

DODATEK MATEMATYCZNO – FIZYCZNY

Podstawowe wzory rachunku wektorowego	2
Podstawowe wzory rachunku różniczkowego.....	3
Podstawowe wzory rachunku całkowego.....	4
Inne zależności matematyczne	5
Wyznaczanie parametrów prostej $y = ax + b$ oraz ich niepewności metodą aproksymacji najmniejszych kwadratów Gaussa.....	6
Podstawowe Stałe Fizyczne.....	7
Gęstość alkoholu etylowego i wody destylowanej.....	8
Gęstość wybranych ciał	8
Lepkość dynamiczna wody destylowanej	9
Lepkość dynamiczna wybranych cieczy	9
Napięcie powierzchniowe cieczy w zetknięciu z powietrzem	9
Prędkość dźwięku w wybranych ośrodkach.....	10
Pojemności cieplne dla kilku wybranych gazów.....	10
Przyspieszenie spadku swobodnego	11
Parametry charakteryzujące sprężystość	11
Inne parametry fizyczne	11
Wybrane właściwości ferromagnetyczne	12
Składowa pozioma ziemskiego pola magnetycznego	12
Momenty dipolowe niektórych cząsteczek chemicznych	12
Wybrane parametry półprzewodników.....	13
Właściwości materiałów półprzewodnikowych	13
Wpływ domieszki w germanie i krzemie	13
Zakresy długości fal widzialnych (widma słonecznego).....	14
Wybrane linie widmowe dla wodoru, helu i rtęci.....	14
Współczynnik załamania światła (589,5 nm) względem powietrza (20° C, 1013 hPa).....	15
Praca wyjścia z wybranych metali.....	15

Podstawowe wzory rachunku wektorowego

Skalar: d - liczba rzeczywista

Wektory: $\vec{A} = [a_x, a_y, a_z]$, $\vec{B} = [b_x, b_y, b_z]$, $\vec{C} = [c_x, c_y, c_z]$,

gradient:
$$\text{grad } f(x, y, z) = \nabla f = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{k}$$

dywergencja:
$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

rotacja:
$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

iloczyn skalarny

$$d = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\angle A, B)$$

$$d = \vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

iloczyn wektorowy

$$d = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin(\angle A, B)$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Podstawowe wzory rachunku różniczkowego

Pochodne wybranych funkcji

x – zmienna rzeczywista, a – stała rzeczywista, n – stała naturalna

Funkcja $y(x)$	Pochodna $y' = \frac{dy(x)}{dx}$
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{n-1}{n}}$
e^{ax}	ae^{ax}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin(ax)$	$a \cos(ax)$
$\cos(ax)$	$-a \sin(ax)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Inne zależności

$$\frac{d[f(x) \pm g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) \pm \frac{dg(x)}{dx} f(x)$$

$$\frac{d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - \frac{dg(x)}{dx} f(x)}{g^2(x)}$$

Podstawowe wzory rachunku całkowego

Całki wybranych funkcji

x – zmienna rzeczywista, a – stała rzeczywista, n – stała naturalna

Funkcja $y(x)$	Całka $Y(x) = \int y(x)dx$	Funkcja $y(x)$	Całka $Y(x) = \int y(x)dx$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\sin^2(ax)$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\cos^2(ax)$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax)$	$\operatorname{tg}(ax)$	$-\frac{1}{a} \ln \cos(ax) $
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a} \sin(ax)$	$\operatorname{tg}^2(ax)$	$\frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax) - x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$\ln x$	$x \ln(x) - x$		

całka nieoznaczona $\int y(x)dx = Y(x) + a$

całka oznaczona $\int_a^b y(x)dx = Y(b) - Y(a)$

całkowanie przez części $\int u dv = uv - \int v du$

Inne zależności matematyczne

Rozwinięcia w szereg wybranych funkcji

x – zmienna rzeczywista, n – stała naturalna

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{dla } |x| < \infty$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{dla } |x| < \infty$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \text{dla } |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{dla } -1 \leq x \leq 1$$

$$(1+x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad \text{dla } |x| < 1$$

szereg Maclarena

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

przybliżenie dla małego przedziału

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

Poziomy ufnosci dla wybranych współczynników rozszerzenia k

współczynnik rozszerzenia k	poziom ufnosci
1	0,683
1,28	0,8
1,65	0,9
2	0,954
2,33	0,98
3	0,997

Wyznaczanie parametrów prostej $y = ax + b$

oraz ich niepewności metodą aproksymacji najmniejszych kwadratów Gaussa

Istotą tej metody jest przeprowadzenie przez zbiór punktów na płaszczyźnie prostej w taki sposób, że jednocześnie:

- kwadraty odległości punktów od prostej są najmniejsze z możliwych,
- pola tych kwadratów nad i pod prostą są przeciwnego znaku i w sumie zerują się.

Cechy te pozwalają na szybką weryfikację graficzną poprawności wyznaczenia prostej.

współczynnik kierunkowy równania prostej

$$\bar{a} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i) - n(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n(\sum_{i=1}^n x_i^2)}$$

wyraz wolny równania prostej

$$\bar{b} = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i) - \bar{a}(\sum_{i=1}^n x_i)}{n}$$

niepewność współczynnika kierunkowego równania prostej

$$u(\bar{a}) = \sigma_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{(\sum_{i=1}^n y_i^2) - \bar{a}(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - \bar{b}(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}}$$

niepewność wyrazu wolnego równania prostej

$$u(\bar{b}) = \sigma_{\bar{b}} = \sigma_{\bar{a}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

współczynnik korelacji

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

jego wartość z zakresu:

powyżej 0,9 świadczy o bardzo dobrej zbieżności wartości serii pomiarowej

powyżej 0,8 świadczy o dobrej zbieżności wartości serii pomiarowej

powyżej 0,7 świadczy o dostatecznej zbieżności wartości serii pomiarowej

powyżej 0,6 świadczy o słabej zbieżności wartości serii pomiarowej

Granice przedziałów nie są jednoznacznie zdefiniowane w literaturze.

Podstawowe Stałe Fizyczne

Wielkość	Symbol	Wartość zaokrąglona
jednostka masy atomowej	u	$1,66 \cdot 10^{-27}$ kg 931,5 MeV
liczba Avogadra	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
ładunek elementarny	e	$1,66 \cdot 10^{-19}$ C
ładunek / masa elektronu	e/m _e	$1,76 \cdot 10^{11}$ C·kg ⁻¹
masa elektronu	m _e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
masa neutronu	m _n	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg
masa protonu	m _p	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
prędkość światła w próżni	c	$3 \cdot 10^8$ m·s ⁻¹
przenikalność elektryczna próżni	ε ₀	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F·m ⁻¹
przenikalność magnetyczna próżni	μ ₀	$1,26 \cdot 10^{-7}$ N·A ⁻²
stała Boltzmanna	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K ⁻¹
stała Faradaya	F	$9,65 \cdot 10^4$ C·mol ⁻¹
stała gazowa uniwersalna	R	$8,31$ J·mol ⁻¹ ·K ⁻¹
stała grawitacyjna	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m ³ ·kg ⁻¹ ·s ⁻²
stała Plancka	h	$6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s
stała Rydberga	R_∞	$1,10 \cdot 10^7$ m ⁻¹
stała Stefana-Boltzmana	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W·m ⁻² ·K ⁻⁴
stała Wiena	b	2898 μm·K

Gęstość alkoholu etylowego i wody destylowanej

Temp. [°C]	alkohol etylowy gęstość [kg m ⁻³]	woda destylowana gęstość [kg m ⁻³]	Temp. [°C]	alkohol etylowy gęstość [kg m ⁻³]	woda destylowana gęstość [kg m ⁻³]
0	806,25	999,87	35	776,71	994,06
5	802,07	999,99	36	775,85	993,71
10	795,35	999,73	37	775,00	993,36
15	792,83	999,13	38	774,14	992,99
16	792,67	998,97	39	773,29	992,62
17	791,98	998,80	40	772,15	992,24
18	791,14	998,62	41	771,30	991,86
19	790,29	998,43	42	770,44	991,47
20	789,45	998,23	43	769,58	991,07
21	788,60	998,02	44	768,72	990,66
22	787,75	997,80	45	767,86	990,25
23	786,91	997,56	46	767,00	989,82
24	786,06	997,32	47	766,13	989,40
25	785,22	997,07	48	765,27	988,96
26	784,37	996,81	49	764,41	988,52
27	783,52	996,54	50	763,55	988,07
28	782,67	996,26	51	762,69	987,62
29	781,82	995,97	52	761,83	987,15
30	780,97	995,67	55	759,24	985,73
31	780,12	995,37	60	754,91	983,24
32	779,27	995,05	70	746,25	977,81
33	778,41	994,73	80	wrzenie 78,4 °C	971,89
34	777,56	994,40	90		965,34

Gęstość wybranych ciał

Ciało	Warunki	Gęstość [kg m ⁻³]	Ciało	Warunki	Gęstość [kg m ⁻³]
powietrze suche	0 °C, 1 atm	1,2928	toulen	15 °C	876
ciało ludzkie		1 050 – 1 100	toulen	20 °C	873
stal		7 600 – 7 850	toulen	25 °C	870
żelazo kute		7 800 – 7 900	dimetylo- formamid (DMF)	20 °C	945
ołów		11 370			

Lepkość dynamiczna wody destylowanej

Temp. [°C]	lepkość [N s m ⁻²]	Temp. [°C]	lepkość [N s m ⁻²]	Temp. [°C]	lepkość [N s m ⁻²]	Temp. [°C]	lepkość [N s m ⁻²]
0	0,0017921	22	0,0009579	32	0,0007679	42	0,0006321
5	0,0017921	23	0,0009358	33	0,0007523	43	0,0006270
10	0,0017921	24	0,0009142	34	0,0007321	44	0,0006097
15	0,0015118	25	0,0009837	35	0,0007225	45	0,0005988
16	0,0011111	26	0,0008737	36	0,0007085	46	0,0005883
17	0,0010828	27	0,0008545	37	0,0006947	47	0,0005782
18	0,0010559	28	0,0008360	38	0,0006814	48	0,0005683
19	0,0010299	29	0,0008180	39	0,0006685	49	0,0005588
20	0,0010050	30	0,0008007	40	0,0006560	50	0,0005494
21	0,0009810	31	0,0007840	41	0,0006439	51	0,0005404

Lepkość dynamiczna wybranych cieczy

Ciało	Temperatura [°C]	Lepkość [N s m ⁻²]
alkohol etylowy	20	0,001200
alkohol metylowy	20	0,000597
gliceryna	26,5	0,494000
parafina	20	1,532000
terpentyna	20	0,001487
oliwa z oliwek	20	0,084000
rtęć	20	0,001554
Olej jadalny	20	0,066

Napięcie powierzchniowe cieczy w zetknięciu z powietrzem

Temperatura [°C]	Napięcie [N m ⁻¹]	Temperatura [°C]	Napięcie [N m ⁻¹]
woda destylowana		benzen	
10	0,07420	10	0,03024
15	0,07349	20	0,02888
18	0,07305	25	0,02818
20	0,07275	toluen	
25	0,07197	10	0,02970
30	0,07118	20	0,02853
40	0,06956	25	0,02792
50	0,06791	dimetyloformamid (DMF)	
60	0,06618	20	0,0364

Prędkość dźwięku w wybranych ośrodkach

Ośrodek	Warunki	Prędkość [m s^{-1}]
wodór		1284
hel		965
dwutlenek węgla		268
tlen		259
azot		334
powietrze suche	0 °C, 1 atm	331,36
powietrze suche	20 °C, 1 atm	331,60
woda	19 °C	1460
woda	20 °C	1410
rtęć		1451
benzen		1326
aceton		1192
alkohol metylowy		1123
nafta		2330
stal	20 °C	4990
szkło	20 °C	5000 - 6000

Pojemności cieplne dla kilku wybranych gazów

Gaz lub para	T [°C]	C_v [J / mol K]	C_p [J / mol K]	κ	i
Hel	15	12,48	20,80	1,67	3
Neon	15	12,44	20,80	1,67	3
Wodór	0	20,18	28,41	1,41	5
Azot	0	20,67	28,91	1,40	5
Tlen	0	20,84	29,08	1,395	5
		20,90	29,20	1,397	
Tlenek węgla	0	20,67	28,95	1,40	5
Dwutlenek węgla	0	27,37	35,61	1,305	
Para wodna	0	25,04	33,28	1,33	6
Metan	0	26,25	34,53	1,315	6
Para benzenu (C_6H_6)	0	64,94	73,21	1,13	6
Para alkoholu etylowego ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$)	0	61,36	69,64	1,135	6

Przyspieszenie spadku swobodnego

Miejsce	Przyspieszenie [m s ⁻²]	Miejsce	Przyspieszenie [m s ⁻²]
standardowe	9,80665		
Kraków	9,81054	Poznań	9,81334
Warszawa	9,81225	Gdańsk	9,81450

Parametry charakteryzujące sprężystość

Parametr	Stal (w zależności od składu)	Duraluminium	Aluminium (w zależności od domieszek)
moduł Younga [GPa]	202 - 211	0,6 - 7,4	67 - 74
moduł Poissona	0,25 - 0,30	0,25 - 0,35	0,32 - 0,35
moduł sztywności G [GPa]	80 - 82	2,6 - 2,7	27 - 30
granica sprężystości [MPa]	167 - 275	530	98,1 - 127
wytrzymałość na rozierwanie [MPa]	373 - 1863	688	167 - 265

Inne parametry fizyczne

Parametr	wartość
współczynnik przewodnictwa cieplnego tekstolitu [W /mK]	0,30
współczynnik termoelektryczny termopary Fe-Konstantan [uV·K ⁻¹]	48,9
współczynnik termoelektryczny termopary Fe-Cu [uV·K ⁻¹]	0,41
równoważnik elektrochemiczny miedzi Cu ⁺ [mg·A ⁻¹ ·s ⁻¹]	0,6588 · 10 ¹¹
równoważnik elektrochemiczny miedzi Cu ⁺⁺ [mg·A ⁻¹ ·s ⁻¹]	0,3294 · 10 ¹¹
polaryzowalność elektronowa cząsteczki wody [m ³]	1,44·10 ⁻³⁰
normalne ciśnienie atmosferyczne (atm) [Pa]	101 325

Wybrane właściwości ferromagnetyczne

Material	Skład chemiczny	Przenikalność względna początkowa	Przenikalność względna maksymalna	Koercja [$A\ m^{-1}$]	Polaryzacja nasycenia [T]	Temperatura Curie [K]
Żelazo czyste	do 0,05 % zaniecz.	10 000	200 000	4	2,15	1053
Żelazo techniczne	do 0,2 % zaniecz.	150	5 000	80	2,15	1053
Fe ₃ O ₄		70	70		0,60	856
Stal miękka	ok. 0,2% C	120	2 000	143	2,12	1043
Stal krzemowa	4% Si	500	7 000	40	1,97	967
Stal krzemowa teksturowana	3% Si	1 500	40 000	8	2,00	1013
Ferrokobalt	35% Co	1 000	27 000	16-60	2,46	1253
78 permalloy	78,5 % Ni	8 000	100 000	4	1,08	473
Superpermalloy	5% Mo, 79% Ni	100 000	1 000 000	0,16	0,79	673

Składowa pozioma ziemskiego pola magnetycznego

średnia dla Ziemi	$4,7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
dla Waszyngtonu	$5,7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
dla Krakowa	$2,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
dla Warszawy	$1,8 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

Momenty dipolowe niektórych cząsteczek chemicznych

cząsteczka	μ [D]	struktura
cząsteczki dwuatomowe		
CO	0,11	liniowa
HCl	1,04	liniowa
KCl	6,8	liniowa
H ₂ , O ₂ , N ₂	0	liniowa
cząsteczki trójatomowe		
CO ₂ , CS ₂ , HgCl ₂ , BeBr ₂	0	liniowa
H ₂ O	1,87	kątowa, 105°
cząsteczki czteroatomowe		
NH ₃	1,46	czworościenna
BCl ₃ , BF ₃ , BBr ₃	0	płaska
cząsteczki bardziej złożone		
CH ₃ OH	1,69	
C ₂ H ₅ OH	1,6	

Wybrane parametry półprzewodników

Parametry próbki	Si	Ge	InSb	Hg _{0,8} Cd _{0,2} Te
szerokość przerwy energetycznej [eV]	1,1	0,7	0,2	0,165
ruchliwość elektronów [m ² ·V ⁻¹ ·s ⁻¹]	0,135	0,39	8	25
ruchliwość dziur [m ² ·V ⁻¹ ·s ⁻¹]	0,0475	0,19	0,075	0,07
masa efektywna elektronów	0,23	0,03	0,01	
masa efektywna dziur	0,12	0,08	0,18	
stała sieci [Å]	5,43	5,66	6,48	6,46
stała dielektryczna	11,7	16,0	15,6	18,5
gęstość [kg·m ³]	2,33·10 ³	5,33·10 ³	5,77·10 ³	7,63·10 ³
grupa	IV	IV	III-V	II-VI

Właściwości materiałów półprzewodnikowych

Związek	E _g (T = 293 K) [eV]	μ _n [cm ² /Vs]	μ _p [cm ² /Vs]
C-diamant	5,4	1800	1400
Si	1,107	1900	500
Ge	0,67	3800-3900	1820-1900
α Sn	0,08	2500	2400
AlAs	2,16	1200	420
GaP	2,24	300	100
GaAs	1,35	8800	400
GaSb	0,67	4000	1400
InP	1,27	4600	150
InAs	0,36	33000	460
InSb	0,165	78000	750

Wpływ domieszki w germanie i krzemie

Domieszka	Donor lub Akceptor	ΔE _d lub ΔE _a [eV]	
		German (Ge)	Krzem (Si)
B	A	0,0104	0,045
Al	A	0,0102	0,057
Ga	A	0,0108	0,065
In	A	0,0112	0,160
P	D	0,0120	0,044
As	D	0,0127	0,049
Sb	D	0,0096	0,039
Bi	D	-	0,069

Zakresy długości fal widzialnych (widma słonecznego)

barwa	zakres długości fal [nm]
fioletowa	360 - 450
niebieska	450 - 492
zielona	492 - 550
żółta	550 - 588
pomarańczowa	588 - 647
czerwona	647 - 770

Wybrane linie widmowe dla wodoru, helu i rtęci

pierwiastek	długość [nm]	barwa	intensywność
H	397,01	fioletowa	słaba
	410,77	fioletowa	słaba
	434,05	fioletowa	średnia
	486,13	niebiesko - zielona	średnia
	656,28	czerwona	silna
He	447,15	fioletowa	słaba
	471,31	niebieska	silna
	492,19	niebiesko-zielona	średnia
	501,57	zielona	średnia
	587,56	żółta	bardzo silna
	667,81	czerwona	średnia
	706,52	czerwona	średnia
Hg	404,65	fioletowa	bardzo słaba
	407,78	fioletowa	słaba
	435,83	niebieska	średnia
	491,60	niebiesko - zielona	średnia
	546,07	zielona	silna
	576,96	żółta	bardzo silna
	579,07	żółta	bardzo silna
	623,41	czerwona	słaba

Współczynnik załamania światła (589,5 nm) względem powietrza (20° C, 1013 hPa)

Ciało	Współczynnik	Ciało	Współczynnik
woda	1,333	gliceryna	1,468
lód	$n_0=1,309$ $n_e=1,311$	terpentyna	1,472
alkohol etylowy	1,362	szkło zwykłe	1,518
alkohol metylowy	1,330	szkło flint	1,612 - 1,755

Praca wyjścia z wybranych metali

metal	praca wyjścia [eV]
srebro	4,70
żelazo	7,71
ołów	4,05
platyna	5,55