WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z FIZYKI 1

prowadząc(a/y) ....

grupa .... podgrupa ….. zespół ….. semestr letni roku akademickiego 202...…/202..….

student(ka) ....

SPRAWOZDANIE Z PRACY LABORATORYJNEJ nr 47

BADANIE DRGAN WAHADŁA SPRĘŻYNOWEGO

pomiary wykonano dnia .... jako ćwiczenie …….…… z obowiązujących 5

OCENA ZA TEORIĘ				
data				
Podejście (ostateczny termin)	**1** (zasadnicze, przed następnymi zajęciami)	**2** (poprawa, tydzień przed sesją zasad.)	**3** (poprawa, tydzień przed końcem sesji zas.)	**4** (poprawa, tydzień przed końcem sesji popr.)
OCENA KOŃCOWA				
data				

Po wykonaniu sprawozdania wypełnij poniższy **Arkusz Samokontroli**
sprawdzając czy wszystkie wymagane czynności zostały wykonane wpisując znak **x** w odpowiednie kwadraty.

1. Dane informacyjne

☐ **czy na karcie tytułowej znajdują się:**
a. dane wykonawcy,
b. numer grupy,
c. tytuł ćwiczenia laboratoryjnego,
d. data wykonania sprawozdania,
e. oraz czy wszystkie strony są ponumerowane.

2. Kompletność sprawozdania

☐ **czy sprawozdanie zawiera:**
a. wstęp teoretyczny z celem ćwiczenia i krótkim opisem zagadnienia fizycznego, którego dotyczy ćwiczenie,
b. kartę pomiarową z podpisem prowadzącego,
c. obliczenia opatrzone wyjaśniającym opisem,
d. komplet ponumerowanych i opatrzonych pełnym tytułem wykresów i tabel,
e. wyniki wszystkich poleceń wymienionych w pkt. 4 instrukcji do ćwiczenia (Opracowanie wyników pomiarów).

3. Poprawność obliczeń

☐ **czy w sprawozdaniu:**
a. podano przykłady obliczeń wraz z rachunkiem jednostek,
b. wstawione do wzoru liczby sprowadzono do tych samych jednostek (np. m, s, itp.),
c. określono wszystkie wymagane niepewności pomiarowe,
d. wyznaczono niepewności obliczonych wielkości, w tym składowe niepewności złożonych,
e. podano wynik i jego niepewności dbając o właściwą liczbę cyfr znaczących.

4. Poprawność wykresów

☐ **czy wykresy:**
a. wykonano na papierze milimetrowym,
b. skale osi dobrano tak, aby wykres wypełniał większość obszaru arkusza,
c. opisano osie wraz z jednostkami np. okres T [s], długość wahadła L [cm],
d. naniesiono punkty pomiarowe i ich niepewności jeśli są widoczne w skali rysunku,
e. dokonano aproksymacji wyników krzywą (ale nie linią łamaną), dla prostej podano jej równanie.

5. Poprawność tabel

☐ **czy w tabelach:**
a. dane pomiarowe opatrzone są mianem (jednostką) – w nagłówkach kolumn,
b. właściwie określono liczbę cyfr znaczących dla danych zawartych w tabelach.

6. Podsumowanie

☐ **czy w podsumowaniu i wnioskach:**
a. podano wynik końcowy wraz z jego niepewnością z właściwą liczbą cyfr znaczących i jednostką,
b. oceniono wpływ rodzaju błędów pomiarowych na wynik końcowy,
c. zawarto wnioski dotyczące przebiegu i oceny pomiarów (np. porównanie z literaturą).

Położenie nierozciągniętej sprężyny (bez obciążenia obciążeniem): …………………

Położenie równowagi sprężyny (obciążeniem tylko pojemnikiem na ciężarki): …………………

L.p.	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:
	Wydłużenie sprężyny [mm]					
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
	Niepewność pomiaru wydłużenia					

Pomiar n=………. okresów drgania wahadła

L.p.	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:	Ilość nakrętek:
	Czas drgań [s]					
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
	Niepewność pomiaru czasu					

Data i podpis osoby prowadzącej

Badanie drgań wahadła sprężynowego

1. Opis teoretyczny do ćwiczenia

Harmoniczny ruch drgający

Ruch drgający możemy zdefiniować jako ruch w którym wartości pewnych wielkości fizycznych - które go opisują - powtarzają się okresowo albo cyklicznie. Co istotne, taki ruch zawsze odbywa się wokół pewnego punktu, zwykle określanego mianem położenia równowagi. Ruch drgający należy do najczęściej występujących rodzajów ruchu. Drgania wykonują nasze struny głosowe, amortyzatory w samochodach, budynki usytuowane przy ruchliwych ciągach komunikacyjnych, czy też atomy w sieci krystalicznej. Jednym ze szczególnych rodzajów ruchu drgającego jest ruch harmoniczny prosty. Występuje on w sytuacji, gdy siła działająca na ciało wykonujące drgania jest wprost proporcjonalna do wychylenia tego ciała z położenia równowagi i skierowana przeciwnie do niego. W takim przypadku równanie ruchu punktu drgającego o znanej masie m, na który działa wspomniana siła, możemy zapisać w następującej formie:

$$ma = -kx\,, \qquad (1)$$

gdzie a jest przyspieszeniem punktu drgającego o masie m, x – jest wychyleniem punktu z położenia równowagi, a k – jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyrażając przyspieszenie a jako drugą pochodną położenia x po czasie t oraz wykonując proste przekształcenie, możemy równanie (1) zapisać w następującej postaci:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \qquad (2)$$

Rozwiązaniem równania (2) jest poniższa funkcja:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \qquad (3)$$

Wobec tego ruch harmoniczny prosty możemy określić jako ruch, w którym współrzędna opisująca położenie punktu drgającego zmienia się w czasie w sposób kosinusoidalny (bądź sinusoidalny). W oparciu funkcję opisaną równaniem (3) możemy zdefiniować najważniejsze wielkości opisujące ruch harmoniczny. Zaliczamy do nich:

φ – *faza początkowa drgań* – faza w chwili początkowej, tj. dla $t = 0$ (warto pamiętać, że w przypadku równania (3) fazę drgań określa argument funkcji cosinus, czyli: $\omega t+\varphi$),

A – *amplituda drgań* - maksymalne wychylenie punktu drgającego z położenia równowagi,

ω – *częstość kołowa drgań*, którą możemy wyrazić jako:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \qquad (4)$$

Czas wykonania jednego pełnego drgania określany jest okresem drgań, zaś liczba drgań przypadająca na jednostkę czasu jest częstotliwością drgań. Obie te wielkości są ze sobą powiązane poprzez poniższe równanie:

$$f \cdot T = 1$$

Biorąc pod uwagę funkcję wyrażoną równaniem (3) oraz obliczając odpowiednie pochodne otrzymujemy wyrażenia opisujące prędkość oraz przyspieszenie punktu drgającego:

$$V = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)\ , a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Wyrażenie opisujące przyspieszenie punktu drgającego, po podstawieniu zależności (3), możemy wyrazić jako:

$$a = -\omega^2 x\,. \qquad (5)$$

Ostatecznie, przyrównując stronami zależności (2) i (5), dochodzimy do następującego równania:

$$\omega = \sqrt{k/m} \tag{6}$$

Opisuje ono wzajemną zależność pomiędzy częstością kołową ω, współczynnikiem k i masą punktu drgającego m.

Ruch drgający ciała zawieszonego na sprężynie

W wyniku działania sił zewnętrznych ciało może się odkształcać oraz zmieniać objętość i kształt. Gdy ciało doznaje odkształcenia, siły zewnętrzne są równoważone siłami jego reakcji sprężystych, które dążą do przywrócenia mu początkowej postaci i kształtu.

Wyobraźmy sobie, że rozważane ciało ma określony przekrój poprzeczny (np. pręt, drut, sprężyna), a zewnętrzna siła ~F jest skierowana wzdłuż podłużnej osi ciała, powodując jego wydłużenie lub skrócenie o wartość x. W takiej sytuacji słuszna będzie zależność:

$$F = kx\,, \tag{7}$$

gdzie współczynnik k, mający wymiar $[k]$ = N/m, nazywamy współczynnikiem sprężystości ciała. Jego wartość liczbowa jest równa wartości siły, powodującej wydłużenie lub skrócenie ciała o jednostkę długości. Zależność (1) ma zastosowanie jedynie dla ograniczonego zakresu działających sił, nie przekraczających tzw. granicy proporcjonalności.

W przypadku sprężyny jej współczynnik sprężystości określony jest jako:

$$k = \frac{Gr^4}{4NR^3} \tag{8}$$

gdzie r jest promieniem drutu sprężyny, N — liczbą zwojów, R — promieniem sprężyny, natomiast G — tzw. modułem sztywności (lub modułem Kirchhoffa) materiału sprężyny o wymiarze $[G]$ = N/m^2. Moduł sztywności jest jednym z fundamentalnych parametrów charakteryzujących własności sprężyste danego materiału. Parametr ten nie zależy od rozmiarów i kształtu ciała.

Współczynnik sprężystości k sprężyny możemy w prosty sposób wyznaczyć doświadczalnie. Jeśli na końcu sprężyny zawiesimy pewne ciało o znanej masie m (rys. 1), to ulegnie ona rozciągnięciu pod wpływem ciężaru tego ciała:

$$Q = mg \tag{9}$$

(g — przyspieszenie ziemskie) o długość x_0. Kładąc we wzorze (7) $F = Q$ i $x = x_0$, otrzymujemy zależność, pozwalającą wyznaczyć współczynnik sprężystości:

$$k = \frac{mg}{x_0}\,. \tag{10}$$

Następnie, gdy wychylimy ciało w kierunku pionowym z położenia równowagi i puścimy swobodnie (rys. 1), zaobserwujemy że wykonuje ono drgania pod wpływem siły reakcji $\vec{F_s} = -\vec{F}$ odkształconej sprężyny. Zgodnie z zależnością (7) siła reakcji jest zdefiniowana w następujący sposób:

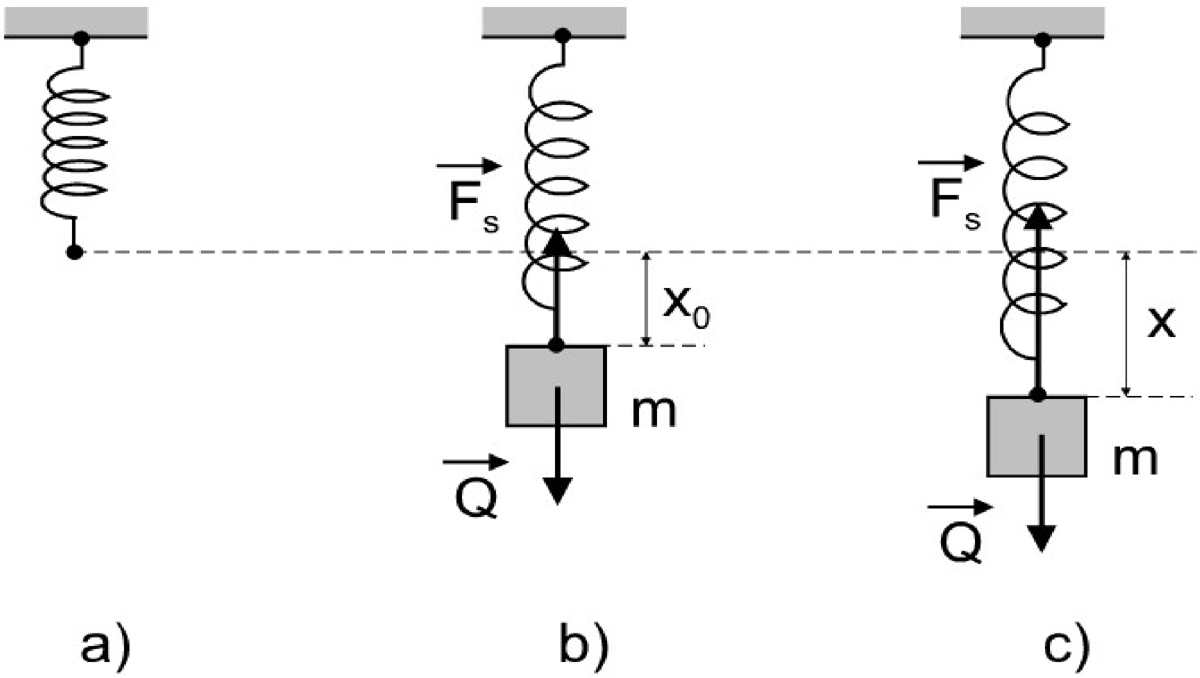
$$F_s = -kx\,, \tag{11}$$

przy czym znak „–” oznacza iż ma ona kierunek przeciwny do kierunku wychylenia ciała. Ruch ciała w wyniku działania siły określonej zależnością (11) jest ruchem harmonicznym prostym, zaś okres drgań ciała możemy zapisać jako:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{12}$$

Możemy zauważyć, że okres drgań zależy jedynie od masy ciężarka *m* i stałej *k* sprężyny, zaś nie zależy od początkowego odchylenia ciężarka od położenia równowagi. Fakt, że okres drgań nie jest zależny od amplitudy *A* jest tzw. *prawem izochronizmu wahadła sprężynowego*. Opierając się na równaniu (12) i dokonując prostych przekształceń możemy obliczyć współczynnik sprężystości. Należy zaznaczyć, że powyższe zależności są słuszne jedynie przy założeniu, że możemy zaniedbać siłę oporu powietrza, jak również masę sprężyny m_s w porównaniu z masą ciała. Z kolei jeśli dodatkowo uwzględnimy masę sprężyny m_s, to wtedy zależność na okres drgań wahadła sprężynowego zapisujemy jako:

$$T = 2\pi\sqrt{\left(m + \tfrac{1}{3}m_s\right)/k} \tag{13}$$



Rys. 1. a) Sprężyna bez obciążenia, b) obciążona sprężyna w położeniu równowagi,
c) obciążona sprężyna wychylona z położenia równowagi.

2. Opis układu pomiarowego

W skład zestawu pomiarowego wchodzą: statyw na którym zawieszona jest sprężyna, sprężyna z koszyczkiem na obciążenie, ciężarki.

Masa ciężarka (nakrętki fi8) została wyznaczona przez wielokrotne ważenie określonej liczby ciężarków.

Do pomiaru wydłużenia sprężyny służy linijka o długości 50 cm. Pomiarowy podlega tylko swobodna część sprężyny.
Należy zwrócić uwagę, że mocowania sprężyny do statywu i koszyczka do sprężyny zostały wykonane przez nakręcenie sprężyny na śruby fi8. Można przyjąć, że wysokość śruby mocującej sprężynę w koszyczku jest równa głębokości koszyczka.

Okres drgań obciążonych sprężyny mierzy się stoperem ręcznym lub stoperem ze smartfona.

Zestawienie wartości teoretycznych wielkości stosowanych:

- przyspieszenie grawitacyjne (bez niepewności): standardowe 9,80665 ms^{-2}, Gdańsk 9,81450 ms^{-2}, Kraków 9,81054 ms^{-2}, Poznań 9,81334 ms^{-2}, Warszawa 9,81225 ms^{-2}, ...
- Sprężyna: średnica zewnętrzna zwoju 8,5 mm; średnica drutu 0,5 mm; średnica wewnętrzna zwoju 7,5 mm; materiał stal nierdzewna V2A nr 1.4310, moduł około G = 71 700 N mm^{-2}
- Masa jednego ciężarka (nakrętki) m = 4,463 g a u(m) = 0,010 g

Podstawowe cele ćwiczenia:
1. wyznaczyć współczynnik sprężystości sprężyny metodą obciążenia statycznego;
2. wyznaczyć współczynnik sprężystości sprężyny metodą obciążenia harmonicznego.

3. Przeprowadzenie pomiarów *(wersja podstawowa)*

1. Za pomocą linijki określić położenie równowagi sprężyny.
   Obciążeniem jest sam pojemnik na ciężarki, przymocowany na stałe.

2. Do plastikowego pojemnika wkładamy ciężarki (nakrętki) i mierzymy wydłużenie sprężyny (x_0).
   Pomiary wykonujemy dla 5 różnych mas wskazanych przez prowadzącego
   (wkładając kolejno np. 3, 6, 9, 12, 15 nakrętek).
3. Pomiary według punktu 2 powtarzamy 5-10 razy.

4. Do plastikowego pojemnika wkładamy ciężarki (nakrętki) o znanej masie (tak jak w punkcie 2).
   Pojemnik odciągamy w dół o około 1-2 cm i mierzymy czas n (5 - 10) pełnych drgań wahadła.
   Należy zwrócić uwagę, by nie rozciągać zbytnio sprężyny, gdyż spowoduje to uderzenie zwojów o siebie i o statyw. Jeżeli doszło do uderzenia to pomiar należy powtórzyć przy mniejszym naciągu.
5. Pomiary według punktu 2 powtarzamy 5-10 razy.

6. Oszacować i zapisać niepewności mierzonych wielkości.

Zadania dodatkowe do wyznaczenia i analizy:

1. Obliczyć współczynnik sprężystości badanej sprężyny (od obciążenia statycznego jak i harmonicznego) także z uwzględnieniem niepewności pomiarowej masy.
2. Obliczyć współczynnik sprężystości badanej sprężyny (od obciążenia statycznego) także z uwzględnieniem niepewności pomiarowej wydłużenia sprężyny.
3. Obliczyć współczynnik sprężystości badanej sprężyny (od obciążenia harmonicznego) także z uwzględnieniem niepewności pomiarowej okresu drgań.

4. Obliczyć wartość modułu sztywności G materiału sprężyny.
   W tym celu przyjąć średnicę $d = 2r$ drutu sprężyny i średnicę zwojów sprężyny $D = 2R$ z wartości teoretycznych.
   Wyznaczyć ilość N zwojów sprężyny podlegających rozciąganiu.
   Do obliczeń przyjąć wzór
   $$G = \frac{4NR^3k}{r^4} \tag{14}$$
   Wyznaczyć niepewność maksymalną ΔG uwzględniając niepewności (według własnego oszacowania): ΔN, ΔR , Δr, a za niepewność współczynnika sprężystości przyjąć $|\Delta k| = 3u(k)$.

4. Opracowanie pomiarów

(wersja podstawowa – nie zawiera dodatkowych zadań do wyznaczenia i analizy)

1. Wyznaczyć średnie wydłużenie sprężyny x_0 pod wpływem każdego z obciążeń m oraz jego niepewność standardową wynikającą tylko z wykonania n pomiarów.
2. Sporządzić wykres zależności wydłużenia sprężyny $x_0(m)$ pod wpływem obciążenia statycznego. Zgodnie ze wzorem (10), zależność ta powinna przedstawiać linię prostą, określoną ogólnym równaniem:
$$x_0 = \mathrm{A} \cdot m + \mathrm{B} \tag{15}$$
gdzie: $A = g/k$.
Jeżeli punkty na wykresie odpowiadające największym masom m, odchylają się od zależności prostoliniowej, świadczy to o przekroczeniu granicy proporcjonalności dla danej sprężyny. Wyniki tych pomiarów należy w dalszych obliczeniach pominąć.
Wartości parametrów A i B prostej oraz ich niepewności u(A) i u(B) wyznaczyć metoda regresji liniowej. Na wykresie narysować prostą i niepewności standardowe oraz zamieścić równanie prostej.
3. Obliczyć współczynnik sprężystości badanej sprężyny:
$$\mathrm{k} = \mathrm{g/A} \tag{16}$$
i jego niepewności: standardową, rozszerzoną i względną.

4. Wyznaczyć średnie okres drgania T pod wpływem każdego z obciążeń m oraz jego niepewność standardową wynikającą tylko z wykonania n pomiarów.
5. Sporządzić wykres zależności zmiany kwadratu okresu drgań $T^2(m)$ pod wpływem obciążenia harmonicznego. Wykres powinien być prostoliniowy, a współczynnik kierunkowy prostej powinien wynosić $A = 4\pi^2/k$.
Wartości parametrów A i B prostej oraz ich niepewności u(A) i u(B) wyznaczyć metoda regresji liniowej. Na wykresie narysować prostą i niepewności standardowe oraz zamieścić równanie prostej.
6. Obliczyć współczynnik sprężystości badanej sprężyny:
$$k = 4\pi^2/A \tag{17}$$
i jego niepewności: standardową, rozszerzoną i względną.
7. Obliczyć wartość modułu sztywności G materiału sprężyny.
W tym celu przyjąć średnicę $d = 2r$ drutu sprężyny i średnicę zwojów sprężyny $D = 2R$ z wartości teoretycznych. Znając ilość N zwojów sprężyny podlegających rozciąganiu obliczyć G korzystając ze wzoru:
$$G = 4\mathrm{N}R^3\mathrm{k}/r^4 \tag{18}$$
8. Wyznaczyć niepewność maksymalną ΔG uwzględniając niepewności (według własnego oszacowania): ΔN, ΔR , Δr, a za niepewność współczynnika sprężystości przyjąć $|\Delta k| = 3\mathrm{u(k)}$

5. Podsumowanie

(wersja podstawowa - przykład dla dwóch niezależnych celów, których wyniki należy porównać)

1. Zestawić wyznaczone wielkości dla obu przypadków obciążenia $\left(\bar{k},\ u_c(k),\ u_{c,r}(k),\ U(k)\right)$ oraz ich wartości odniesienia zgodnie z regułami ich prezentacji.

2. Przeanalizować uzyskane rezultaty dla obu przypadków obciążenia:
a) czy spełniona jest relacja $u_{c,r}(\bar{k}) < 0{,}1$,
b) czy istnieje część wspólna przedziałów *(k +/- U(k))* obu przypadków obciążenia,
pod kątem występowania błędów: grubych, systematycznych i przypadkowych.

3. Synteza
a) Zaproponować działania zmierzające do podniesienia dokładności wykonywanych pomiarów.
b) Porównać wyniki obu przypadków pomiędzy sobą i wyciągnąć wnioski.
c) Wyciągnąć wnioski pod kątem występowania błędów grubych, systematycznych i przypadkowych oraz ich prawdopodobnych przyczyn.
d) Podać cele ćwiczenia i wyjaśnić czy zostały osiągnięte.

6. Przykładowe pytania

1. Omów proste odkształcenia materiału sprężystego — rozciąganie i ściskanie.
2. Odkształcenie objętościowe i postaciowe oraz współczynniki je charakteryzujące.
3. Wielkości opisujące ruch harmoniczny prosty.
4. Wyprowadzić równanie różniczkowe opisujące ruch masy punktowej m drgającej harmonicznie, bez tłumienia, i podać jego rozwiązanie.
5. Obliczyć energię potencjalną, kinetyczną i całkowitą takiej drgającej masy m w funkcji położenia.
6. Zdefiniuj ruch harmoniczny. Napisz równanie ruchu harmonicznego i opisz wielkości go charakteryzujące.
7. Wyprowadź wzór na okres drgań wahadła sprężynowego. Od czego on zależy?
8. Napisz równanie ruchu cząstki wykonującej ruch harmoniczny prosty i podaj jego rozwiązanie. Nazwij i podaj interpretację podstawowych wielkości charakteryzujących ruch harmoniczny.
9. Wykonaj wykresy zależności położenia, prędkości i przyspieszenia oscylatora od czasu.
10. Jakie rodzaje energii posiada ciało drgające na sprężynie? Określić kiedy występuje maksimum, minimum poszczególnych typów energii? Określić zasadę zachowania energii dla tego przypadku.
11. Wahadło sprężynowe, punktowe, fizyczne.
12. Drgania harmoniczne nietłumione, tłumione i wymuszone.
13. Energia w ruchu harmonicznym.
14. Opis metody pomiarowej, cel, metoda pośrednia czy bezpośrednia wzory opisujące dla metody pośredniej.