych, bo działająca siła nie jest wprost proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi. Jednak dla małych kątów (θ<10°) sinθ ~ θ i uwzględniając wartość momentu bezwładności równanie (3) przyjmuje postać równania drgań harmonicznych:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{4}$$

Przyrównując do oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \tag{5}$$

Otrzymujemy wartość częstości kołowej drgań:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{6}$$

Czyli okres drgań wahadła możemy zapisać jako:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{7}$$

[1] Morton, W. Scott and Charlton M. Lewis (2005). China: Its History and Culture. New York: McGraw-Hill, Inc.
[2] Eidson, John C. (2006). *Measurement, Control, and Communication using IEEE 1588*. Burkhausen.

Z powyższego wzoru można określić wartość przyspieszenia ziemskiego:

$$g = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{8}$$

Korzystając z metody różniczki zupełnej wyznaczamy niepewność pomiarową przyspieszenia ziemskiego:

$$\mathrm{u_c(g)} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{L}} \cdot \mathrm{u(L)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{T}} \cdot \mathrm{u_c(T)}\right)^2} \tag{9}$$

Gdzie:

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{T^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{8L\pi^2}{T^3} \tag{11}$$

$$u(L) = \frac{\Delta L}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{n} \tag{12a}$$

gdzie n – liczba mierzonych okresów drgań

$$u_c(T) = \sqrt{(\sigma_T)^2 + \frac{\Delta T^2}{3}} \tag{13}$$

Podstawiając (10), (11) do (9) otrzymujemy:

$$\mathrm{u_c(g)} = \sqrt{\frac{16\pi^4}{\mathrm{T^4}} \cdot \mathrm{u(L)^2} + \frac{64\,\pi^4\,\mathrm{L^2}}{\mathrm{T^6}} \cdot \mathrm{u_c(T)^2}} \tag{14}$$

Wyznaczoną wartość g można porównać wielkością tablicową uwzględniając niepewność rozszerzoną $U_c(g)$. Istnieje wiele modeli opisujących zależność g od położenia geograficznego i wysokości nad poziomem morza (n.p.m.). Jedną z częściej stosowanych formuł jest wyrażenie opisane poniższym równaniem:

$$g(\alpha,h) = 9.780318 * (1 + 0.0053024 * sin[\tfrac{\pi\alpha}{180}]^2 - 0.0000058 * \sin[\tfrac{\pi\alpha}{90}]^2) - 3.086 * 10^{-6} * h \tag{15}$$

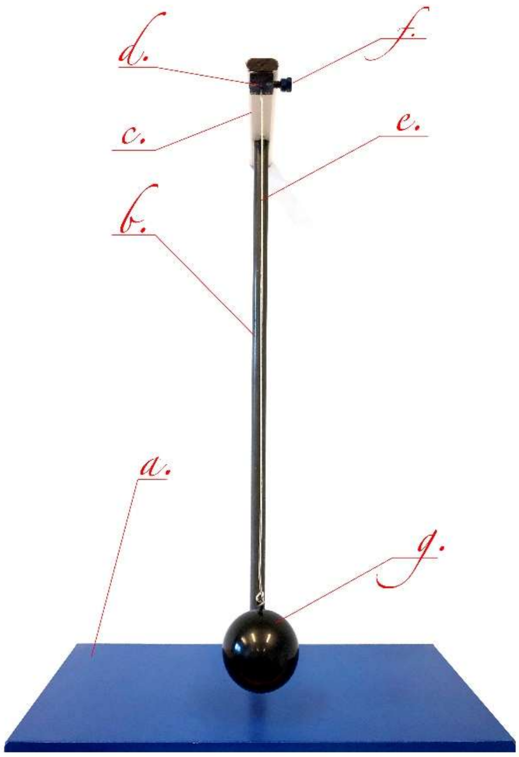
gdzie:

$\alpha$ - wyraża szerokość geograficzną liczoną w stopniach,
h - określa wysokość nad poziomem morza liczoną w metrach.

Przyjmując dla Warszawy $\alpha = 52{,}25\,°N$ i h = 116 m n.p.m. otrzymujemy **g = 9,8123** ms$^{-2}$,

## 2. Opis układu pomiarowego

Laboratoryjny układ pomiarowy zbudowany jest z podstawy (a.), czyli poziomej płyty, do której przymocowany jest pionowy pręt (b.) o przekroju kołowym. Na nim znajduje się pozioma belka (c.) z otworem (d.) na jej końcu. Przez otwór przechodzi linka (e.) z możliwością regulacji jej długości za pomocą śruby (f.). Na końcu linki zaczepiona jest kula (g.).
W doświadczeniu pomijamy sprężystość i wagę linki (e.) a także opór powietrza.
Układ należy ustawić na wypoziomowanym stole, a przed przystąpieniem do pomiarów upewnić się, że płyta (a.) nie porusza się podczas oscylacji kuli g. Optymalny układ powinien posiadać trzy klocki podpierające płytę a. wówczas uniknie się oscylacji wahadła w kierunku prostopadłym do jego początkowego ruchu.




***Dotyczy przypadku zdalnego wykonywania ćwiczenia:***
Zadaniem studenta jest skonstruowanie podobnego wahadła w domu wykorzystując niewielki ciężarek zawieszony na lince (sznurku, nici lub drucie) o długości od 30 cm do 200 cm. Długość wahadła zmieniamy poprzez zmianę punktu zawieszenia linki. Zdjęcie skonstruowanego układu należy umieścić w sprawozdaniu.

Podstawowe cele ćwiczenia:
1. wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego;
2. uzasadnić wpływ długości wahadła na otrzymaną wartość g.

## 3. Przeprowadzenie pomiarów

1. Ustawić największą długość wahadła i zmierzyć długość linki L, od górnego mocowania linki do środka ciężarka.
2. Zmierzyć czas trwania 10 okresów drgań wahadła pamiętając, że kąt początkowego wychylenia nie może być większy od 10 stopni.
3. Pomiary z punktu 2 powtórzyć 12 razy i wyniki pomiarów wpisać do tabeli pomiarowej.
4. Czynności z punktu 2 i 3 przeprowadzić dla pięciu długości L wahadła zmniejszając ją o stałą wartość (np. o ok. 4 – 6 cm) i wyniki pomiarów wpisać do tabeli pomiarowej. (Minimalna długość L nie powinna być krótsza od 25 cm.)
5. Oszacować i zapisać niepewności użytych narzędzi pomiarowych.

## 4. Opracowanie pomiarów

1. Wyniki pomiarów długości wahadła wpisać do tabeli nr 1.
2. Określić $u$(L), czyli niepewność pomiaru długości wahadła L.
3. Wyniki 10 pomiarów czasu trwania 10 okresów drgań wahadła wpisać do tabeli nr 1 odrzucając dwie najbardziej skrajne wartości dla każdej długości wahadła (jako ewentualne błędy grube).
4. Obliczyć średnią wartość trwania 10 okresów drgań wahadła dla i wyznaczyć okres T dla każdej długości wahadła.
5. Określić $u_c$(T) na podstawie odchylenia standardowego $\sigma_T$ dla 10 pomiarów okresów drgania wahadła i niepewności użytego narzędzia pomiarowego ΔT (wzór 13).
6. Wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego g oraz $u_c(g)$ i $U_c(g)$.
   Przeprowadzić bilans jednostek, zapisać przykładowe obliczenia.
7. Obliczenia z punktów 5, 6 wpisać do tabeli nr 1 dla kolejnych długości wahadła.

Tabela 1. Zestawienie operacji wykonanych w punktach od 1 do 7

| L [m] | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ [s] | | | | | |
| $t_2$ [s] | | | | | |
| $t_3$ [s] | | | | | |
| $t_4$ [s] | | | | | |
| $t_5$ [s] | | | | | |
| $t_6$ [s] | | | | | |
| $t_7$ [s] | | | | | |
| $t_8$ [s] | | | | | |
| $t_9$ [s] | | | | | |
| $t_{10}$ [s] | | | | | |
| $t_{śr}$ [s] | | | | | |
| T [s] | | | | | |
| $u_c$(T) [s] | | | | | |
| g $[\frac{m}{s^2}]$ | | | | | |
| $u_c(g)$ $[\frac{m}{s^2}]$ | | | | | |
| $U_c(g)$ $[\frac{m}{s^2}]$ | | | | | |

8. Wykonać wykres wartości g w funkcji długości wahadła wraz ze znacznikami rozszerzonych niepewności pomiarowych.
9. Na wykresie z punktu 8. zaznaczyć wartość tablicową $g(\alpha, h)$ w postaci poziomej linii zgodnie z wartością określoną wzorem (15).

## 5. Podsumowanie

**Zestawienie:**

1. Na podstawie zebranych wyników zapisać końcową wartość przyspieszenia ziemskiego wraz z rozszerzoną niepewnością pomiarową.

**Analiza:**

2. Przeanalizować uzyskane rezultaty:
   a) czy otrzymane wyniki mieszczą się w granicach rozszerzonych niepewności pomiarowych z wartościami przyspieszenia ziemskiego obliczonymi dla współrzędnych geograficznych i wysokości nad poziomem morza dla miejsca, w którym dokonano badania?
   b) określić wpływ długości wahadła na uzyskaną wartość przyspieszenia ziemskiego.
3. Wyciągnąć wnioski pod kątem występowania błędów grubych, systematycznych i przypadkowych oraz ich prawdopodobnych przyczyn.

**Synteza:**

4. Zaproponować działania zmierzające do podniesienia dokładności wykonywanych pomiarów.
5. Podać cele ćwiczenia i wyjaśnić czy zostały osiągnięte.

## 6. Przykładowe pytania

1. Podaj wielkości opisujące ruch harmoniczny prosty.
2. Jaki wpływ na wynik końcowy eksperymentu ma waga i kształt ciężarka zastosowanego w wahadle względem gęstości oraz temperatury powietrza? Dlaczego wahadło zegarów wahadłowych ma kształt dysku, a nie kuli?
3. Jak działa kompensacja długości wahadła w zegarze wahadłowym?
4. Czy w układzie zamkniętym, pozbawionym powietrza, ciężar wahadła miałaby znaczenie na wynik eksperymentu?
5. Czy opór powietrza wpływa na okres drgania wahadła?
6. Czy kąt początkowego wychylenia wahadła wpływa na okres drgań wahadła? Dlaczego mierzymy okres drgań dla możliwie najmniejszych wychyleń wahadła?
7. Proszę wyprowadzić równanie oscylatora harmonicznego: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$
8. Wyznaczyć wzór na okres $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$ drgania wahadła matematycznego o długości L.