

R o z d z i a ł 5

POLA SIŁOWE I ICH CHARAKTERYSTYKA

5.1. Grupy i rodzaje sił

1. Pojęcie siły oznacza uogólnioną wymianę rzeczywistych wzajemnych oddziaływań między ciałami. Odgrywa ono ważną rolę w mechanice, ponieważ daje możliwość rozwiązywania zadań abstrahując od konkretnej fizycznej istoty wzajemnego działania między ciałami. Wszystkie siły możemy podzielić na następujące grupy: siły uwarunkowane wzajemnym działaniem bezpośrednio stykających się ciał (np. zderzenie, ściskanie, ciągnięcie, tarcie) i siły, które są związane ze szczególną postacią materii, zwanej polem, realizujące wzajemne działanie między ciałami bez ich bezpośredniego zetknięcia się. W mechanice (w tym rozdziale) zapoznamy się z polem grawitacyjnym (polem ciężenia), a w dalszym kursie z polami elektrycznymi i magnetycznymi.

Oddzielną grupę tworzą siły bezwładności działające w nieinercyjnych układach odniesienia (tzn. w układach, w których nie obowiązują zasady dynamiki Newtona).

2. Z punktu widzenia zasady zachowania energii w mechanice siły można podzielić na zachowawcze i rozpraszające. Praca sił zachowawczych zależy tylko od zmiany położenia ciał (lub części układu) względem siebie, ale nie zależy od drogi, wzdłuż której ta zmiana nastąpiła. Praca taka jest związana ze zmianą energii potencjalnej układu. Do sił zachowawczych zaliczamy np. siły ciężenia i siły sprężystości. Praca przeciw siłom rozpraszającym prowadzi do przemiany energii mechanicznej na energię nieuporządkowanego ruchu cieplnego cząsteczek ciał, czyli do rozpraszania energii mechanicznej. Do sił rozpraszających zaliczamy siły przeciwstawiające się ruchowi (np. siły tarcia).

5.2. Podstawowe rodzaje odkształceń sprężystych

W kursie fizyki rozpatruje się tylko niektóre początkowe wiadomości o sprężystych właściwościach ciał sztywnych. Dokładniejszym rozpatrzeniem tych zjawisk zajmuje się kurs wytrzymałości materiałów i teorii sprężystości.

Z kursu szkoły średniej wiemy, że ciała sztywne mają budowę krystaliczną, tzn. że cząsteczki ich są rozłożone w sposób uporządkowany. Każda cząsteczka doznaje działania od wszystkich sąsiednich cząsteczek i swoją równowagę zawdzięcza temu, że wypadkowa tych sił równa się zeru. Odkształcenie ciała sztywnego pod wpływem sił zewnętrznych polega na przemieszczaniu się cząsteczek tego ciała z pierwotnego położenia do położenia równowagi w innym miejscu. Temu przemieszczaniu się przeciwdziałają siły wzajemnego oddziaływania między cząsteczkami. Jeżeli przesunięcie cząsteczek było niezbyt wielkie, to po ustaniu działania siły zewnętrznej, siły wewnętrzne przywracają cząsteczkom położenie pierwotne. Odkształcenie, odpowiadające takiemu „odwracalnemu” przemieszczeniu cząsteczek, nazywamy sprężystym. Jeżeli zaś siła zewnętrzna jest wielka i przesuwa cząsteczki tak znacznie, że siły wewnętrzne, działające między cząsteczkami, nie są zdolne do przywrócenia im położenia pierwotnego po ustaniu działania siły zewnętrznej, to odkształcenie takie nazywamy plastycznym. Przy długotrwałym działaniu nawet niewielkich sił zewnętrznych odkształcenie sprężyste może się stać plastycznym. Tłumaczymy to zmianą struktury sieci krystalicznej ciała stałego pod wpływem długotrwałego obciążenia.

Podzielimy w myśli ciało odkształcone sprężysto na dwie części. Wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do każdej z tych części jest równoważona siłą sprężystości $\vec{F}_{\text{spr.}}$, z jaką poszczególne części ciała działają na siebie. Wielkość fizyczną liczbowo równą sile sprężystości $d\vec{F}_{\text{spr.}}$, przypadającej na jednostkę pola elementarnej powierzchni dS przekroju ciała, nazywamy naprężeniem σ

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_{\text{spr}}}{dS}$$

Naprężenie nazywamy normalnym, jeżeli siła $d\vec{F}_{\text{spr}}$ jest skierowana wzdłuż normalnej do powierzchni dS , a stycznym – gdy siła jest styczna do tej powierzchni.

Wielkość odkształcenia, przy którym zmienia się jakaś wielkość x , charakteryzująca kształt albo rozmiary ciała, określamy podając odkształcenie względne $\Delta x/x$, czyli stosunek odkształcenia bezwzględnego Δx do pierwotnej wartości wielkości x .

Angielski fizyk R.Hooke stwierdził na drodze doświadczalnej, że naprężenie ciała sprężyste odkształconego jest proporcjonalne do względnego odkształcenia tego ciała (prawo Hooke'a).

$$\sigma = K_x \frac{\Delta x}{x} \quad (5.1)$$

gdzie K_x – moduł sprężystości. Wielkość tego modułu zależy od właściwości materiału, z którego wykonane jest ciało. Moduł sprężystości ma różne nazwy, oznaczenia i wartości liczbowe zależnie od rodzaju odkształcenia ciała. Wielkość $a_x = 1/K_x$ nazywamy współczynnikiem sprężystości. Prawo Hooke'a jest słuszne tylko dla dostatecznie małych odkształceń względnych. Każde złożone odkształcenie ciała sztywnego można przedstawić jako wynik nałożenia się odkształceń prostszych. Podstawowe rodzaje odkształceń to jednokierunkowe rozciąganie (lub ściskanie), rozciąganie (lub) ściskanie we wszystkich kierunkach i skręcanie.

Odształcenie rozciągania ilustruje rys.5.1.

Przy rozciąganiu podłużnym (rys.5.1) proces odkształcenia ustaje, gdy siły sprężyste zrównają się z siłą F rozciągającą. W tym przypadku moduł sprężystości K_x nazywamy modułem Younga E . Po podstawieniu do wzoru (5.1)

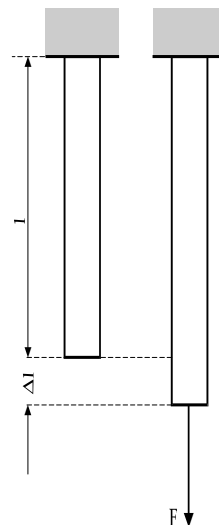
$$\text{za } \sigma = \frac{F}{S} \text{ i } \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \text{otrzymamy } \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l},$$

skąd

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} \quad (5.2)$$

gdzie l – początkowa długość badanej próbki (pręta), Δl – zmiana długości przy obciążeniu siłą F , S – pole przekroju poprzecznego.

Ze wzoru (5.2) wynika, że gdy $\Delta l = l$, to wtedy moduł Younga $E = F/S = \sigma$. Inaczej mówiąc, moduł Younga równa się naprężeniu, jakie wystąpiłyby w badanej próbce przy zwiększeniu dwukrotnym jej długości, gdyby dla tak wielkiego odkształcenia spełniło się jeszcze prawo Hooke'a. Wzór (5.2) stosuje się też w przypadku zmniejszenia długości badanej próbki podczas jej ściskania podłużnego.



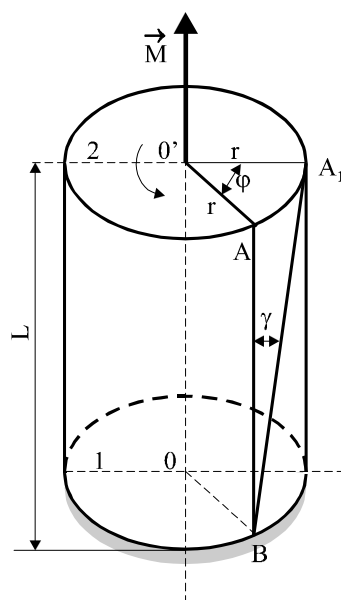
Rys.5.1. Rozciąganie podłużne pręta.

Odkształcenie ściskania (lub rozciągania) **we wszystkich kierunkach** występuje przy równomiernym rozmieszczeniu sił ściskających (lub rozciągających) na całej powierzchni ciała. Zgodnie z prawem Hooke’a względne zmniejszenie się (albo powiększenie się) objętości $\Delta V/V$ próbki izotropowej (tzn. próbki, która ma jednakowe właściwości we wszystkich kierunkach) jest proporcjonalne do powstającego w ciele naprężenia

$$\sigma = K \frac{\Delta V}{V} \quad (5.3)$$

gdzie K – moduł sprężystości objętościowej, zwany modułem ścisłości. Możemy wykazać, że względne zmniejszenie lub powiększenie objętości ciała izotropowego $\Delta V/V$ w przybliżeniu jest trzykrotnie większe od względnego zmniejszenia (powiększenia) jego rozmiarów liniowych. Sprężystość objętościową wykazują nie tylko ciała sztywne, ale także ciecze i gazy.

Odkształcenie skręcania występuje w próbce (w drucie, w pręcie itp.), gdy jeden koniec próbki jest zamocowany nieruchomo, a na drugi działają dwie siły styczne, równe co do wielkości, lecz przeciwnie skierowane.



Rys.5.2. Skręcanie zamocowanego pręta

Moment $\vec{M}$ tych sił względem środka $0'$ przekroju skierowany jest wzdłuż osi próbki (rys.5.2). Wskutek działania momentu skręcającego $\vec{M}$ wszystkie przekroje poprzeczne pręta przedstawionego na rys. 5.2 obróć się dookoła osi $00'$ o kąty tym większe, im rozpatrywane przekroje są dalej od przekroju 1 zamocowanego nieruchomo. Kąt obrotu ϕ przekroju 2 nazywamy kątem skręcenia. W wyniku odkształcenia skręcenia występuje skrzywienie o kąt γ tworzących powierzchni walcowej pręta (rys.5.2), przy czym $r\phi = \gamma L$. Dlatego obliczenie odkształcenia skręcenia można sprowadzić do obliczenia odkształcenia postaciowego.

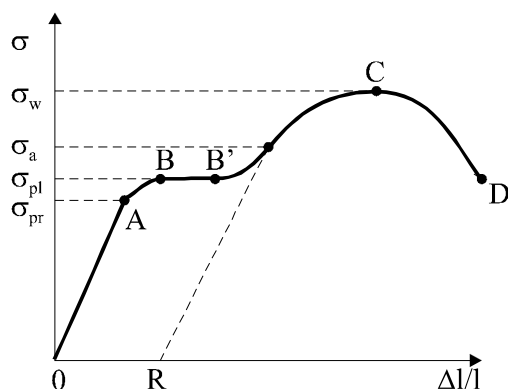
Wyrażenie ostateczne na moment M skręcający o kąt ϕ pręt jednorodny o przekroju kołowym o długości L i promieniu r ma postać:

$$M = \frac{\pi G}{2} \frac{r^4}{L} \phi \quad (5.4)$$

gdzie G – moduł sztywności materiału pręta.

Odształcenie skręcenia często wykorzystujemy w doświadczeniach fizycznych i w przyrządach pomiarowych, np. w wadze skręceń, w galwanometrze zwierciadłowym itd.

Rozpatrzmy wyniki badań dowolnej próbki jednorodnej poddanej rozciąganiu, przedstawione w postaci wykresu rozciągania. Wykres ten wykazuje zależność normalnego



Rys.5.3. Wykres rozciągania pręta

naprężenia σ od względnego odkształcenia $\Delta l/l$ (rys.5.3). Przy niewielkich względnych odkształceniach σ jest proporcjonalne do $\Delta l/l$ zgodnie z prawem Hooke'a. Największe naprężenie σ_{pr} , do którego stosuje się jeszcze prawo Hooke'a, nazywamy granicą proporcjonalności (na rys.5.3. odpowiada tej granicy punkt A).

Dalsze zwiększenie σ powoduje znaczny wzrost względnego wydłużenia. Po osiągnięciu naprężenia σ_{pl} zwanego granicą plastyczności (punkt B) względne odkształcenie próbki dalej wzrasta bez dalszego zwiększania obciążenia (poziomy odcinek BB'). W przypadku, gdy odcinek poziomy wykresu nie występuje, jako granicę plastyczności przyjmujemy naprężenie, przy którym wartość $\Delta l/l$ różni się od liniowej zależności 0A o 0.002. W punkcie B' zaczyna się dalszy wzrost naprężenia wraz ze wzrostem odkształcenia. Największe naprężenie σ_w , odpowiadające punktowi C, nazywamy granicą wytrzymałości. W punkcie D próbka rozrywa się.

Jeżeli próbkę odkształconą do naprężenia $\sigma_a > \sigma_{pl}$ będziemy stopniowo coraz mniej obciążać, to odpowiadający temu wykres $\sigma = f(\Delta l/l)$ będzie przebiegał równoległe do części 0A i przetnie oś odciętych w jakimś punkcie R. Odcinek 0R określa trwałe odkształcenie próbki.

5.3. Energia potencjalna ciała sprężysto odkształconego

Wyznamy energię potencjalną ciała sprężysto odkształconego, np. ściśniętego lub rozciągniętego drutu. Według prawa Hooke'a przy odkształcaniu drutu od zera do Δl naprężenie w nim rośnie od 0 do σ , a siła wewnętrzna przeciwdziałania drutu – siła sprężystości – od 0 do F. Praca wykonana przy odkształceniu równa się iloczynowi wartości średniej siły (F/2) przez wielkość odkształcenia (Δl). A zatem energia potencjalna drutu sprężysto odkształconego równa się

$$E_p = L = \frac{1}{2} F \Delta l \quad (5.5)$$

Podstawmy do tego wzoru wartość Δl z równania (5.2), otrzymamy

$$E_p = L = \frac{1}{2E} \frac{F^2 l}{S} \quad (5.6)$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną w jednostce objętości ciała, podzielimy obie strony ostatniego równania przez objętość ciała $V = lS$

$$e_p = \frac{E_p}{V} = \frac{1}{2E} \frac{F^2}{S^2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (5.7)$$

Wielkość e_p nazywamy gęstością objętościową energii potencjalnej.

Ze wzoru (5.7) widzimy, że gęstość objętościowa energii odkształcenia sprężystego jest wprost proporcjonalna do kwadratu naprężenia i odwrotnie proporcjonalna do modułu sprężystości. Dla innych odkształceń możemy otrzymać podobne wzory; oczywiście są one słuszne tylko w granicach stosowności prawa Hooke'a. Jeżeli odkształcając ciało przekroczymy granicę sprężystości, to przy zmniejszaniu naprężenia do zera, jak już widzieliśmy, tylko częściowo usuniemy odkształcenie (tak zwane odkształcenie sprężyste). Odpowiednio do tego odzyskujemy tylko część pracy zużytej na odkształcenie ciała.

5.4. Tarcie

Każde ciało będące w ruchu napotyka opór, jaki mu stawia ośrodek otaczający oraz inne ciała będące z nim w zetknięciu w czasie ruchu. Inaczej mówiąc, na dowolne ciało będące w ruchu działają siły tarcia. Istota tych sił może być różna, lecz zawsze w wyniku ich działania występuje przemiana energii mechanicznej w energię wewnętrzną trących się ciał, czyli energię ruchu cieplnego ich cząsteczek.

Od razu na wstępie musimy stwierdzić, że zjawisko występowania sił tarcia, zwane krótko tarcie, aczkolwiek bardzo pospolite, jest zjawiskiem dotychczas nie w pełni zbadanym. Podamy niżej kilka stwierdzonych doświadczalnie prawidłowości dotyczących tarcia przy przesuwaniu ciał, zwanego poślizgowym, i tarcia przy toczeniu, zwanego tocznym.

Doświadczenia wykazują, że siła tarcia T występująca przy poślizgu ciała stałego po ciele stałym jest z nielicznymi wyjątkami proporcjonalna do siły F_n , przyciskającej ciało do podłoża. Siłę F_n nazywamy czasem naciskiem. Powyższe możemy zapisać

$$T = \mu F_n \quad (5.8)$$

gdzie μ oznacza współczynnik tarcia poślizgowego, zwanego też krótko współczynnikiem tarcia. Jest to liczba bezwymiarowa, wskazująca jaką część siły nacisku stanowi siła tarcia.

Drugą prawidłowością stwierdzoną doświadczalnie w odniesieniu do siły tarcia poślizgowego jest niezależność od pola powierzchni zetknięcia poruszającego się ciała i podłoża. Wartość współczynnika tarcia zależy w sposób zasadniczy od rodzaju stykających się powierzchni. Tak np. w przypadku powierzchni metalicznych istotną rolę odgrywa sposób obróbki, stopień zanieczyszczenia powierzchni i charakter zanieczyszczeń. Jako pewną ciekawostkę podamy, że współczynnik tarcia charakteryzujący dwie metaliczne płytki, stosunkowo duży przy znacznej „chropowatości” powierzchni, maleje przy ich wygładzaniu, ale tylko do pewnej granicy. Po bardzo dokładnym wygładzeniu powierzchni siła tarcia staje się bardzo duża: efekt jest taki, jak gdyby płytki zlepiały się ze sobą.

Jak już wspominaliśmy, istnieją odstępstwa od omówionych wyżej praw tarcia. Tak np. przy ruchu gumy po gumie siła tarcia maleje ze wzrostem siły F_n przyciskającej do podłoża.

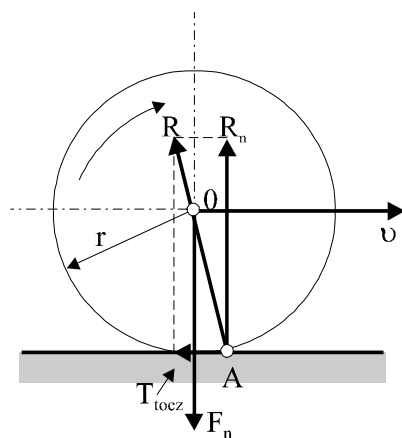
Wśród praw doświadczalnych charakteryzujących tarcie czasem wymienia się prawo niezależności siły tarcia od prędkości ruchu względnego przesuwanych ciał. Trzeba jednak pamiętać, że to prawo jest spełnione tylko w ograniczonych zakresach zmian prędkości. Prędkościom znacznie się różniącym odpowiadają różne wartości współczynników tarcia (przy pozostałych warunkach nie zmienionych). Różnice wiążą się ze zmianą mechanizmu tarcia. Tak np. przy dużych prędkościach wchodzi w grę silne efekty temperaturowe, mające wpływ na właściwości powierzchni ciał, powodujące nawet czasem topienie na powierzchni i zmniejszające wielokrotnie współczynnik tarcia.

Mówiąc o tarcu należy rozróżniać siłę tarcia kinetycznego, występującego podczas ruchu ciała, i siłę tarcia statycznego, występującego na początku ruchu, tzn. przy przejściu ze stanu spoczynku do stanu ruchu. Siła tarcia statycznego jest również proporcjonalna do siły nacisku F_n , lecz współczynnik proporcjonalności μ_0 , zwany współczynnikiem tarcia statycznego, jest zwykle o 10-20 % większy od współczynnika tarcia kinetycznego μ .

Przejdźmy obecnie do tarcia tocznego. Łatwo można się przekonać, że tarcie występujące przy toczeniu się ciał jest mniejsze od tarcia poślizgowego, ale zawsze istnieje. Może warto też podkreślić, że na idealnie gładkiej powierzchni toczenie się w ogóle nie wystąpi. Na takiej powierzchni może odbywać się wyłącznie poślizg. Najczęściej w praktyce występują łącznie toczenie się i poślizg.

Tarcie występujące przy toczeniu jednego ciała po drugim zależy w dużym stopniu od właściwości sprężystych toczącego się obiektu i podłoża.

Przyczyna powstawania tarcia przy toczeniu jest następująca. Przy toczeniu walca kołowego lub kuli o promieniu r po powierzchni płaskiej powstają odkształcenia. Dlatego punkt A



Rys.5.4. Siły działające na walec przy toczeniu.

(rys.5.4) przyłożenia siły R przeciwdziałania powierzchni sile nacisku F_n przesunęła się nieco w przód, a linia działania tej siły odchyliła się od pionu w tył. Składowa normalna tej siły $R_n = -F_n$, a składowa styczna T_{tocz} jest właśnie siłą tarcia przy toczeniu.

Dla sił tarcia przy toczeniu stosuje się w pierwszym przybliżeniu wzór

$$T_{\text{tocz}} = \mu_t \cdot \frac{F_n}{r} \quad (5.9)$$

gdzie r promień toczącego się ciała (walca lub kuli), a μ_t – to współczynnik tarcia przy toczeniu (mierzony w jednostkach długości – w układzie SI w [m]).

5.5. Prawo powszechnego ciążenia. Masa grawitacyjna i masa bezwładna

Prawidłowości ruchu planet i ich satelitów, spadanie ciał na ziemię, ruch pocisków artyleryjskich i wahadeł świadczą o istnieniu wzajemnego przyciągania się ciał.

Dla ciał, których rozmiary są bardzo małe w stosunku do ich wzajemnej odległości, siła ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu tej odległości. Okazuje się też, że różne ciała znajdujące się w tej samej odległości oddziałują na siebie różnymi siłami. Aby to opisać ilościowo, każdemu ciału przypisujemy masę grawitacyjną m' . Siła grawitacji jest proporcjonalna do iloczynu tych mas. Możemy więc zapisać

$$F \sim \frac{m'_1 m'_2}{r^2} \quad (5.10)$$

Masa grawitacyjna charakteryzuje zdolność ciała do oddziaływania grawitacyjnego z innym ciałem. Poprzednio wprowadziliśmy pojęcie masy bezwładnej. Na podstawie licznych doświadczeń stwierdzono, że masa grawitacyjna jest zawsze proporcjonalna do masy bezwładnej. Jeśli tak, to wybierając jako jednostkę masy grawitacyjnej masę takiego ciała,

którego masa bezwładna jest równa 1 kg, możemy zapisać, że $m = m'$. Zamiast mówić dalej o „masie grawitacyjnej” i „masie bezwładnej”, będziemy mówić „masa ciała”.

Na podstawie wzoru (5.10) siłę grawitacji możemy zapisać w postaci

$$F = k_g \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (5.11)$$

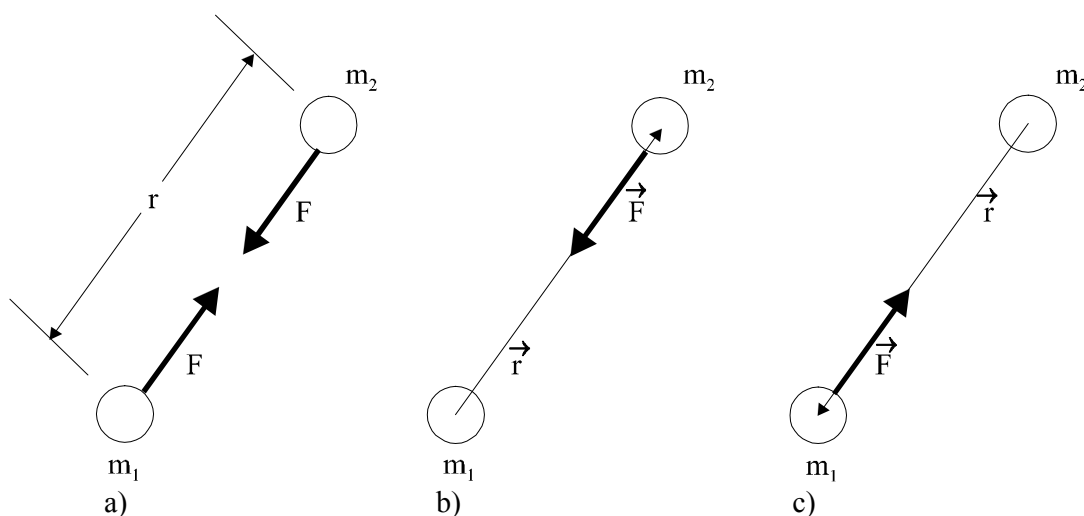
gdzie k_g jest współczynnikiem proporcjonalności zwanym dalej stałą grawitacji. Stała k_g jest liczbowo równa sile, z jaką przyciągają się dwa punkty materialne o masie 1 kg każdy z odległości 1 m, a jej wartość wynosi

$$k_g = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Pierwszego pomiaru stałej grawitacji k_g dokonał Cavendish w 1798 r.

Stała grawitacji jest bardzo mała, co wynika z faktu, że siły grawitacji są bardzo małe. Są to najslabsze ze wszystkich znanych nam typów oddziaływań. Siły te są siłami centralnymi (tzn. leżą na prostej łączącej oddziałujące ciała) i są zawsze siłami przyciągania.

Rysunek 5.5. jest ilustracją graficzną omawianego prawa.



Rys.5.5. Prawo powszechnego ciążenia. Na rys. 5.5a dwie masy punktowe przyciągają się z siłą proporcjonalną do ich iloczynu i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. Na rys.5.5b przedstawiono siłę, jaką masa m_1 działa na masę m_2 , natomiast na rys.5.5c siłę jaką masa m_2 działa na masę m_1 .

Należy zaznaczyć, że wzór (5.11) opisuje oddziaływanie między masami punktowymi. Jeśli masy nie są punktowe, to siła grawitacji zależy od rozkładu oddziałujących mas.

Prawo powszechnego ciążenia sformułował Izaak Newton w 1687 r.

5.6. Pole grawitacyjne, natężenie pola grawitacyjnego

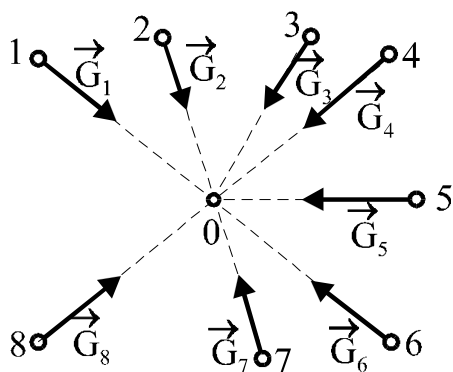
Prawo powszechnego ciążenia, ustalając zależność siły ciążenia od mas ciał działających wzajemnie na siebie i odległości między nimi, nie daje odpowiedzi na pytanie, jaki jest mechanizm tego wzajemnego działania. Ciężenie w odróżnieniu od takich zjawisk mechanicznych, jak zderzenie i tarcie, należy do oddzielnej grupy wzajemnych oddziaływań. Pojawia się ono między ciałami oddalonymi od siebie, przy czym siły ciążenia nie zależą od tego, w jakim ośrodku znajdują się te ciała (w powietrzu, w wodzie itp.). Wzajemne przyciąganie występuje i wtedy, gdy działające na siebie ciała znajdują się w próżni.

Grawitacyjne wzajemne oddziaływanie ciał odbywa się za pośrednictwem pola grawitacyjnego (pola ciążenia), a pole grawitacyjne pochodzi od ciał; jest jednym z rodzajów materii, jak inne pola fizyczne (np. pole elektromagnetyczne), które poznamy w następnych częściach kursu. Zasadnicza właściwość pola grawitacyjnego, która je odróżnia od innych pól fizycznych polega na tym, że na każdy punkt materialny o masie m wprowadzony do tego pola działa siła ciążenia $\vec{F}$ proporcjonalna do m

$$\vec{F} = m\vec{G} \quad (5.12)$$

Wektor $\vec{G}$, występujący w tym wzorze, nie zależy od m i nazywa się natężeniem pola grawitacyjnego (pola ciążenia). Liczbowo wektor $\vec{G}$ równa się sile, z którą pole grawitacyjne działa na punkt materialny o masie jednostkowej i jest skierowany zgodnie z siłą. Wektor natężenia jest charakterystyką siłową pola grawitacyjnego i w ogólnym przypadku zmienia się przy przejściu z jednego punktu pola do drugiego.

Jeżeli punkt materialny porusza się tylko pod działaniem sił pola grawitacyjnego to, jak widzimy zestawiając wzór (5.12) z zasadą Newtona, przyspieszenie tego punktu materialnego w każdym punkcie pola przystaje do wektora $\vec{G}$. Pole grawitacyjne nazywamy



Rys.5.6. Pole grawitacyjne jest polem centralnym

polem centralnym ponieważ we wszystkich jego punktach wektory natężeń są skierowane wzdłuż prostych, przecinających się w jednym punkcie 0, nieruchomym względem dowolnego inercyjnego układu odniesienia (rys.5.6). Jeżeli początek układu współrzędnych umieścimy w punkcie 0, a położenie punktów pola (x,y,z) określimy za pomocą promienia wodzącego $\vec{r}$ poprowadzonego z

punktu 0, to dla centralnego pola ciążenia, wektor natężenia pola grawitacyjnego możemy zapisać

$$\vec{G} = \frac{G_r}{r} \vec{r} \quad (5.13)$$

gdzie $G_r = G_r(x, y, z)$ jest rzutem wektora $\vec{G}$ na kierunek promienia wodzącego $\vec{r}$, a $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Punkt 0 nazywamy środkiem sił.

Pole centralne nazywamy kulisto-symetrycznym, jeżeli liczbowa wartość wektora natężenia zależy tylko od odległości r od środka sił 0.

5.7. Ciężar ciała. Przyspieszenie ziemskie.

Siłę, jaką ciało materialne jest przyciągane przez Ziemię, nazywamy ciężarem ciała. Ponieważ Ziemia ma kształt w przybliżeniu kulisty, więc dla określenia ciężaru ciała możemy zastosować wzór (5.11). Oznaczając masę ciała przez m , masę Ziemi przez M , a promień Ziemi przez R , możemy napisać

$$F = k_g \frac{Mm}{R^2} \quad (5.14)$$

Przez ciężar ciała rozumiemy siłę z jaką Ziemia przyciąga dane ciało. Siła ta nadaje swobodnie spadającemu ciału przyspieszenie g zwane przyspieszeniem ziemskim

$$F = mg \quad (5.15)$$

Porównując powyższe (5.14) i (5.15) wzory, znajdujemy

$$g = k_g \frac{M}{R^2} \quad (5.16)$$

Przyspieszenie ziemskie g jest wyrażone za pomocą masy i promienia Ziemi. Z porównania wzorów (5.16) i (5.12) wynika, że natężenie pola grawitacyjnego Ziemi G na jej powierzchni jest równoważne przyspieszeniu ziemskiemu g ($G = g$). Na podstawie wzoru (5.16) możemy obliczyć masę Ziemi. Podstawiając $R \approx 6400 \text{ km}$ i $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$, otrzymujemy

$$M = \frac{R^2 g}{k_g} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Wartość przyspieszenia ziemskiego nie jest stała, ale zależy od położenia punktu na powierzchni Ziemi. Przyczynami tego zjawiska są: a) spłaszczenie kuli ziemskiej, b) ruch obrotowy Ziemi, c) niejednorodność budowy Ziemi. Jak wiadomo, Ziemia ma kształt

zblizony do elipsoidy obrotowej, spłaszczonej od strony biegunów geograficznych, wskutek tego wartość g zależy od szerokości geograficznej i jest największa na biegunach, a najmniejsza na równiku. Ruch obrotowy Ziemi powoduje powstanie siły odśrodkowej, która zmniejsza ciężar każdego ciała znajdującego się na Ziemi. Siła odśrodkowa jest prostopadła do osi ziemskiej, a więc jej kierunek względem pionu zależy od szerokości geograficznej. Zmniejszenie ciężaru ciał jest największe na równiku, w miarę zaś zbliżania się do bieguna zmniejszenie to maleje do zera. Wartość g zmienia się wskutek działania tych dwóch czynników od wartości ok. 9.78 m/s^2 na równiku do wartości ok. 9.83 m/s^2 na biegunie. Niejednorodność budowy Ziemi, jak również ukształtowanie powierzchni Ziemi powodują niewielkie lokalne wahania wartości g .

5.8. Energia potencjalna i potencjał pola grawitacyjnego

Siła grawitacji jest siłą zachowawczą, możemy wobec tego obliczyć energię potencjalną położenia masy próbnej. W tym celu należy obliczyć pracę W_{PO} siły grawitacji wykonaną przy przesunięciu masy próbnej m od danego punktu pola P do punktu odniesienia O . Energia potencjalna tej masy w punkcie P równa się pracy W_{PO} .

$$E_p = W_{PO} \quad (5.17)$$

Przy obliczaniu energii potencjalnej grawitacji ciał znajdujących się w pobliżu Ziemi przyjmuje się na ogół za poziom odniesienia powierzchnię Ziemi. W rozważaniach ogólnych punkt odniesienia O umieszcza się w nieskończoności.

Niech punkt P znajduje się w odległości r_0 od masy M wytwarzającej pole grawitacyjne (rys.5.7). Praca wykonana przez pole grawitacyjne przy przesunięciu masy próbnej m z punktu P do nieskończoności wynosi

$$W_{PO} = - \int_{r_0}^{\infty} F dr \quad (5.18)$$

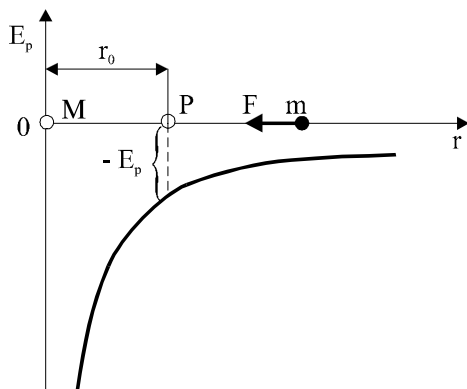
Znak minus stawiamy dlatego, że siła $\vec{F}$ tworzy kąt 180° z kierunkiem przesunięcia. Podstawiając za F prawą stronę wzoru (5.11.) znajdujemy

$$W_{PO} = - \int_{r_0}^{\infty} k_g \frac{Mm}{r^2} dr = -k_g Mm \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -k_g Mm \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_0}^{\infty} = -k_g \frac{Mm}{r_0}$$

Zatem grawitacyjna energia potencjalna masy próbnej m w dowolnej odległości $\vec{r}$ od masy M wynosi

$$E_p(r) = -k_g \frac{Mm}{r} \quad (5.19)$$

Energia potencjalna masy próbnej m jest więc ujemna i w miarę oddalania się od masy M rośnie, osiągając wartość zero w nieskończoności.



Rys.5.7. Wykres energii potencjalnej masy m znajdującej się w polu grawitacyjnym masy M

Potencjałem pola grawitacyjnego nazywamy stosunek energii potencjalnej masy próbnej m do wartości tej masy, a więc

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{k_g M}{r} \quad (5.20)$$

Potencjał określa zatem energię potencjalną w odległości r od środka masy M przypadającą na jednostkę masy i wyraża się w [J/kg].

Obliczmy różnicę energii potencjalnej ciała o masie m znajdującego się na powierzchni Ziemi, a następnie na wysokości h nad Ziemią

$$E_p(R+h) - E_p(R) = -k_g \frac{Mm}{R+h} - \left(-k_g \frac{Mm}{R} \right) = k_g \frac{Mm}{R(R+h)} h \quad (5.21)$$

Jeżeli przyjmiemy, że $h \ll R$, to wówczas

$$E_p(R+h) - E_p(R) = m \cdot k_g \frac{M}{R^2} \cdot h$$

ale wiemy z (5.16), że

$$k_g \frac{M}{R^2} = g$$

Zatem

$$U = E_p(R + h) - E_p(R) = mgh \quad (5.22)$$

Przyjmując, że na powierzchni Ziemi $E_p(R)=0$, wówczas

$$U = mgh \quad (5.23)$$

Należy jednak pamiętać, że wyrażenie (5.23) jest stanem przy założeniu, że $h \ll R$, co oznacza, że na wysokości h przyspieszenie ziemskie g jest takie samo jak na powierzchni Ziemi.

5.9. Zasada zachowania energii

Poprzednio mówiliśmy o różnych rodzajach energii punktu materialnego: energii kinetycznej ruchu postępowego, potencjalnej energii grawitacyjnej, potencjalnej energii sprężystości i o energii kinetycznej ruchu obrotowego. Obecnie zajmiemy się zagadnieniem energii układu punktów materialnych i brył sztywnych. W tym celu wprowadzimy pojęcie układu odosobnionego, tj. układu na który nie działają żadne siły zewnętrzne; w układzie odosobnionym działają więc tylko siły wewnętrzne. Jeżeli z kolei założymy, że siły te są zachowawcze, to takie układy będziemy nazywać układami zachowawczymi.

Z każdą siłą zachowawczą związany jest określony rodzaj energii potencjalnej, przy czym energia potencjalna ciała w punkcie A względem punktu 0, obranego za punkt odniesienia, jest równa pracy siły zachowawczej wykonanej przy przesunięciu ciała od punktu A do punktu 0, co możemy zapisać równaniem

$$E_p(A) = W_{A0}$$

Jeżeli ciało o masie m ulega przesunięciu z punktu A do punktu B, to różnica energii potencjalnej w tych punktach względem punktu 0 wyniesie

$$E_p(B) - E_p(A) = W_{B0} - W_{A0} = W_{BA} \quad (5.24)$$

Z określenia energii kinetycznej wynika, że jeżeli na ciało o masie m działa siła wykonująca pracę i przemieszczającą to ciało od punktu A do punktu B, to zmiana energii kinetycznej ciała wyniesie

$$E_k(B) - E_k(A) = W_{AB} \quad (5.25)$$

Dodając stronami równania (5.24) i (5.25), otrzymujemy

$$E_k(B) + E_p(B) - E_k(A) - E_p(A) = W_{BA} + W_{AB} = W_{BAB}$$

Wyrażenie po prawej stronie powyższego równania jest pracą po zamkniętym torze BAB, która dla siły zachowawczej jest równa zeru. Mamy więc

$$E_k(B) + E_p(B) - E_k(A) - E_p(A) = 0$$

czyli

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A) \quad (5.26)$$

Sumę energii kinetycznej i potencjalnej ciała nazywamy energią mechaniczną. Ze wzoru (2.26) wynika, że energia mechaniczna ciała w punkcie A jest równa jego energii mechanicznej w punkcie B.

Rozważania, które przeprowadziliśmy dla jednego ciała, można uogólnić na układ odosobniony i zachowawczy, składający się z dowolnej liczby ciał. Energia kinetyczna takiego układu jest sumą energii kinetycznych poszczególnych ciał, a jego energia potencjalna sumą energii potencjalnych tych ciał.

Posługując się określonymi powyżej pojęciami możemy sformułować zasadę zachowania energii mechanicznej. Brzmi ona:

Energia mechaniczna układu odosobnionego i zachowawczego jest stała.

Twierdzenie to możemy zapisać krótko w postaci.

$$E_k + E_p = \text{const} \quad (5.27)$$

Pod symbolem E_k należy rozumieć sumę energii kinetycznych ruchu postępowego i obrotowego, a pod symbolem E_p – sumę wszystkich rodzajów energii potencjalnej. Jeżeli układ przechodzi ze stanu początkowego o energii E_I do stanu końcowego i energii E_{II} , to

$$E_I = E_{II} \quad (5.28)$$

W przypadku układów niezachowawczych, możemy stwierdzić, że energia mechaniczna tych układów nie może być stała. Weźmy na przykład kulkę metalową i rzućmy ją z pewnej wysokości do zbiornika z gęstą smołą. Kulka w smole zmniejsza swą prędkość i po pewnym czasie zatrzymuje się w niej. Co się stało z energią kulki?

Na powyższe pytanie można odpowiedzieć z dwóch punktów widzenia: makroskopowego i mikroskopowego.

Z punktu widzenia makroskopowego na kulkę działa ze strony smoły siła tarcia lepkiego, która jest siłą niezachowawczą, zatem zasada zachowania energii mechanicznej tu nie obowiązuje. Mówimy, że energia mechaniczna kulki zmieniła się w wyniku wydzielienia ciepła w przyrost energii wewnętrznej smoły. Przekonać nas może o tym dokładny pomiar temperatury smoły, która musiała nieznacznie wzrosnąć.

Z mikroskopowego punktu widzenia hamowanie kulki w smole zachodzi wskutek zderzenia się z nią pozostających w chaotycznym ruchu cieplnym cząsteczek smoły. Siły oddziaływania

między kulką a cząsteczkami smoły są siłami zachowawczymi, toteż w odniesieniu do układu złożonego z kulki i cząsteczek smoły zasada zachowania energii mechanicznej obowiązuje. Ponieważ w miarę hamowania kulki maleje jej energia mechaniczna muszą zatem odpowiednio wzrosnąć energie kinetyczne cząsteczek smoły. Ten mikroskopowy wzrost energii kinetycznych chaotycznych ruchów cząsteczek smoły, obserwujemy w skali makroskopowej jako wzrost temperatury smoły, wywołany wydzielaniem się ciepła.

Zasadę zachowania energii mechanicznej można uogólnić, biorąc pod uwagę inne znane rodzaje energii, jak energię elektryczną, magnetyczną, chemiczną, jądrową, energię chaotyczną ruchów cieplnych cząsteczek ciała, zwaną energią wewnętrzną. Całkowita energia układu jest sumą wszystkich tych rodzajów energii. Ogólna zasada zachowania energii mówi, że:

Całkowita energia układu odosobnionego jest wielkością stałą.

W układzie odosobnionym mogą więc zachodzić tylko przemiany jednych form energii w inne.