

R o z d z i a ł 7

POLE ELEKTRYCZNE

Zjawiska elektryczne towarzyszyły człowiekowi od samego początku jego pojawienia się. Wyładowania atmosferyczne napawały grozą, zaś zjawiska bioelektryczne i elektryzacja pewnych materiałów nasuwały przypuszczenia o niewidzialnej sile, która potrafi ożywić to co martwe.

Pierwsze doświadczenia (w dzisiejszym słowa tego znaczeniu) z elektryczności przeprowadzane były już w starożytności, już Tales z Miletu (600 lat p.n.e.) wspomina o tym, że potarty bursztyn wykazuje właściwości przyciągania drobnych przedmiotów. Ogólnie też znane były objawy elektryczności atmosferycznej, takie jak pioruny, ale natura ich była nie wyjaśniona aż do drugiej połowy XVII wieku. Wiedzano jednak, że można się ustrzec przed uderzeniem pioruna stosując wysokie, zaostrome maszty. Podczas prac archeologicznych w Egipcie na ścianach starożytnych świątyń znaleziono napisy wyjaśniające stosowanie masztów jako środka zabezpieczającego przed „niebieskim ogniem”.

Dopiero w XIX i XX wiek wprzągnął szeroko elektryczność w służbę człowieka. Ze zjawiskami elektrycznymi mamy do czynienia nie tylko w przypadku przepływu prądu elektrycznego. Pola elektrostatyczne często występują w nowoczesnych mieszkaniach stając się źródłem iskrzenia. Naelektryzowany sweter przyciąga skrawki papieru, a ekran telewizora cząstki kurzu. Łatwo zauważyć, że do tego oddziaływania nie jest konieczny bezpośredni kontakt. Jedno ciało naelektryzowane działa na drugie ciało naelektryzowane nawet z pewnej odległości. Doświadczeń takich można zaplanować i wykonać bardzo dużo. Można naelektryzować wiele materiałów, np. przez tarcie, lub też wytwarzać elektryczność statyczną za pomocą odpowiednich maszyn. Wyniki tych doświadczeń są następujące –

naelektryzowane ciała działają na siebie z odpowiednimi siłami, zależnymi, ogólnie rzecz biorąc, od odległości, przyciągają się wzajemnie lub odpychają. Sama przyczyna oddziaływania jest jednak dla obserwatora nieuchwytna. Dla jej objaśnienia wprowadzono wielkość (abstrakcyjną), zwaną ładunkiem elektrycznym. Ładunku elektrycznego nie można zobaczyć – można o jego istnieniu wnioskować jedynie poprzez występowanie zjawisk elektrycznych.

7.1. Ładunek elektryczny

Podstawową własnością ładunku elektrycznego jest to, że mamy do czynienia z dwoma jego rodzajami. Ładunek doznaje odpychania od dowolnego innego z tej samej grupy, natomiast jest przyciągany przez dowolny ładunek z innej grupy.

Powiemy, że jeśli dwa małe elektrycznie naładowane ciała A i B umieszczone w pewnej odległości od siebie odpychają się oraz jeśli A przyciąga trzecie naelektryzowane ciało C, to z pewnością można stwierdzić, że ciała B i C również się przyciągają.

Fizycy współcześni traktują istnienie dwu rodzajów ładunków jako przejaw istnienia przeciwstawnych stanów tej samej wielkości fizycznej. (Wszyscy wiemy, że moneta jest jedna, a jak rzucimy ją do góry to upadnie na ziemię raz reszką a raz orłem).

Które z ładunków są ujemne, a które dodatnie? Jest rzeczą czysto umowną, które z ładunków nazwiemy dodatnimi, a które ujemnymi.

Zgodnie z umową elektrony mają ujemny ładunek.

Ładunki elektryczne podlegają dwóm fundamentalnym prawom:

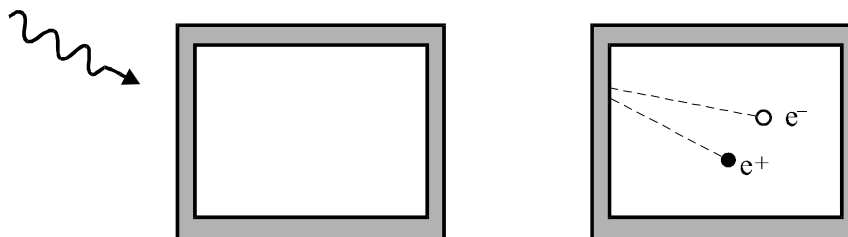
1. Ładunek podlega prawu zachowania.
2. Ładunek może przybierać jedynie wartości będące (co do modułu) wielokrotnością ładunku elektronu.

7.2. Prawo zachowania ładunku

Wprowadzimy jako postulat teorii prawo zachowania ładunku w następującej postaci: Całkowity ładunek elektryczny układu odosobnionego w dowolnej chwili nie może ulegać zmianie.

Eksperymenty potwierdzają to prawo, np. zjawisko tworzenia pary elektron-pozyton. Jeżeli bombardujemy promieniami γ umieszczone w próżni pudło o cienkich ściankach (rys.7.1), to przy odpowiednich warunkach możemy zaobserwować zjawisko tworzenia pary elektron-pozyton wewnątrz układu. Utworzone zostały dwie elektrycznie naładowane cząstki, ale całkowity ładunek układu nie uległ zmianie. Współczesne eksperymenty z bardzo dużą

dokładnością pokazują, że wartość bezwzględna ładunku elektronu i pozytonu jest jednakowa.



Rys.7.1. Powstanie pary elektron-pozyton o ładunkach równych co do wielkości i przeciwnych co do znaku.

Brak zachowania ładunku byłby niezgodny ze współczesną teorią elektromagnetyzmu. Prawo zachowania ładunku jest słuszne w dowolnym układzie inercyjnym, a ładunek elektryczny jest wielkością relatywistycznie niezmienniczą.

7.3. Ładunek elektryczny elektronu

Występujące w przyrodzie ładunki są wielokrotnością ładunku elektronu, który oznaczać będziemy przez e . Kwantyzacja ładunku jest powszechnym prawem przyrody. Dotychczasowe pomiary wykazują, że wszystkie naładowane cząstki elementarne mają identyczne co do wartości bezwzględnej ładunki.

W rozważaniach naszych będziemy przyjmowali, że punktowe ładunki mogą przybierać dowolną wartość q . Ładunek punktowy jest idealizacją bliższą rzeczywistości niż wyobrażenia o ciągłym jego rozkładzie. W pewnych przypadkach będziemy posługiwać się ciągłym rozkładem ładunku, będzie to wówczas jednak wynik uśredniania po wielkiej liczbie ładunków elementarnych.

Jednostką ładunku elektrycznego jest kulomb [C], przy czym 1 kulomb jest to ładunek przenoszony przez prąd elektryczny o natężeniu 1 ampera [A] w czasie 1 sekundy [s].

$$[C] = [A] \cdot [s]$$

Ładunek elementarny (ładunek elektryczny elektronu) e wynosi:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

7.4. Prawo Coulomba

W roku 1785 Coulomb na podstawie doświadczeń z wagą skręceń wypowiada prawo dotyczące oddziaływania dwu nieruchomych, punktowych ładunków elektrycznych. Zgodnie z tym prawem:

Dwa nieruchome punktowe ładunki elektryczne odpychają się lub przyciągają z siłą proporcjonalną do iloczynu tych ładunków, a odwrotnie proporcjonalną do ich odległości.

Wyrazimy to przy pomocy równania:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \quad (7.1)$$

gdzie q_1 i q_2 są wielkościami skalarnymi określającymi wielkość i znak ładunków. Wielkość $\vec{F}_{12}$ jest siłą działającą na ładunek, zaś wektor $\vec{r}_{12}$ jest skierowany od ładunku q_2 do q_1 (patrz rys.7.2).



Rys.7.2. Jeżeli wektor $\vec{F}_{12}$ jest siłą jaką działa ładunek q_2 na ładunek q_1 , to wektor $\vec{r}_{12}$ prowadziliśmy od ładunku q_2 do q_1 .

W układzie jednostek SI stałą k można zapisać w postaci:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} = 8.9875 \cdot 10^9 / \epsilon_r \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right] \quad (7.2)$$

gdzie $\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \cdot \text{N}} \right]$ jest przenikalnością elektryczną próżni.

Stała ϵ_r występująca we wzorze (7.2) nosi nazwę względnej przenikalności elektrycznej ośrodka i wyraża się liczbą niemianowaną. W tabeli 7.1 podano względne przenikalności elektryczne ϵ_r kilku substancji.

Tabela 7.1.

Względne przenikalności elektryczne różnych ośrodków.

Ośrodek	Względna przenikalność elektryczna ϵ_r
Próżnia	1
Powietrze	1.0006
Parafina	2.0
Nafta	2.0
Olej transformatorowy	2.2
Benzen	2.3
Chloroform	4.8
Szkło	5÷10
Alkohol	27
Woda	81

Znając ϵ_r i ϵ_0 możemy określić przenikalność elektryczną ϵ każdego ośrodka materialnego:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (7.3)$$

Fakt, że oddziaływanie ładunków zależy od ośrodka, tłumaczy się zjawiskiem polaryzacji elektrycznej ośrodka. Mianowicie, ładunek q_1 wprowadzony do ośrodka zostaje otoczony płaszczem ładunków przeciwnego znaku, które neutralizują częściowo ładunek q_1 . To samo zachodzi dla drugiego ładunku q_2 , w rezultacie czego siła ich oddziaływania ulega zmniejszeniu. W związku z tym względne przenikalności elektryczne ośrodków są zawsze większe od jedności (patrz Tabela 7.1).

7.5. Natężenie pola elektrycznego

Przestrzeń otaczająca ładunki elektryczne posiada taką właściwość, że na umieszczone w dowolnym jej punkcie inne ładunki działa siła. Mówimy, że wokół ładunków elektrycznych istnieje pole elektryczne.

Istnienie pola elektrycznego można wykryć wprowadzając do przestrzeni w której ono działa ładunek próbny q_0 . W polu elektrycznym na ładunek próbny działa siła $\vec{F}$. Umożliwia to wprowadzenie pojęcia: natężenia pola elektrycznego.

Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ definiuje się jako stosunek siły $\vec{F}$, działającej na dodatni ładunek próbny q_0 , do wartości tego ładunku.

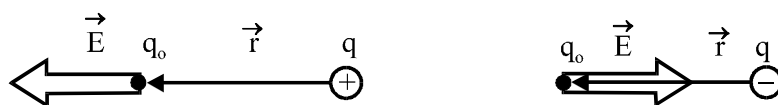
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (7.4)$$

Natężenie pola elektrycznego jest wektorem. W każdym punkcie przestrzeni wektor $\vec{E}$ może mieć inną wartość i inny kierunek. Jednostką natężenia pola w układzie SI, wynikającą ze wzoru (7.4) jest [N/C], jednakże w praktyce przyjęło się używać jednostki równoważnej [V/m].

$$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{J/m}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{m} \cdot \text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Obliczenie natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie przestrzeni jest w zasadzie możliwe zawsze, jeżeli znamy rozkład ładunków wytwarzających to pole. Z prawa Coulomba (7.1) i definicji pola elektrycznego (7.4) możemy wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek punktowy q .

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q \cdot q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.5)$$



Rys.7.3. Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ wytworzonego przez ładunek punktowy q w odległości $\vec{r}$ od ładunku q wytwarzającego to pole.

Jeżeli pole elektryczne jest wytwarzane przez pewną liczbę ładunków punktowych $\{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_N\}$ to wówczas siła $\vec{F}_0$ działająca na ładunek próbny q_0 wynosi:

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j}{r_{oj}^2} \frac{\vec{r}_{oj}}{r_{oj}} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{oj}^2} \frac{\vec{r}_{oj}}{r_{oj}} \quad (7.6)$$

Widać, że siła $\vec{F}_0$ jest proporcjonalna do q_0 . Zatem natężenie pola elektrycznego $\vec{E}(x, y, z)$ wytworzonego przez układ ładunków $\{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_N\}$ o postaci:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{oj}^2} \frac{\vec{r}_{oj}}{r_{oj}} \quad (7.7)$$

jest wektorową sumą natężeń pól pochodzących od każdego z ładunków układu

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_j + \dots + \vec{E}_N \quad (7.8)$$

Widzimy, że natężenie pola elektrycznego $E(x,y,z)$ w danym punkcie ośrodka zależy jedynie od rozkładu przestrzennego ładunków $\{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_N\}$ i właściwości elektrycznych ośrodka (ϵ).

Pojęcie ładunków punktowych uogólnimy teraz na ciągły rozkład ładunku. Objętościowy rozkład ładunku opisujemy za pomocą skalarnej funkcji ρ , którą nazywamy gęstością ładunku

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = f(x, y, z) \quad (7.9)$$

Gęstość $\rho(x,y,z)$ jest funkcją położenia. W układzie SI objętościową gęstość ładunku ρ wyrażamy w $[C/m^3]$. Ładunek dQ zawarty w małym prostopadłościanie o objętości $dV = dx dy dz$ umieszczony w punkcie (x,y,z) jest dany przez:

$$dQ = \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (7.10)$$

W skali atomowej gęstość ładunku zmienia się silnie od punktu do punktu. Pojęciem gęstości będziemy się posługiwać w odniesieniu do układów makroskopowych.

Dla ciągłego rozkładu ładunków natężenie pola elektrycznego $\vec{E}(x, y, z)$, pochodzące od ładunków w innych punktach jest dane przez całkę:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \frac{\rho(x', y', z') \frac{\vec{r}}{r^2} dx' dy' dz'}{r^2} \quad (7.11)$$

Jest to całka objętościowa po objętości V w której występuje ładunek. Przy ustalonym punkcie (x,y,z) , w którym wyznaczamy natężenie pola, całkowanie przebiega po wszystkich punktach (x',y',z') obszaru V w których występują ładunki.

7.6. Linie sił pola elektrycznego

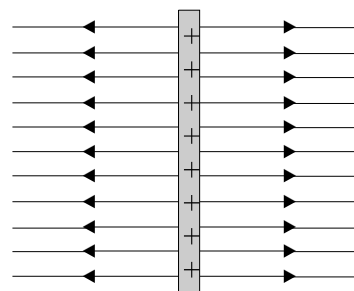
Michael Faraday, nie doceniając przedstawienia pola elektrycznego jako wektora, operował zawsze pojęciem linii sił. Zresztą ciągle jeszcze linie sił są wygodną formą modelowego opisu pola elektrycznego. Będziemy je używać do tego celu, ale nie będziemy ich wykorzystywać do rozważań ilościowych.

Zależność pomiędzy liniami sił a wektorem natężenia pola elektrycznego jest następująca:

1. Styczna do linii sił w dowolnym punkcie pola wyznacza kierunek natężenia pola $\vec{E}$ w tym punkcie.
2. Linie sił wykreśla się tak, aby liczba linii na jednostkę powierzchni przekroju była proporcjonalna do wielkości $\vec{E}$. Gdy linie leżą blisko siebie, $\vec{E}$ jest duże, a gdy są oddalone, $\vec{E}$ jest małe.

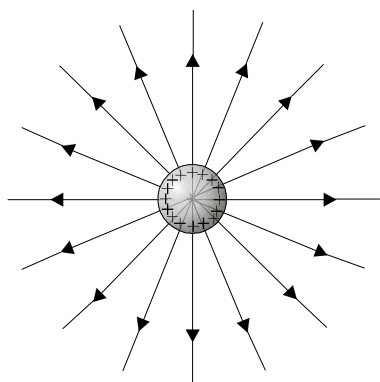
Rysunek 7.4 przedstawia linie sił dla jednorodnej płaszczyzny naładowanej dodatnio. Założenie, że rozpatrujemy płaszczyznę nieskończoną, oznacza, że w przypadku płytki o wymiarach skończonych rozważamy tylko te punkty, których odległość od płytki jest mała w porównaniu z odległością od najbliższego jej brzegu. Dodatni ładunek próbny, umieszczony przed taką płytką, oddalałby się od niej wzdłuż linii prostopadłej do płaszczyzny płytki.

Rys.7.4. Linie sił pola elektrycznego
wytworzonego przez dodatnio naładowaną,
płaską, nieskończenie wielką płytę.



A więc wektor natężenia pola elektrycznego w każdym punkcie blisko płytki musi być do niej prostopadły. Linie sił są rozmieszczone równomiernie, co oznacza, że $\vec{E}$ ma tę samą wartość dla wszystkich punktów przestrzeni leżących blisko powierzchni płytki. Pole takie nazywamy polem jednorodnym.

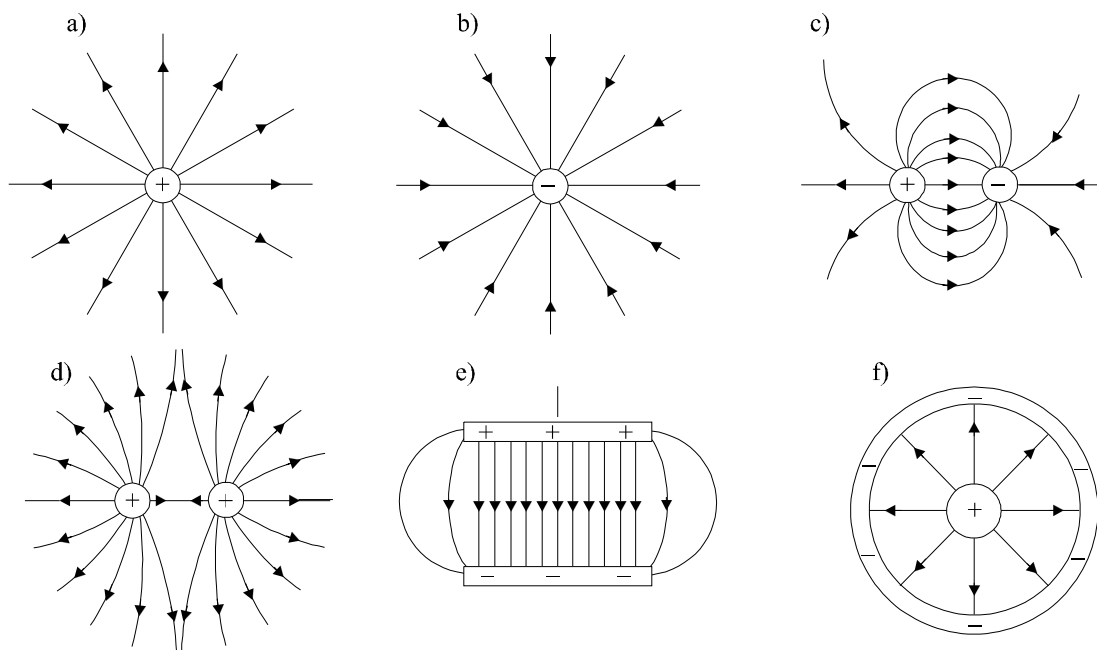
Na rysunku 7.5. widzimy linie sił dla dodatnio naładowanej kuli. Z symetrii zagadnienia wynika, że linie te muszą leżeć wzdłuż promieni. Są one skierowane na zewnątrz kuli, ponieważ próbny ładunek dodatni byłby przyspieszany w tym kierunku. Natężenie pola elektrycznego nie jest stałe, lecz maleje ze wzrostem odległości od kuli. Wynika to w sposób oczywisty z rozmieszczenia linii sił, które na większych odległościach oddalają się od siebie.



Rys.7.5. Linie sił pola elektrycznego
wytworzonego przez dodatnio naładowaną
kulę.

Na rysunku 7.6 pokazano przebieg linii sił różnych pól elektrycznych. Linie pola zaczynają się zawsze na ładunkach dodatnich, a kończą na ładunkach ujemnych. W niektórych

przypadkach linie pola biegną do nieskończoności; uważamy wtedy, że odpowiednie ładunki, na których te linie się kończą, znajdują się nieskończenie daleko.



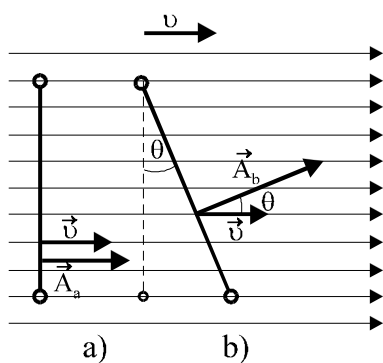
Rys.7.6. Linie sił pola elektrycznego dla typowych rozkładów ładunku: a) punktowy ładunek dodatni, b) punktowy ładunek ujemny, c) dipol elektryczny, d) para ładunków dodatnich, e) kondensator płaski, f) kondensator cylindryczny.

7.7. Strumień pola elektrycznego

Płynąca ciecz (np. woda) w istocie swojej ma mało wspólnego z polem elektrycznym, ale świetnie się nadaje do konstrukcji modeli pola elektrycznego.

Rysunek 7.7. przedstawia jednorodne pole przepływu wody (np. w rzece) charakteryzujące się stałym wektorem przepływu $\vec{v}$, czyli stałą prędkością cieczy w dowolnym punkcie.

Rysunek 7.7a przedstawia płaską płaszczyznę o powierzchni A_a zanurzoną w „polu przepływowym wody” pod kątem prostym do wektora $\vec{v}$.



Rys.7.7. Hipotetyczne powierzchnie A_a i A_b zanurzone w jednorodnym polu przepływu wody scharakteryzowanym przez stały wektor pola $\vec{v}$ oznaczający prędkość dowolnego punktu cieczy. Linie poziome są liniami przepływu w obu przypadkach

Strumień masy wody $\phi_{v,a}$ (w [kg/s]) prze tę powierzchnię (czyli masa wody przepływająca w jednostce czasu przez powierzchnię A_a) wynosi:

$$\phi_{v,a} = \rho \cdot v \cdot A_a \quad (7.12)$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy.

Jeżeli powierzchni A_a przyporządkujemy wektor $\vec{A}_a$ prostopadły do powierzchni i o module równym A_a to (7.12) możemy zapisać:

$$\phi_{v,a} = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{A}_a \quad (7.13)$$

Z (7.13) widać, że strumień pola przez powierzchnię jest wielkością skalarną.

Rysunek 7.7b przedstawia płaską powierzchnię A_b , której rzut ($A_b \cos \theta$) jest równy A_a .

Wydaje się rzeczą jasną, że strumień masy $\phi_{v,b}$ przez powierzchnię A_b musi być taki sam, jak przez powierzchnię A_a . Aby to sobie unaocznić, możemy zapisać:

$$\phi_{v,b} = \phi_{v,a} = \rho v A_a = \rho v (A_b \cos \theta) = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{A}_b \quad (7.14)$$

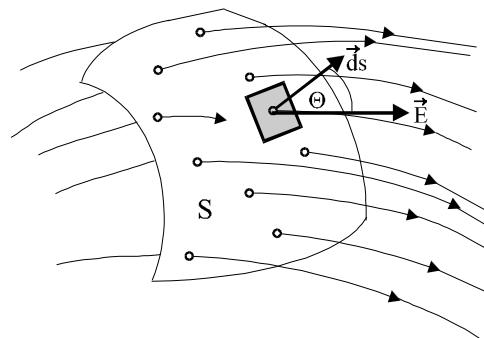
Po tych wstępnych rozważaniach nad ϕ_v zajmiemy się teraz ϕ_E , tzn. strumieniem pola elektrycznego. Może się wydawać, że w tym przypadku nic nie płynie. Jednakże z formalnego punktu widzenia równania (7.13) i (7.14) nie odnoszą się tylko do cieczy, lecz także do dowolnego pola wektorowego $\vec{v}$ (stałego w tym przypadku). Jeżeli na rys.7.7. zamienimy $\vec{v}$ na $\vec{E}$, a linie przepływu wody na linie sił pola elektrycznego – cała dotychczasowa dyskusja tego paragrafu pozostaje w mocy.

Zatem strumieniem elementarnym $d\phi_E$ natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ przez element powierzchni $\vec{ds}$ nazywamy iloczyn skalarny

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \cdot ds \cdot \cos \theta \quad (7.15)$$

gdzie $\vec{ds}$ jest to wektor prostopadły do elementu powierzchni ds , o długości równej polu tego elementu. W układzie SI strumień wyrażamy w [V·m].

Rys.7.8. Definicja strumienia pola elektrycznego



Aby obliczyć strumień Φ_E pola elektrycznego $\vec{E}$ przez dowolną powierzchnię S należy zsumować wszystkie strumienie elementarne $d\Phi_E$ przenikające powierzchnię S . Wobec powyższego, strumień $\Phi_{E,S}$ przez daną powierzchnię S nazywamy całką powierzchniową o postaci:

$$\Phi_{E,S} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (7.16)$$

7.8. Prawo Gaussa-Ostrogradskiego

Prawo Gaussa-Ostrogradskiego, zwane też krótko prawem Gaussa, dotyczy zależności strumienia pola elektrycznego przechodzącego przez dowolną zamkniętą powierzchnię S od ogólnego ładunku znajdującego się wewnątrz obszaru objętego tą powierzchnią. Dowód prawa Gaussa podamy dla powierzchni kulistej o promieniu R (rys.7.9), w środku której znajduje się ładunek $+Q$. Linie sił wychodzą radialnie z tego ładunku i przecinają prostopadle powierzchnię kuli. Natężenie pola E w dowolnym punkcie tej powierzchni zgodnie z wzorem (7.5) równa się:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R^2} \quad (7.17)$$

Strumień pola elektrycznego przez powierzchnię kuli wynosi zatem:

$$\Phi_{E,S} = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 \quad (7.18)$$

czyli

$$\Phi_{E,S} = \frac{Q}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (7.19)$$

We wzorze (7.18) wektory $\vec{E}$ i $\vec{dS}$ są w każdym punkcie na powierzchni kuli równoległe do siebie, a symbol $\oint$ oznacza całkowanie po powierzchni zamkniętej (jaką jest powierzchnia kulista).

Jak widać z wzoru (7.19) całkowity strumień pola elektrycznego nie zależy od promienia kuli, przez którą przechodzi, a zależy jedynie od ładunku Q znajdującego się wewnątrz i od przenikalności elektrycznej ośrodka. Można udowodnić, że wzór Gaussa (7.19) nie zmienia swej postaci przy zastąpieniu kuli dowolną zamkniętą powierzchnią S .

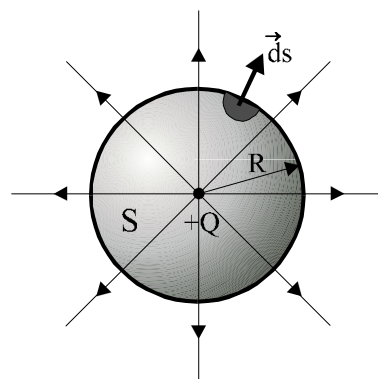
Jeżeli wewnątrz zamkniętej powierzchni S znajduje się N ładunków $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$ (dodatnich i ujemnych), to całkowity strumień elektryczny przechodzący przez tę powierzchnię wynosi:

$$\phi_{E,S} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{i=1}^N Q_i = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot Q \quad (7.20)$$

$$\text{gdzie,} \quad Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$$

Jeżeli powierzchnia zamknięta obejmuje ładunki dodatnie i ujemne w takiej ilości, że ich suma algebraiczna równa się zero, to całkowity strumień elektryczny przez tę powierzchnię równa się zero.

Rys.7.9. Całkowity strumień pola elektrycznego przez powierzchnię kuli S nie zależy od promienia kuli R, a zależy jedynie od ładunku Q znajdującego się w środku kuli



Ostatecznie prawo Gaussa dla pola elektrycznego możemy sformułować następująco:

$$\phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot Q \quad (7.21)$$

Całkowity strumień pola elektrycznego $\phi_{E,S}$ przez dowolną powierzchnię zamkniętą S jest równy algebraicznej sumie Q ładunków zawartych wewnątrz tej powierzchni pomnożony przez czynnik $\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r}$.

Przy opisie pola elektrycznego oprócz natężenia pola $\vec{E}$, posługujemy się drugą wielkością wektorową określającą pole, tzw. indukcją elektryczną $\vec{D}$ (zwaną też niekiedy przesunięciem elektrycznym) zdefiniowaną wzorem:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (7.22)$$

Jak widać ze wzoru (7.22) wektory $\vec{D}$ i $\vec{E}$ w ośrodkach izotropowych (które są przedmiotem naszych rozważań) są do siebie równoległe (nie są równoległe tylko w ośrodkach anizotropowych, ale tymi nie zajmujemy się w naszym kursie fizyki).

Podstawiając (7.22) do (7.21) otrzymujemy prawo Gaussa dla wektora indukcji elektrycznej D w bardzo prostej postaci:

$$\phi_{D,S} = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q \quad (7.23)$$

które mówi, że

Całkowity strumień indukcji elektrycznej $\Phi_{D,S}$ przez dowolną powierzchnię zamkniętą S jest równy algebraicznej sumie Q ładunków zawartych wewnątrz tej powierzchni.

7.9. Napięcie i potencjał

Ze wzoru (7.5) wynika, że na ładunek q_0 znajdujący się w polu elektrycznym działa siła $\vec{F} = q_0 \vec{E}$. Siła ta może wykonać pracę przesuwając ładunek. Elementarna praca wykonywana przez siłę elektryczną przy przesunięciu ładunku na elemencie drogi $d\vec{l}$ wynosi

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (7.24)$$

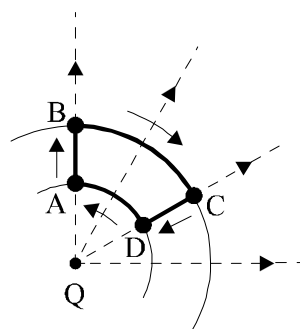
Praca sił pola elektrycznego na drodze między punktami A i B wyrazi się zatem wzorem

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (7.25)$$

Można wykazać, że pole elektrostatyczne, tzn. takie które nie zmienia się w czasie, jest polem potencjalnym, czyli że siły elektryczne są siłami zachowawczymi. Oznacza to, że wartość pracy W_{AB} nie zależy od wyboru drogi między punktami A i B. Z własności sił potencjalnych wiadomo też, że praca takich sił na drodze zamkniętej jest równa zero. Powyższe sprawdzimy dla najprostszego przypadku przesuwania ładunku próbnego q_0 w polu ładunku punkowego Q po drodze ABCDA, zaznaczonej na rysunku 7.10.

Odcinki AB i CD tej drogi leżą na liniach sił pola, odcinki BC i DA – na łukach kół, które w każdym swym punkcie są prostopadłe do linii sił. Praca sił pola na odcinku AB jest równa co do wartości, lecz przeciwna co do znaku względem pracy wykonanej na odcinku CD. Prace na odcinkach BC i AD są równe zero ze względu na prostopadłość kierunków siły i przesunięcie. A zatem całkowita praca na drodze zamkniętej ABCDA jest równa zero.

Rys.7.10. Całkowita praca na drodze zamkniętej ABCDA potrzebna na przesunięcie ładunku q_0 w polu elektrycznym ładunku Q jest równa zero – co oznacza, że pole elektryczne jest polem potencjalnym.



Zdefiniujemy obecnie napięcie elektryczne U_{AB} między punktami A i B, mianowicie

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q_0} \quad (7.26)$$

co słownie można wyrazić następująco:

Napięciem elektrycznym między punktami A i B nazywamy stosunek pracy W_{AB} wykonanej przy przesunięciu ładunku q_0 z punktu A do B do wielkości tego ładunku.

Należy podkreślić, że niezależność pracy od kształtu drogi umożliwia jednoznaczne określenie napięcia między danymi punktami A i B.

Przejdziemy teraz do określenia potencjału:

Potencjałem danego punktu A nazywamy napięcie między punktem A i punktem nieskończenie odległym.

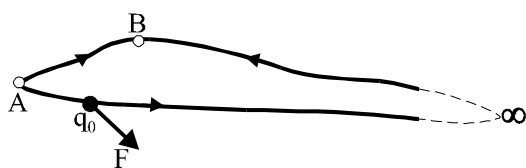
Zatem potencjał V_A jest związany z pracą przesunięcia ładunku q_0 od punktu A do nieskończoności

$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{q_0} \quad (7.27)$$

Aby uzyskać zależność między napięciem a potencjałem rozważmy pracę wykonaną na drodze od punktu A do nieskończoności, a następnie od nieskończoności do B (rys.7.11).

Praca ta wynosi

$$W_{A\infty B} = W_{A\infty} + W_{\infty B} = q_0 U_{A\infty} + q_0 U_{\infty B} = q_0 V_A - q_0 V_B = q_0 (V_A - V_B)$$



Rys.7.11. Praca przesunięcia ładunku q_0 od punktu A do punktu ∞ , a następnie do punktu B jest równa pracy na drodze AB

Z drugiej strony, ponieważ praca nie zależy od wyboru drogi, musi być ona równa pracy na odcinku AB, czyli:

$$W_{AB} = q_0 U_{AB}$$

Z porównania ostatnich dwóch związków wynika, że

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

czyli:

Napięcie między dwoma punktami pola elektrycznego równa się różnicy potencjału tych punktów.

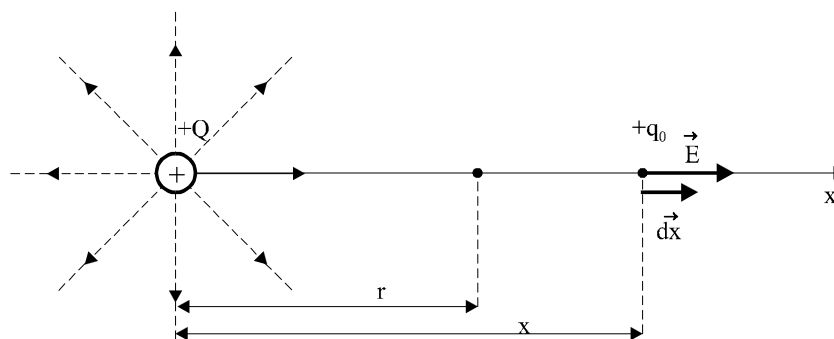
Z wzorów definicyjnych napięcia elektrycznego (7.26) i potencjału (7.27) wynika, że napięcie i potencjał mają wspólną jednostkę.

Jednostka ta:

$$\frac{J}{C} = \frac{A \cdot V \cdot s}{A \cdot s} = V$$

nazywa się woltem [V].

Obliczmy teraz potencjał pola elektrycznego od odosobnionego ładunku punkowego Q w punkcie A odległym od Q o r.



Rys.7.12. Potencjał pola elektrycznego ładunku punkowego wynosi $V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r}$

Praca jaką wykonuje pole elektryczne przesuując ładunek q_0 od A do nieskończoności wynosi

$$W_{A\infty} = \int_r^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{x^2} dx = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_r^{\infty}$$

$$W_{A\infty} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \quad (7.28)$$

Korzystając z wzoru (7.27) obliczamy potencjał pola

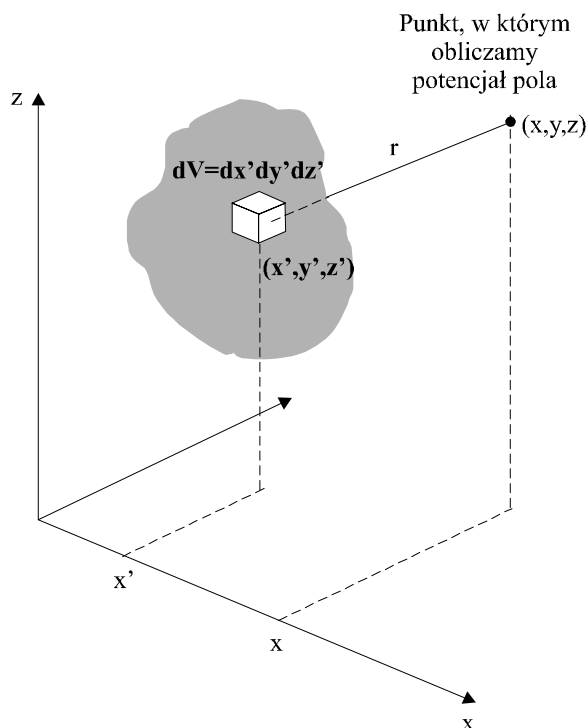
$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \quad (7.29)$$

Ponieważ potencjał pola elektrycznego jest skalarem, potencjał dla układu ładunków jest sumą potencjałów, pochodzących od każdego ładunku z osobna. Wynika to z zasady superpozycji, którą stosuje się również do potencjałów.

Potencjał dowolnego rozkładu ładunków możemy przedstawić jako całkę

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{r} \quad (7.30)$$

gdzie ρ to gęstość objętościowa ładunku zgromadzonego w obszarze V, r oznacza odległość między elementami objętości $dV = dx' dy' dz'$, a punktem (x,y,z), w którym pytamy o potencjał (rys.7.13).



Rys.7.13. Potencjał $V(x,y,z)$ pochodzący od dowolnego rozkładu ładunków.

Potencjał charakteryzuje pole elektryczne w tym samym stopniu co natężenie pola. Graficznie pole można przedstawić za pomocą powierzchni ekwipotencjalnych, które charakteryzują się tym, że w każdym ich punkcie potencjał ma stałą wartość. Można udowodnić, że linie pola muszą być prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych. Na przykład powierzchnie ekwipotencjalne pola ładunku punktowego są, jak widać ze wzoru (7.29), sferami o promieniu r .

Powierzchnia przewodnika, na którym ładunki znajdują się w równowadze, jest zawsze powierzchnią ekwipotencjalną, w przeciwnym bowiem razie siły elektryczne nie byłyby prostopadłe do powierzchni i spowodowałyby ruch ładunków.

Znajomość potencjału w dowolnym punkcie umożliwia obliczenie natężenia tego pola. Ze wzoru (7.24) wynika, że

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (7.31)$$

(znak minus jest związany z tym, że potencjał maleje w kierunku wektora $\vec{E}$). Stąd otrzymujemy:

$$E = -\frac{dV}{dl} \quad (7.32)$$

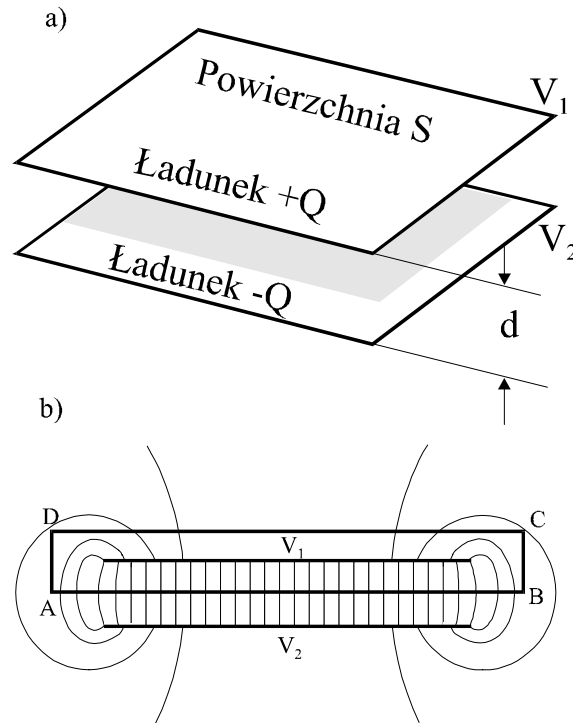
Z wzoru (7.32) widać, że natężenie pola elektrycznego wyrażamy w [V/m].

7.10. Pojemność elektryczna i kondensatory

Kondensatorem nazywamy dwa blisko siebie położone przewodniki o różnych potencjałach i przeciwnych ładunkach. Interesuje nas związek między ładunkiem Q na jednej z płytek a różnicą potencjału między nimi. Okazuje się, że dla ustalonej pary przewodników stosunek ładunku do różnicy potencjałów jest stały. Stałą tę nazywamy pojemnością kondensatora i oznaczamy przez C .

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (7.33)$$

Rozpatrzmy dwie przewodzące płytki o jednakowych rozmiarach ustawione równoległe w odległości d od siebie (rys.7.14). Niech powierzchnia każdej z płytek wynosi S . Niech na jednej płytce znajduje się ładunek Q , a na drugiej $-Q$. Potencjały obu płytek wynoszą odpowiednio V_1 i V_2 .



Rys.7.14. Kondensator płaski

W obszarze między płytkami zgodnie z (7.32) wartość natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest równa

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad (7.34)$$

Przebieg linii pola (rys.7.14b) wskazuje, że pole to jest jednorodne z wyjątkiem obszarów brzegowych. Obliczymy strumień indukcji przez powierzchnię prostopadłościenną (ABCD) (rys.7.14b) zamykającą jedną okładkę. Strumień przez powierzchnię górną CD i boczne AD i BC możemy zaniedbać ponieważ przechodzi tam niewielka liczba linii sił pola. Pozostaje powierzchnia AB, dla której

$$\Phi_{D,S} = DS \quad (7.35)$$

Według prawa Gaussa (patrz 7.23) $\Phi_{D,S} = Q$, zatem

$$D = \frac{Q}{S} \quad (7.36)$$

stąd na mocy (7.22)

$$E = \frac{Q}{\epsilon S} \quad (7.37)$$

Porównując (7.34) z (7.37) otrzymujemy

$$\frac{V_1 - V_2}{d} = \frac{Q}{\epsilon S}$$

Całkowity ładunek Q znajdujący się na jednej z elektrod kondensatora jest równy

$$Q = \epsilon \cdot S \frac{V_1 - V_2}{d} \quad (7.38)$$

Równanie to tym lepiej opisuje realną sytuację, im mniejszy jest stosunek odległości d między płytkami do długości ich boków.

Po podstawieniu (7.38) do (7.33) otrzymujemy wzór na pojemność kondensatora płaskiego

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} \quad (7.39)$$

W jednostkach układu SI ładunek Q we wzorze (7.33) wyraża się w kulombach [C], potencjał zaś w woltach [V]. W układzie tym jednostką pojemności jest farad [F]. Farad jest jednostką bardzo, bardzo dużą. Kondensator jednofaradowy miałby gigantyczne rozmiary. Dlatego też zazwyczaj w praktyce stosuje się jednostki mniejsze: mikrofarady ($\mu F = 10^{-6} F$) i pikofarady ($pF = 10^{-12} F$).