

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z FIZYKI 1

prowadząc(a/y)

grupa podgrupa zespół semestr **letni** roku akademickiego 202...../202.....

student(ka)

SPRAWOZDANIE Z PRACY LABORATORYJNEJ nr 1

BADANIE ROZKŁADU GAUSSA

pomiary wykonano dnia jako ćwiczenie z obowiązujących ..5..

OCENA ZA TEORIĘ				
<i>data</i>				
Podejście (ostateczny termin)	1 (zasadnicze, przed następnymi zajęciami)	2 (poprawa, tydzień przed sesją zasad.)	3 (poprawa, tydzień przed końcem sesji zas.)	4 (poprawa, tydzień przed końcem sesji popr.)
OCENA KOŃCOWA				
<i>data</i>				

Po wykonaniu sprawozdania wypełnij poniższy **Arkusz Samokontroli** sprawdzając czy wszystkie wymagane czynności zostały wykonane wpisując znak **x** w odpowiednie kwadraty.

<p>1. Dane informacyjne</p> <p><input type="checkbox"/> czy na karcie tytułowej znajdują się:</p> <p>a. dane wykonawcy, b. numer grupy, c. tytuł ćwiczenia laboratoryjnego, d. data wykonania sprawozdania, e. oraz czy wszystkie strony są ponumerowane.</p>	<p>2. Kompletność sprawozdania</p> <p><input type="checkbox"/> czy sprawozdanie zawiera:</p> <p>a. wstęp teoretyczny z celem ćwiczenia i krótkim opisem zagadnienia fizycznego, którego dotyczy ćwiczenie, b. kartę pomiarową z podpisem prowadzącego, c. obliczenia opatrzone wyjaśniającym opisem, d. komplet ponumerowanych i opatrzonych pełnym tytułem wykresów i tabel, e. opisy wykonania wszystkich poleceń wymienionych w pkt. 4 instrukcji do ćwiczenia (Opracowanie wyników pomiarów).</p> <p>3. Poprawność obliczeń</p> <p><input type="checkbox"/> czy w sprawozdaniu:</p> <p>a. podano przykłady obliczeń wraz z rachunkiem jednostek, b. wstawione do wzoru liczby sprowadzono do tych samych jednostek (np. m, s, itp.), c. wyznaczono wszystkie wymagane niepewności obliczonych wielkości, w tym składowe niepewności złożonych, d. podano wynik i jego niepewności dbając o właściwą liczbę cyfr znaczących.</p>	<p>4. Poprawność wykresów</p> <p><input type="checkbox"/> czy wykresy:</p> <p>a. wykonano na papierze milimetrowym, b. skale osi dobrano tak, aby wykres wypełniał większość obszaru arkusza, c. opisano osie wraz z jednostkami np. okres T [s], długość wahadła L [cm], d. naniesiono punkty pomiarowe i ich niepewności jeśli są widoczne w skali rysunku, e. dokonano aproksymacji wyników krzywą (ale nie linią łamaną), a dla prostej podano jej równanie.</p> <p>5. Poprawność tabel</p> <p><input type="checkbox"/> czy w tabelach:</p> <p>a. dane pomiarowe opatrzone są mianem (jednostką) – w nagłówkach kolumn, b. właściwie określono liczbę cyfr znaczących dla danych zawartych w tabelach.</p> <p>6. Podsumowanie</p> <p><input type="checkbox"/> czy w podsumowaniu:</p> <p>a. podano wynik końcowy wraz z jego niepewnością z właściwą liczbą cyfr znaczących i jednostką, b. oceniono wpływ rodzaju błędów pomiarowych na wynik końcowy, c. zawarto wnioski dotyczące przebiegu i oceny pomiarów (np. porównanie z literaturą).</p>
--	---	---

Tabela pomiarowa do wariantu rzutu kostkami

i	Zmienna losowa suma oczek z 6 kostek x_i	Po każdym rzucie wstawić "I" we właściwym wierszu	Liczba wyników n_i
1	6		
2	7		
3	8		
4	9		
5	10		
6	11		
7	12		
8	13		
9	14		
10	15		
11	16		
12	17		
13	18		
14	19		
15	20		
16	21		
17	22		
18	23		
19	24		
20	25		
21	26		
22	27		
23	28		
24	29		
25	30		
26	31		
27	32		
28	33		
29	34		
30	35		
31	36		

Data i podpis osoby prowadzącej

BADANIE ROZKŁADU NORMALNEGO

1. Opis teoretyczny

Rozkład normalny, który często jest nazywany rozkładem Gaussa, jest rozkładem prawdopodobieństwa będącym podstawą rozważań statystycznych w fizyce oraz w wielu innych dziedzinach.

Rozkład ten jest przybliżeniem bardziej ogólnego rozkładu dwumianowego, który jest rozwiązaniem następującego zagadnienia. Danych jest N statystycznie niezależnych zdarzeń. Przypuśćmy, że każde z nich ma określone prawdopodobieństwo p , a zatem prawdopodobieństwo, że zdarzenie to nie zachodzi, wynosi $q = 1 - p$. Ile wyniesie prawdopodobieństwo $P(n)$, że zajdzie n spośród N takich zdarzeń? Na pytanie to można odpowiedzieć korzystając z rozkładu dwumianowego o postaci:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (1)$$

Wzór ten jest uniwersalny, umożliwiając obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń z różnych dziedzin nauki, techniki, jak też różnorodnych procesów losowych. Można z niego korzystać przy rzutach monetami, sześciennymi kostkami w grach liczbowych, jak również przy orientacji spinów lub określaniu liczby cząsteczek gazu doskonałego.

Wzór (1) przestaje jednak być wygodny gdy N jest duże, ponieważ wymaga to obliczeń silni dużych liczb. Wówczas można zastosować aproksymację, dzięki której wyrażenie (1) przyjmuje prostą postać. Możliwość takiej aproksymacji polega na tym, że dla dużych N prawdopodobieństwo $P(n)$ wykazuje ostre i wąskie maksimum wokół wartości n równej jej wartości średniej. W metrologii ocena niepewności pomiarowej typu A dotyczy określenia niepewności dla pomiarów obarczonych błędami przypadkowymi. Z jednego pomiaru nie można wnioskować o jego dokładności. Dlatego konieczne jest wykonanie serii n bezpośrednich pomiarów wielkości fizycznej x , poprzez wielokrotne, niezależne powtórzenie rozpatrywanego pomiaru. Wyniki $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, gdzie N jest ilością powtórzeń pomiaru w serii, będą różnić się losowo. Można traktować jako N realizacji zmiennej losowej o wartości oczekiwanej x_0 (utożsamianej z wartością rzeczywistą) oraz odchyleniu standardowym σ i stosować standardowe rezultaty teorii błędów. Wartość rzeczywista jest nieznaną, ale w większości przypadków dla serii pomiarów najlepszym oszacowaniem mierzonej wartości jest średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2)$$

Jest to podstawowe twierdzenie teorii pomiarów tzw. pierwszy postulat Gaussa. Wynika ono z faktu równości prawdopodobieństw zawyżenia jak i zaniżenia wielkości mierzonej. Tym samym błędy powinny kompensować się. Przy skończonej ilości pomiarów w serii może jednak wystąpić nierównomiernie rozłożenie wyników wokół wartości rzeczywistej. Tym samym wartość średnia \bar{x} jest jedynie bliska wielkości rzeczywistej x_R ,

ale jej nie równa. Zbliżenie to jest tym lepsze im dłuższa jest seria pomiarowa. Równość $\bar{x} = x_R$ występuje tylko dla nieskończenie dużych serii pomiarów, praktycznie niemożliwej do wykonania.

Odpowiednie przekształcenie zależności (1) prowadzi do następującego wzoru na funkcję prawdopodobieństwa zwaną jako rozkład Gaussa lub rozkład normalny:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

gdzie parametr σ , zwany w statystyce odchyleniem standardowym, określa rozkład wyników pomiarów wokół wartości średniej.

W serii wyniki pomiarów rozkładają się wokół wartości średniej zgodnie z opisaną wzorem (2) krzywą Gaussa. Aby się o tym przekonać należy zakres pomiarowy podzielić na przedziały o równej szerokości Δx i obliczyć n_i - ile pomiarów z serii mieści się w każdym z nich (rys. 1). Punkty eksperymentalnie otrzymanego histogramu niejednokrotnie znacznie odbiegają od teoretycznej krzywej Gaussa, ponieważ ilość powtórzeń N nie jest wystarczająco duża. W celu wygładzenia eksperymentalnej krzywej stosuje się metodę Simpsona polegającą na otrzymaniu nowych wartości n_{iS} na podstawie eksperymentalnych wartości n_i dla trzech sąsiednich punktów pomiarowych ze wzoru:

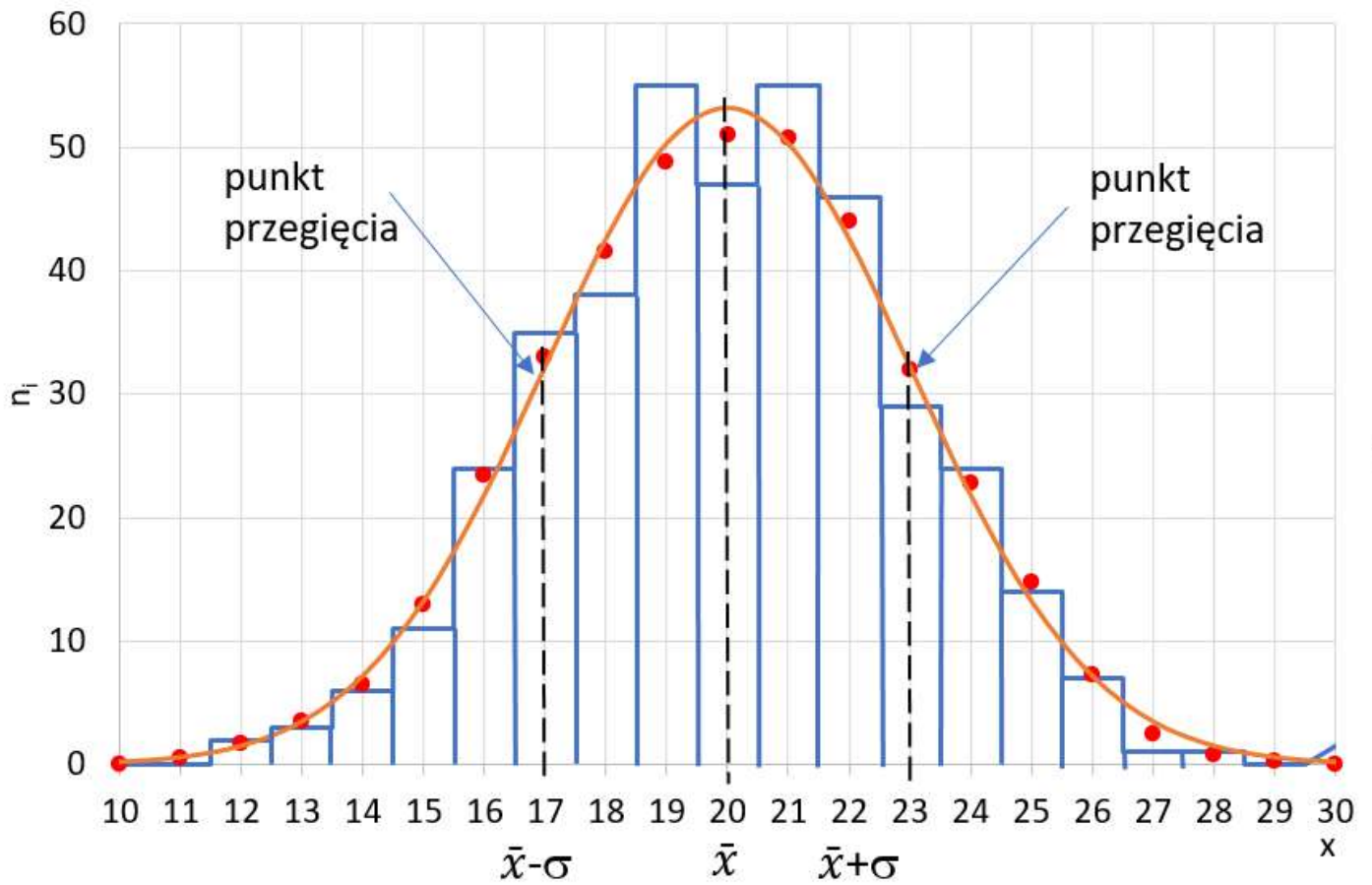
$$n_{iS} = 0,25(n_{i-1} + 2n_i + n_{i+1}) \quad (4)$$

Przez punkty n_{iS} przeprowadzamy krzywą, która jest krzywą eksperymentalną i ją można porównać do teoretycznej krzywej Gaussa, biorąc pod uwagę, że

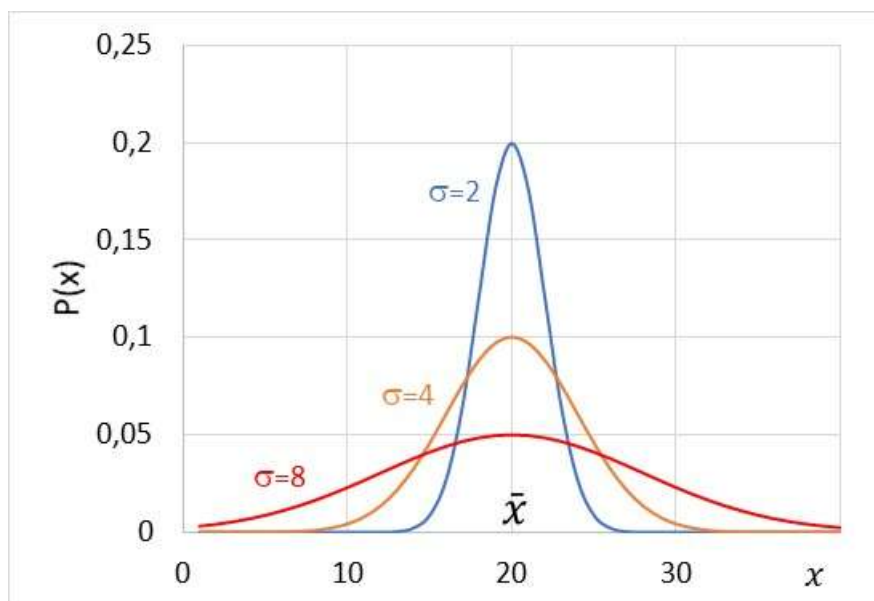
$$P(x_i) = \frac{n_{iS}}{N} \quad (5)$$

Obwiednia dzwonowa poprowadzona pomiędzy punktami wyznaczonymi metodą Simpsona (patrz rys. 1) jest pewnym wyidealizowaniem, pokazuje wygląd rozkładu normalnego, gdyby był funkcją ciągłą (dla $N = \infty$). Taka postać łatwiej poddaje się analizie matematycznej i dlatego jest często stosowana, ale nie należy zapominać, że realny rozkład normalny ma strukturę ziarnistą (dyskretną).

Kształt krzywej Gaussa, zwanej również krzywą dzwonową, bardzo silnie zależy od wartości odchylenia standardowego σ . Na rys. 2 pokazano przebiegi krzywej Gaussa dla kilku różnych wartości odchylenia standardowego. Dla małych odchyleń standardowych krzywa jest bardzo stroma i odchylenia od wartości oczekiwanej są bardzo małe. Im większe odchylenie standardowe tym krzywa jest bardziej płaska. Należy pamiętać, że pole powierzchni pod krzywą Gaussa jest zawsze jednakowe i równe prawdopodobieństwu całkowitemu czyli jedności. Zauważmy, że na krzywej Gaussa można wyróżnić obszary o przeciwnej skierowanej krzywiznie (rys. 1). W okolicy maksimum krzywa jest wypukła, a daleko poza maksimum wklęsła. Obszary o przeciwnej krzywiznie są oddzielone punktami przegięcia, odpowiadają im na osi odciętych punkty $\bar{x} - \sigma$ oraz $\bar{x} + \sigma$.



Rys. 1. Rozkład pomiarów w serii wokół wartości średniej \bar{x} jest rozkładem Gaussa.
Czerwone punkty wyznaczono metodą Simpsona.



Rys. 2. Przebieg krzywej ciągłego rozkładu normalnego w zależności od odchylenia standardowego.
Im większe jest odchylenie standardowe, tym krzywa jest szersza i bardziej spłaszczona.
Pole pod każdą krzywą jest takie same i równe jedności.

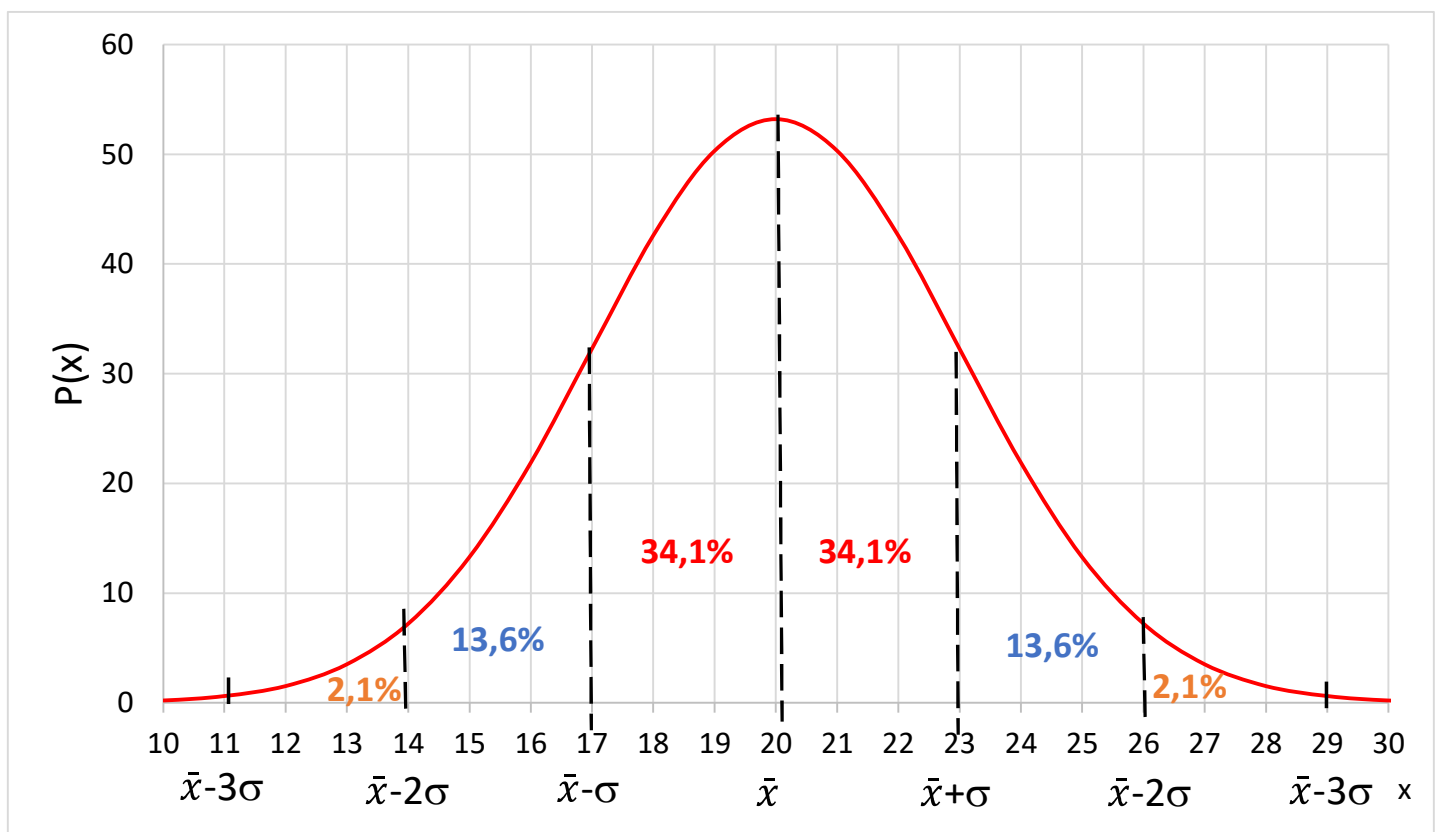
Ponieważ rozkład Gaussa opisuje zjawisko probabilistyczne można określić jedynie prawdopodobieństwo znalezienia się dowolnego wyniku pomiaru x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) w określonym przedziale wartości $\langle x_A, x_B \rangle$. I tak:

1. w przedziale $\langle \bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma \rangle$ mieści się 68,26% wyników z serii,
2. w przedziale $\langle \bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma \rangle$ mieści się 95,45% wyników z serii,
3. w przedziale $\langle \bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma \rangle$ mieści się 99,73% wyników z serii.

Prawdopodobieństwo, że dany wynik pomiaru z serii pomiarowej znajdzie się w przedziale $\langle \bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma \rangle$ wynosi zatem 0,683. Prawdopodobieństwo, z jakim w zadanym przedziale znajdzie się dowolny pomiar z serii nosi nazwę poziomu ufności, a przedział nazwę przedziału ufności.

W interpretacji graficznej prawdopodobieństwu znalezienia wyniku pomiaru w odpowiednim przedziale odpowiada pole pod krzywą Gaussa odcięte tym przedziałem przy założeniu, że pole pod całą krzywą równa się jeden (rys. 3). Jest to warunek normujący funkcję, gdyż prawdopodobieństwo uzyskania dowolnego n wynosi jeden (prawdopodobieństwo całkowite).

Analiza kształtu krzywej Gaussa prowadzi do wniosku, że wybór przedziału $\langle \bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma \rangle$ jako określającego rozrzut wyników pomiarów wokół wartości średniej jest najbardziej optymalny, co wynika z faktu, że jest on wyznaczony przez punkty przegięcia krzywej. Podniesienie poziomu ufności jest możliwe przez poszerzenie przedziału ufności np. do $\langle \bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma \rangle$, gdyż pola pod krzywą w przedziałach oddalonych od średniej \bar{x} dalej niż o σ wnoszą mały wkład do poziomu ufności (krzywa Gaussa na tych obszarach jest wklęsła).



Rys. 3. Interpretacja graficzna przedziałów ufności i poziomów ufności p.

Można również odchylenie standardowe wyznaczyć na podstawie wzoru (3) opisującego funkcje Gaussa. Logarytmując obie strony tego równania otrzymujemy:

$$\ln(P(x)) = \ln \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right) \right] = \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \ln \left[\exp \left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right) \right] \quad (6)$$

$$\ln(P(x)) = -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \bar{x})^2 + \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (7)$$

Otrzymaliśmy równanie prostej $y=ax+b$, gdzie:

$$y = \ln(P(x)), \quad x = (x - \bar{x})^2, \quad a = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad b = \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

a ponieważ $P(x)$ jest proporcjonalne do n_{is} to również $\ln[n_{is}]$ w funkcji $(x - \bar{x})^2$ będzie prostą o tym samym współczynniku kierunkowym a . Znajomości współczynnika kierunkowego a umożliwia wyznaczenie odchylenia standardowego σ :

$$\sigma = \sqrt{-\frac{1}{2a}} \quad (8)$$

Odchylenie standardowe σ w teorii pomiarów przyjmuje się za miarę rozrzutu wyników pomiaru i definiuje się jako **niepewność standardową pojedynczego pomiaru**, którą oblicza się przy pomocy wyrażenia:

$$u(x) = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{(N-1)}} \quad (9)$$

Występujący w wyrażeniu czynnik $(N - 1)$ można uzasadnić faktem, że ponieważ część informacji zawartej w serii $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ została wykorzystana do określenia wartości średniej \bar{x} , uśrednianie związanej z odchyleniem standardowym następuje z mniejszą liczbą punktów swobody i stąd dzielenie przez $(N - 1)$ zamiast przez N . Nie należy też rozumieć tej wielkości jako niepewności „tylko jednego pomiaru” gdyż do jej uzyskania potrzebna jest znajomość serii N wartości. Odchylenie standardowe (wzór 9) oraz wartość średnia (wzór 1) są parametrami rozkładu Gaussa (wzór 2) i ściśle określają jego przebieg.

Dla wartości **średniej** \bar{x} uznawanej za wynik serii N pomiarów jako **niepewność standardową wartości średniej** przyjmuje się odchylenie standardowe wartości średniej $s_{\bar{x}}$:

$$u(\bar{x}) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \frac{u(x)}{\sqrt{N}} \quad (10)$$

Wartość niepewności standardowej wartości średniej jest \sqrt{N} razy mniejsza od niepewności standardowej pojedynczego pomiaru. Wartości niepewności standardowych $u(x)$ lub $u(\bar{x})$, choć wyznaczone przy pomocy jednoznacznych wzorów są równe wartościom **odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru** oraz **odchylenia standardowego wartości średniej** tylko w granicy dla nieskończonej ilości pomiarów. Dla skończonej liczby pomiarów niepewność pomiaru jest określona ze skończoną dokładnością. Przyjmuje się, że dokładności wyznaczenie niepewności standardowej jako odchylenia standardowego niepewności pojedynczego

pomiaru są rzędu: 5 pomiarów - 30%, 10 pomiarów - 20%, 30 pomiarów - 10%. Wykonywanie większej ilości pomiarów nie jest opłacalne, ponieważ dokładność wyznaczenia niepewności dość powoli zwiększa się ze wzrostem N ilości pomiarów.

Reasumując wykonanie serii N pomiarów umożliwia:

1. oszacowanie niepewności spowodowanych błędami przypadkowymi,
2. zwiększenie dokładności wyznaczenia niepewności,
3. wielkość $s_{\bar{x}}$ nie jest parametrem rozkładu normalnego, ale jest z nim związana.

Wykonanie niewielkiej liczby 2 lub 3 pomiarów można przyjąć jako sprawdzian powtarzalności, za wynik pomiaru należy wówczas przyjąć średnią (jak w metodzie A). Dla oceny niepewności pomiaru stosować ocenę typu B, czyli uwzględnić wiedzę i doświadczenie eksperymentatora.

Trzeba podkreślić, że same parametry rozkładu normalnego (\bar{x} , s) nie dają pełnej informacji statystycznej. Taką informacją jest jedynie wykres rozkładu w postaci dyskretniej (tzw. histogram) lub w postaci ciągłej.

Parametry rozkładu normalnego można wyznaczyć następującymi sposobami:

średnia \bar{x} na bazie wzoru (1) lub z wykresu rozkładu normalnego - jako miejsce położenia jego maksimum;

odchylenie standardowe σ na bazie wzoru (8), (9) lub z wykresu rozkładu normalnego określając położenie punktów przegięcia.

2. Opis układu pomiarowego

W skład zestawu pomiarowego wchodzi:

1. sześć kostek do gier losowych



Podstawowym celem ćwiczenia jest:

1. sprawdzenie, czy rozkład liczby wyników uzyskania danej sumy oczek polega na rozkładzie Gaussa;
2. wyznaczenie parametrów rozkładu Gaussa.

3. Przebieg pomiarów

1. Rzucić jednocześnie sześcioma kostkami do gry.
2. Policzyc uzyskaną sumę oczek.
3. W zależności od uzyskanej sumy postawić kreskę w odpowiednim wierszu karty pomiarów.

Po wykonaniu 100 rzutów zsumować kreski i uzyskaną wartość wpisać w kolumnie liczba wyników.

4. Opracowanie wyników pomiarów

1. Wyznaczyć wartość średnią serii N=100 pomiarów (średnią wyrzucaną liczbę oczek) korzystając ze wzoru:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{31} n_i x_i$$

Uwaga: W pierwszej sumie jest sumowanie po wszystkich zdarzeniach – jaki wynik uzyskaliśmy w każdym rzucie, w drugiej sumie sumujemy po przedziałach (możliwych wynikach sumy oczek z 6 kostek) stąd musimy uwzględnić ile zdarzeń zaszło w tym przedziale (ile razy wypadł dany wynik).

2. Narysować schodkowy histogram rozkładu dwumiennego zależności liczby wyników n_i od numeru przedziału x_i wykorzystując wszystkie pomiary. Szerokość przedziału przyjmą równą 1.
3. Stosując zależność Simpsona $n_{iS} = 0,25(n_{i-1} + 2n_i + n_{i+1})$ wyznaczyć punkty pomocnicze i zapisać ich wartości w poniższej tabeli.

Przedział			Przedział		
Liczba wyników			Liczba wyników		
x_i	n_i	n_{iS}	x_i	n_i	n_{iS}
6			21		
7			22		
8			23		
9			24		
10			25		
11			26		
12			27		
13			28		
14			29		
15			30		
16			31		
17			32		
18			33		
19			34		
20			35		
x	x	x	36		

4. Nanieść na wykresie schodkowym punkty pomocnicze wyznaczone metodą Simpsona n_{iS} . Narysować ciągłą krzywą rozkładu normalnego starając się, aby tyle samo punktów wyznaczonych metodą Simpsona znalazło się pod krzywą, co i nad krzywą (patrz rys. 1).
5. Wypełnić tabelę wybierając 5 wartości x_i po prawej stronie maksimum krzywej i 5 po lewej w pobliżu punktów przegięcia oraz odpowiadające im wartości n_{iS} .

z lewej strony maximum			z prawej strony maximum		
x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$\ln n_{iS}$	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$\ln n_{iS}$

6. Narysować proste $\ln(n_{iS}) = f[(x_i - \bar{x})^2]$ dla punktów leżących po prawej oraz po lewej stronie maximum.. Współczynniki prostych wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów Gaussa.

7. Wyznaczyć σ - odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru (z dokładnością do 0,1):

- a) metodą punktów przegięcia jako odległość punktów przegięcia dzielona przez 2;
- b) stosując wzór i przyjmując, że $x_i = 6, 7, \dots, 36$ jest możliwą sumą oczek z sześciu kostek:

$$u(x) = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{31} n_i(x_i - \bar{x})^2}{(N - 1)}} = \sqrt{\frac{n_1(6 - \bar{x})^2 + n_2(7 - \bar{x})^2 + \dots + n_{31}(36 - \bar{x})^2}{(N - 1)}}$$

- c) wyznaczyć z wykresu tangensy kąta nachylenia prostych z pkt 6 do osi x (współczynniki kierunkowe a) i obliczyć σ_L i σ_P oraz ich wartość średnią. Wykorzystać do tego wzór (8) z Opisu teoretycznego.

8. Wyznaczyć średnią z trzech otrzymanych powyżej wartości odchylenia standardowego odpowiednio ją zaokrąglając pamiętając, że w ćwiczeniu mają sens całkowite ilości przedziałów.

9. Obliczyć liczby wyników rzutów w granicach przedziałów ufności podanych w poniższej tabeli.

Poziom ufności	Granice przedziału ufności	Ilość wyników	
		bezwzględna	względna
0,682	$\bar{x} \mp \sigma$		
0,954	$\bar{x} \mp 2 \sigma$		
0,997	$\bar{x} \mp 3 \sigma$		

***Dodatek dla chętnych (Entropia)**

B. Entropia

Teoria

Rozpatrzmy rzut monetą. Z prawdopodobieństwem 1/2 (50%) wypadnie orzeł (O) albo reszka (R). Są to tzw. **mikrostany**.

Rozparzmy teraz rzut dwiema monetami. Oto jakie mogą być mikrostany w tym wypadku:

OO, OR, RO, RR.

Otrzymaliśmy **4 mikrostany**, a prawdopodobieństwo wystąpienia każdego z nich wynosi 1/4 (25%). Tak jest, jeżeli jesteśmy w stanie rozróżnić monety, tzn na której wypadł orzeł, a na której reszka. Jeżeli natomiast nie jesteśmy w stanie rozróżnić monet, to widzimy tylko układy

(W₁) **orzeł-orzeł** (OO)

(W₂) **orzeł-reszka** (dwa mikrostany: OR i RO),

(W₃) **reszka-reszka** (RR).

Te są **makrostany** i jest ich tylko **3**. O ile prawdopodobieństwo wystąpienia każdego mikrostanu jest takie samo 1/4, to makrostanów już nie. Dla pierwszego i ostatniego prawdopodobieństwo wynosi 1/4, ale już środkowego wynosi 1/2, bo składa się z dwóch mikrostanów po 1/4.

Widać stąd, że wypadnięcie jednego orła i jednej reszki jest najbardziej prawdopodobne.

Oznaczmy literą W_i ile jest mikrostanów w danym makroście. Otrzymamy wówczas:

$W_1 = 1, W_2 = 2, W_3 = 1$

Rzut dwiema kośćmi. Minimalna liczba sumy oczek to 2 a maksymalna 12

Tabela poniżej przedstawia mikro- i makrostany

Makrostan ϵ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
suma oczek	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
mikrostany	1 1	2 1	1 3	1 4	1 5	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6
		1 2	2 2	2 3	2 4	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5	
			3 1	3 2	3 3	3 4	4 4	4 5	4 6	4	
				4 1	4 2	4 3	5 3	6 3			
					5 1	5 2	6 2				
						6 1					
W _i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Prawdopodobieństwo	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Tab. 1

Jak widać, środkowy makrostan W₆ składa się z 6 mikrostanów (W₆ = 6) i jest najbardziej prawdopodobny.

Środkowemu makrostanowi i=6 odpowiada średnia ilość oczek na kościach $\left(\frac{2+12}{2} = 7\right)$

ENTROPIA

Statystyczny wzór Boltzmanna określający entropię S układu:

$$S = k \cdot \ln W_i, \quad \text{gdzie } k - \text{stała Boltzmanna} \quad (1.1)$$

Jak widać z Tab. 1, największe prawdopodobieństwo zdarzenia jest dla największego W_i a więc i dla **największej entropii** (1.1). Rzut kośćmi, czy monetami jest procesem i jak widać z powyższego, procesy przebiegają (są najbardziej prawdopodobne) w kierunku największej entropii. Jest to jedno z podstawowych praw przyrody i jest to jedno z określeń **II zasady termodynamiki**.

Dla 2 kości, prawdopodobieństwa między makrostanami tak bardzo się nie różnią. Różnica ta gwałtownie wzrasta wraz z liczbą kości (elementów procesu). Dla przykładu, gdybym wziął stół i wsypał najpierw **50 kulek czarnych**, a następnie na wierzch **50 kulek białych** (w sumie 100 elementów), wówczas były by one ułożone w stanie pierwotnym, $W=1$ a entropia $S=0$. Ale jeżeli zacznę potrząsać stołem i one zaczną się mieszać (zajdzie proces – będą miały swobodę ruchu), wówczas dla makrostanu o idealnie wymieszanych kulkach czarnych z białymi, **W** będzie o wiele rzędów większe. Dla stanu wymieszania kulek entropia S jest nieporównanie większa niż dla stanu pierwotnego ułożenia. Każdy z pewnością spotkał się z tym zjawiskiem w życiu codziennym. Chcąc wymieszać różne produkty, potrząsamy naczyniem w którym się znajdują, aby dać im swobodę przemieszczania się. Im dłużej potrząsamy, tym produkty są lepiej wymieszane. **Stan uporządkowania, w wyniku procesów samorzutnych, dąży do nieuporządkowania, czyli chaosu** (Wszechświat dąży do chaosu – entropia we Wszechświecie rośnie). Zamek zbudowany z piasku z czasem staje się kupką piasku; szklanka z gorącą herbatą pozostawiona na dłużej, z czasem przyjmuje temperaturę otoczenia; zapach perfum w jednym miejscu, z czasem rozchodzi się po całym pomieszczeniu. Można te zjawiska opisywać i innymi prawami, ale jest to ciągle przejaw II zasady termodynamiki, podobnie jak wszędzie obowiązuje zasada zachowania energii.

Prawa termodynamiki dotyczą dużej liczby elementów. O ile dla 2 kości, czy 2 monet, prawdopodobieństwa różnych makrostanów nie różnią się aż tak bardzo, to np. dla ilości cząstek w jednym molu ($6,0221 \cdot 10^{23}$) prawdopodobieństwo zajścia procesu o największej entropii jest tak duże, że możemy mówić o pewności. Gdyby nawet choćby 1000 cząstek zachowało się inaczej, to przy 10^{23} jest to kompletnie nieistotne.

Wróćmy jednak do ćwiczenia, czyli rzutu **6 kości**. Minimalna suma oczek, jaka może na nich wypaść to 6 (sześć jedynek), a maksymalna to 36 (sześć szóstek). Na podstawie wcześniejszych analiz dla 2 kości, można przewidzieć, że najbardziej prawdopodobna suma oczek będzie w środku przedziału, czyli

$$\frac{6 + 36}{2} = 21$$

6 kości nie jest to duża liczba elementów, więc prawdopodobieństwo wypadnięcia innej sumy nie jest takie małe. Ale my tymi kośćmi rzucamy 100 razy, więc to jest równoważne rzutowi 600 kości. Przy tej liczbie kości, najbardziej prawdopodobna będzie suma oczek:

$$A_0 = \frac{600+3600}{2} = 2100 \quad (1.2)$$

Załóżmy, że na sali rzuca kośćmi 10 osób, wówczas sumarycznie daje to jednorazowy rzut $600 \times 10 = 6000$ kośćmi. Najbardziej prawdopodobna suma oczek z wszystkich rzutów wszystkich studentów wyniesie:

$$\frac{6000 + 36000}{2} = 21000$$

Ogólny wzór dla dowolnej liczby studentów będzie wyglądał następująco:

$$B_0 = \frac{600+3600}{2} \times \text{ilość studentów} = 2100 \times \text{ilość studentów} \quad (1.3)$$

Obliczenia

B1. Na podstawie tabeli pomiarowej oblicz sumę wszystkich oczek w 100 rzutach

$$A_1 = \sum_{i=1}^{31} x_i n_i$$

a następnie oblicz procentową różnicę pomiędzy twoim pomiarem a wartością oczekiwaną (1.2)

$$\Delta x = \frac{|A_1 - A_0|}{A_0} \cdot 100\%$$

B2. Zsumuj liczbę oczek A_i wszystkich studentów z twojej grupy

$$B = \sum_{i=1}^{\text{liczba studentów}} A_i$$

Oblicz procentową różnicę dla pomiaru sumy wszystkich oczek wszystkich studentów B a wartością oczekiwaną B_0 (1.3)

$$\Delta y = \frac{|B - B_0|}{B_0} \cdot 100\%$$

Wnioski

5. Podsumowanie

Zestawienie:

- 1) Zapisać zgodnie z regułami prezentacji wyników: wartość średnią i jej odchylenie standardowe uzyskane z wykresu oraz uzyskane z obliczeń.

Analiza:

- 2) Przedyskutować podobieństwa i różnice analizowanych parametrów, wyciągnąć wnioski.
- 3) Ocenic, czy uzyskane wyniki polegają rozkładowi Gaussa.
- 4) Porównać uzyskane poziomy ufności dla zadanych przedziałów ufności z wartościami typowymi dla rozkładu Gaussa.
- 5) Ocenic czy krzywa rozkładu jest symetryczna.
- 6) Wyciągnąć wnioski pod kątem występowania błędów grubych, systematycznych i przypadkowych oraz ich przyczyn.

Synteza:

- 7) Podać cele ćwiczenia i wyjaśnić, czy zostały osiągnięte.
- 8) Zaproponować działania zmierzające do podniesienia dokładności wykonywanych pomiarów.

6. Przykładowe pytania kontrolne

1. Omówić, co opisuje rozkład dwumienny i jakie parametry posiada?
2. Omówić, co opisuje rozkład normalny i jakie parametry posiada?
3. Jakie są podobieństwa i różnice między rozkładami: dwumiennym, normalnym i Gaussa?
4. W jakich przypadkach możemy stosować rozkład Gaussa?
5. Jakie są podobieństwa i różnice między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną?
6. Jakie są podobieństwa i różnice między niepewnością standardową i odchyleniem standardowym?
7. Podać wzór oraz definicję niepewności standardowej wartości średniej.
8. Podać wzór oraz definicję oraz niepewności standardowej pojedynczego pomiaru.
9. Podać wzór oraz definicję wartości średniej.
10. Omówić jak wyznaczane są pomocnicze punkty metodą Simpsona?
11. Dlaczego do przeprowadzenia krzywej przybliżającej przebieg funkcji rozkładu Gaussa wyznaczamy punkty pomocnicze metodą Simpsona?
12. Co trzeba sprawdzić by wnioskować, że dana próba podlega rozkładowi Gaussa?
13. Omówić, w jaki sposób doboru elementów z całej populacji, które są poddane badaniu, wpływa na wynik?
14. Omówić, co przedstawia rozkład Gaussa i jakie parametry można z niego odczytać?
15. Czym jest przestrzeń zdarzeń elementarnych i zdarzenie elementarne w tym ćwiczeniu?
16. Czym jest przestrzeń zdarzeń losowych i zdarzenie losowe w tym ćwiczeniu?
17. Omówić, jaka jest matematyczno-statystyczna interpretacja krzywej Gaussa?
18. Podać wzory krzywej rozkładu Gaussa i jej parametrów?
19. Wyjaśnić, co oznacza symbol σ i jaki ma związek z wykresem Gaussa i pomiarami?
20. Podać, jaki poziom ufności jest przypisany przedziałom ufności: $(x \pm \sigma)$, $(x \pm 2\sigma)$ oraz $(x \pm 3\sigma)$.
21. Podać, jakim przedziałom ufności $(x \pm \dots \sigma)$ odpowiadają prawdopodobieństwa: 68,26%, 95,45% oraz 99,73%.
22. Omówić jak zmienia się kształt krzywej Gaussa wraz ze zmianą wartości odchylenia standardowego oraz wartości średniej.
23. Czy istnieją dwie różne krzywe Gaussa, które mają tę samą wartość średnia i tę samą wartość odchylenia standardowego?
24. Podaj wzór na rozkład normalny. Omów kształt wykresu rozkładu normalnego w zależności od względnej wielkości odchylenia standardowego. Czym jest odchylenie standardowe w rachunku błędów?
25. Jak obliczyć prawdopodobieństwo zajścia pojedynczego zdarzenia w przedziale (a, b) ?
Co jest warunkiem normalizacyjnym?
27. Co przedstawia rozkład Gaussa? Narysuj krzywą Gaussa i oznacz jej parametry oraz przedziały ufności.
28. Co to jest niepewność standardowa? Jakie są metody wyznaczania niepewności standardowej pomiarów bezpośrednich i pośrednich. Podaj przykład do każdej z metod.