

R o z d z i a ł 4

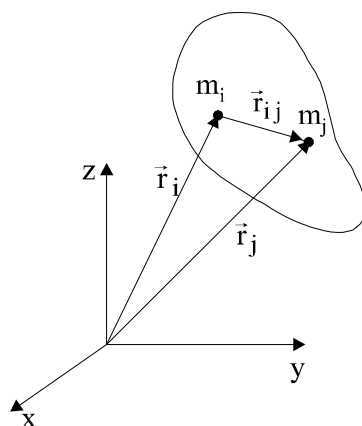
MECHANIKA CIAŁA SZTYWNEGO

4.1. Bryła sztywna

W dotychczasowych rozważaniach traktowaliśmy wszystkie otaczające nas ciała jako punkty materialne lub zbiory punktów materialnych. Jest to oczywiście uproszczenie, które w dalszych wykładach zastąpimy modelem ciała rozciągliwego. W modelu tym ciało rozpatrujemy jako układ punktów materialnych. Rozważane ciało dzielimy w myśli na elementy tak małe, że można każdy z nich traktować jako punkt materialny.

Ciała rzeczywiste występują w bardzo różnych postaciach. W tym rozdziale zajmiemy się najprostszym przykładem ciał rozciągliwych, a mianowicie bryłami sztywnymi.

Bryłą sztywną będziemy nazywali takie ciało, w którym wszystkie punkty mają względem siebie stałe odległości, które nie zmieniają się pod wpływem sił zewnętrznych działających na ciało.



Rys.4.1. Bryła sztywna

Warunek ten możemy zapisać następująco

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_{ij}| = r_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

gdzie $\vec{r}_i, \vec{r}_j$ są to wektory wodzące i-tego i j-tego punktu w obranym układzie odniesienia, natomiast r_{ij} jest stałą liczbą wyrażającą odległość między tymi punktami.

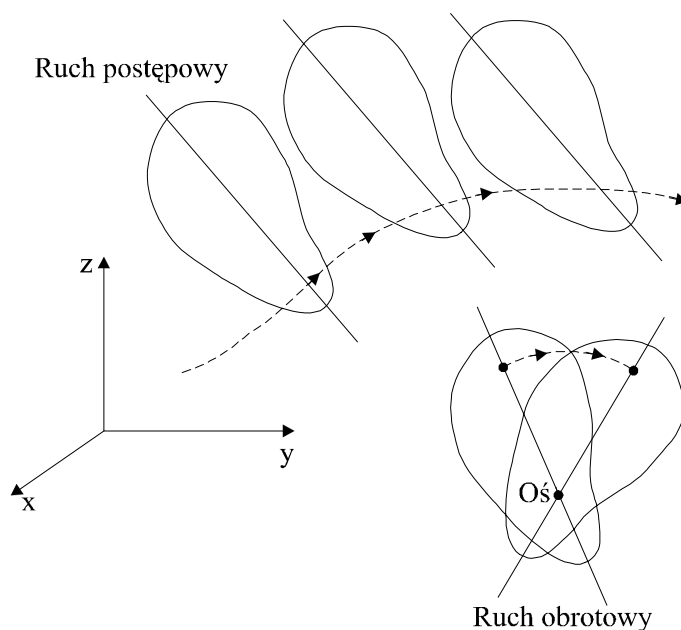
Ciało sztywne nie podlega żadnym odkształceniom pod wpływem działających sił, tzn. w bryle sztywnej odległości dwóch dowolnych punktów pozostają zawsze stałe, pomimo działania na to ciało różnych sił.

4.2. Rodzaje ruchów bryły sztywnej

Odróżniamy dwa rodzaje ruchu bryły sztywnej: ruch postępowy i ruch obrotowy.

Ruchem postępowym ciała sztywnego nazywamy taki ruch, w którym dowolna prosta przeprowadzona przez to ciało przesuwa się równolegle do samej siebie (wektory prędkości wszystkich punktów ciała są w danej chwili jednakowe).

Ciało porusza się ruchem obrotowym, jeżeli wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach, których środki leżą na jednej prostej. Prosta tą nazywamy chwilową osią obrotu. Oś obrotu może mieć stałe położenie; mówimy wtedy o stałej osi obrotu.



Rys.4.2. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej

4.3. Moment siły

Aby spowodować ruch obrotowy bryły sztywnej niezbędna jest siła, podobnie jak w ruchu postępowym. Z doświadczenia wiemy jednak, że nie każda siła może wywołać ruch obrotowy. Aby wprowadzić na przykład w ruch koło, ustawione do góry kołami roweru, trzeba podziać na nie siłą styczną do opony. Aby zatrzymać koło, działamy siłą styczną o przeciwnym zwrocie. Siła działająca prostopadle, tzn. w kierunku osi, nie spowoduje zmian w ruchu koła. Przykładając siłę nie do opony koła, a do łańcucha, możemy także wprowadzić koło w obrót, ale stwierdzimy, że wtedy przyspieszenie będzie mniejsze. Przykład ten wykazuje, że w ruchu obrotowym ważna jest nie tylko wartość siły, ale także jej kierunek i punkt przyłożenia. Wielkość wywołująca ruch obrotowy nazywamy momentem siły, który definiujemy następująco:

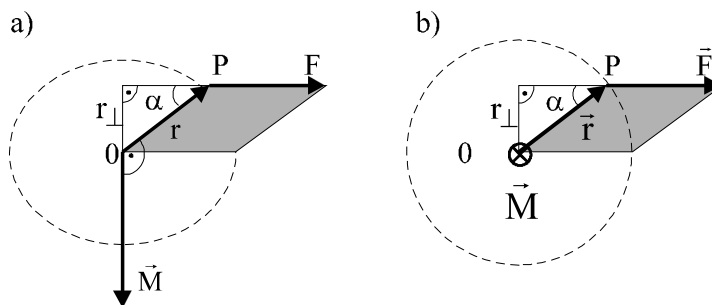
Momentem siły M względem punktu 0 (osi obrotu) nazywamy iloczyn wektorowy wektora wodzącego $\vec{r}$ (początek $\vec{r}$ leży w punkcie 0) i $\vec{F}$.

Zatem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.2)$$

Moment siły nazywany też bywa momentem obrotowym. Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego wartość bezwzględna momentu siły wynosi

$$M = rF \sin \alpha = r_{\perp} \cdot F \quad (4.3)$$



Rys.4.3. Moment siły $\vec{M}$

Odległość prostej działania siły $\vec{F}$ od osi obrotu 0, oznaczona na rys.4.3 symbolem $r_{\perp}$, nazywa się ramieniem siły. Moment siły jest wektorem, skierowanym wzdłuż osi obrotu; wektor prostopadły do płaszczyzny rysunku oznacza się umownie znakiem $\odot$, jeżeli wektor ten jest zwrócony do patrzącego na rysunek, a znakiem $\otimes$, jeżeli wektor ten jest zwrócony za płaszczyznę rysunku (na rys.4.3b moment siły jest zwrócony za płaszczyznę rysunku).

Jednostką momentu siły jest niutonometr [N·m].

4.4. Moment bezwładności

W ruchu obrotowym bryły sztywnej ważną rolę odgrywa sposób rozmieszczenia masy bryły wokół osi obrotu. Wielkością charakteryzującą tę własność bryły jest moment bezwładności.

Rozważmy bryłę sztywną będącą zbiorem punktów materialnych $m_1, m_2 \dots m_n$, których odległości od osi obrotu wynoszą odpowiednio $r_1, r_2 \dots r_n$.

Momentem bezwładności I bryły względem danej osi nazywamy sumę iloczynów mas poszczególnych punktów bryły i kwadratów ich odległości od danej osi, a więc

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (4.4)$$

W przypadku bryły o ciągłym rozkładzie masy, dzielimy ją w myśli na nieskończenie małe części i sumowanie we wzorze (4.4) zastępujemy całkowaniem. Otrzymujemy wtedy

$$I = \int r^2 dm \quad (4.5)$$

Wyniki obliczeń momentów bezwładności różnych brył względem ich osi symetrii są zestawione w tabl. 4.1. Jak widać z tej tablicy, moment bezwładności ciał o tej samej masie i tym samym promieniu zależy od ich kształtu.

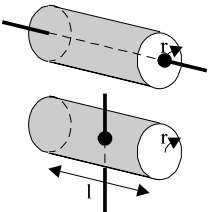
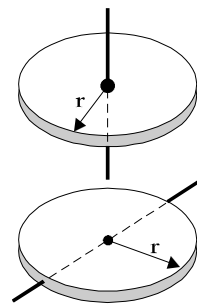
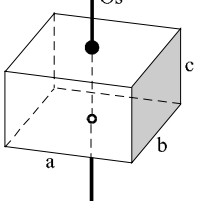
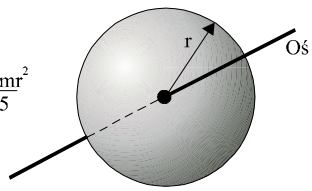
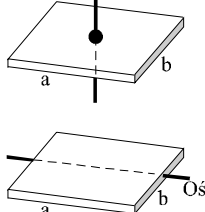
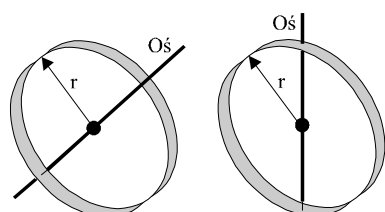
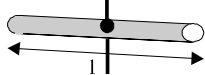
Moment bezwładności dowolnego ciała można wyrazić w postaci wzoru

$$I = mk^2 \quad (4.6)$$

w którym k jest ramieniem bezwładności. Ramie bezwładności możemy obliczyć, korzystając z momentów bezwładnościowych zestawionych w tabl. 4.1.

Jednostką momentu bezwładności jest $[kg \cdot m^2]$.

Tabela 4.1 Momenty bezwładności względem pewnych osi dla kilku ciał o prostych własnościach geometrycznych

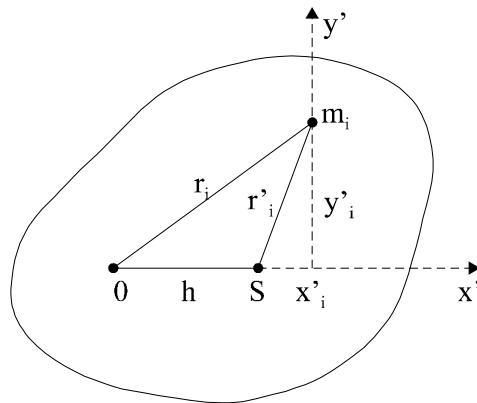
Walec pełny $I = \frac{mr^2}{2}$ $I = \frac{mr^2}{4} + \frac{mrl^2}{12}$ 	Krążek $I_{\perp} = \frac{mr^2}{12}$ $I_{\parallel} = \frac{mr^2}{4}$ 
Prostopadłościan $I = \frac{a^2 + b^2}{12}$ 	Kula $I = \frac{2mr^2}{5}$ 
Płytką $I_{\perp} = \frac{a^2 + b^2}{12}$ $I_{\parallel} = \frac{b^2}{12}$ 	Obręcz $I_{\perp} = mr^2$ $I_{\parallel} = \frac{mr^2}{2}$ 
Cienki pręt $I = \frac{ml^2}{12}$ 	

4.5. Twierdzenie Steinera

Zastanówmy się obecnie, czy istnieje jakiś związek pomiędzy momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy ciała, a momentem bezwładności względem dowolnej innej osi równoległej do tamtej.

Na rys.4.4. oznaczamy przez S punkt przecięcia płaszczyzną rysunku osi prostopadłej do tej płaszczyzny i przechodzącej przez środek masy ciała; przez O punkt przecięcia osi równoległej do tamtej i znajdującej się w odległości h od niej. Oznaczmy dalej przez r_i'

odległość i-tego punktu o masie m_i od osi przechodzącej przez środek masy ciała, a przez r_i – jego odległość od drugiej osi (zakładamy, że i-ty punkt leży w płaszczyźnie rysunku).



Rys.4.4. Moment bezwładności względem dowolnej osi

W układzie współrzędnych $x'y'$ (patrz rys.4.4) możemy zapisać:

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 \quad (4.7)$$

$$r_i^2 = (h + x_i')^2 + y_i'^2 = h^2 + 2hx_i' + x_i'^2 + y_i'^2 = h^2 + 2hx_i' + r_i'^2 \quad (4.8)$$

Obliczmy moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez 0

$$I = \sum m_i r_i^2 = h^2 \cdot \sum m_i + 2h \sum m_i x_i' + \sum m_i r_i'^2 \quad (4.9)$$

Zauważmy, że $\sum m_i = m$, gdzie m jest masą ciała; $\sum m_i r_i'^2 = I_s$ jest momentem bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek masy, a $\sum m_i x_i' = 0$ na mocy definicji środka masy. Otrzymujemy zatem zależność

$$I = I_s + mh^2 \quad (4.10)$$

Związek (4.10) nosi nazwę twierdzenia Steinera, które możemy sformułować następująco:

Moment bezwładności I bryły względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności I_s względem osi równoległej przechodzącej przez środek masy bryły oraz iloczynu masy m tej bryły i kwadratu odległości h obu osi.

4.6. Druga zasada dynamiki ruchu obrotowego

Rozważmy obracającą się bryłę sztywną, składającą się z punktów materialnych $m_1, m_2, \dots, m_n$, na które działają siły $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Dla uproszczenia obliczeń założmy, że siły te działają stycznie do okręgów, po których poruszają się punkty. Jeżeli przez $r_1, r_2, \dots, r_n$

oznaczymy promienie punktów materialnych, to wypadkowy moment sił działających na rozważaną bryłę wyniesie

$$M = \sum r_i F_i \quad (4.11)$$

Podstawiając $F_i = m_i a_i = m_i \varepsilon_i r_i$ otrzymujemy

$$M = \sum m_i \varepsilon_i r_i^2 = \varepsilon \sum m_i r_i^2 \quad (4.12)$$

Suma w ostatnim wyrażeniu powyższego wzoru jest momentem bezwładności bryły, zatem

$$M = I \varepsilon \quad (4.13)$$

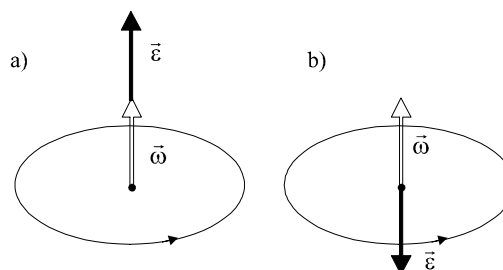
Aby można było wzór ten zapisać w postaci wektorowej, należy założyć, że prędkość kątową $\vec{\omega}$ oraz przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$ są wektorami, przy czym

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (4.14)$$

Kierunek wektora $\vec{\omega}$, zgodnie z umową, jest równoległy do osi obrotu, a jego zwrot jest określony regułą śruby prawoskrętnej (rys.4.5). Kierunek wektora $\vec{\varepsilon}$ jest więc także równoległy do osi obrotu, a jego zwrot jest zgodny ze zwrotem wektora $\vec{\omega}$ w ruchu przyspieszonym, przeciwny zaś w ruchu opóźnionym.

Rys.4.5. Kierunek i zwrot wektorów prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ w ruchu obrotowym:

a) przyspieszonym, b) opóźnionym



Zgodnie z powyższymi rozważaniami wzór (4.13) możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} \quad (4.15)$$

Wzór powyższy przedstawia drugą zasadę dynamiki ruchu obrotowego.

Druga zasada dynamiki ruchu obrotowego mówi, że moment siły $\vec{M}$ działającej na bryłę sztywną jest równy iloczynowi momentu bezwładności I tej bryły i jej przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$.

4.7. Moment pędu

Zdefiniujmy teraz wielkość zwaną momentem pędu albo krętem. Moment pędu $\vec{L}$ punktu materialnego o masie m i wektorze wodzącym $\vec{r}$, poruszającego się z prędkością $\vec{v}$ względem osi obrotu odległej o r od tego punktu, definiujemy wzorem

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (4.16)$$

Wektor momentu pędu jest skierowany zgodnie z osią obrotu. Ponieważ wektory $\vec{r}$ i $\vec{v}$ są względem siebie prostopadłe, wartość bezwzględna L wynosi

$$L = rmv = mr^2\omega$$

Pamiętając, że prędkość kątowna jest wektorem, możemy zapisać

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \quad (4.17)$$

Moment pędu bryły jest sumą momentów pędu wszystkich jej punktów, czyli

$$L = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2$$

lub

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (4.18)$$

Moment pędu bryły równa się iloczynowi jej prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i momentu bezwładności I .

Posługując się pojęciem momentu pędu można II zasadę dynamiki ruchu obrotowego zapisać

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$$

czyli

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (4.19)$$

Pochodna momentu pędu $\vec{L}$ bryły sztywnej względem czasu t jest równa momentowi siły $\vec{M}$ działającej na tę bryłę.

Jednostką momentu pędu, wynikającą ze wzoru (4.16) jest $[\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}]$.

Z równania (4.19) wyciągamy wniosek, że gdy wypadkowy moment siły $\vec{M}$ równa się zeru, to kręt bryły pozostaje stały. Stanowi to treść tzw. zasady zachowania krętu, zwanej też zasadą zachowania momentu pędu (odpowiednik zasady zachowania pędu obowiązującej w ruchu postępowym). Zasada ta mówi, że kręt bryły może ulec zmianie jedynie pod działaniem momentu siły.

Jeżeli więc łyżwiarz na lodzie wykonuje piruet, to rozsuwając szeroko ręce zwiększa swój moment bezwładności, a tym samym zmniejsza prędkość kątową obrotu. I odwrotnie – „skupiając” możliwie najbardziej całą swą masę dokoła osi obrotu zmniejsza swój moment bezwładności, co powoduje wzrost prędkości ω .

4.8. Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego

Rozważmy bryłę sztywną mogącą się obracać bez tarcia wokół stałej osi. Zgodnie z II zasadą dynamiki ruchu obrotowego ($M = I\epsilon$), jeżeli na bryłę tę będzie działał moment siły $\vec{M}$, to wywoła on ruch obrotowy bryły z przyspieszeniem kątowym $\vec{\epsilon}$.

Przypuśćmy, że na obracającą się bryłę nie działa żaden moment siły, tzn. $\vec{M} = 0$. Wtedy, ponieważ bryła jest sztywna i jej moment bezwładności jest stały i różny od zera, przyspieszenie kątowe musi być równe zeru. Oznacza to, że prędkość kątowa obracającej się bryły, na którą nie działa moment siły, nie ulega zmianie.

Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego mówi, że bryła sztywna nie poddana działaniu momentu siły pozostaje nieruchoma lub wykonuje ruch obrotowy jednostajny.

4.9. Trzecia zasada dynamiki ruchu obrotowego

Istnienie momentu siły działającego na daną bryłę jest zawsze wynikiem oddziaływania na nią innej bryły.

Trzecia zasada dynamiki ruchu obrotowego mówi, że jeżeli na bryłę A działa bryła B pewnym momentem siły $\vec{M}_{AB}$, to bryła B działa na A momentem $\vec{M}_{BA}$ równym co do wartości, lecz przeciwnie skierowanym ($\vec{M}_{AB} = -\vec{M}_{BA}$).

4.10. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Wychodzimy z ogólnego wzoru na energię kinetyczną punktu materialnego:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (4.20)$$

Bryłę sztywną rozpatrujemy znowu jako zbiór dużej liczby punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$, umieszczonych w odległościach $r_1, r_2, \dots, r_n$ od osi obrotu. Gdy bryła obraca się z prędkością kątową ω , poszczególne punkty materialne mają odpowiednio prędkości liniowe

$$v_1 = \omega r_1, \quad v_2 = \omega r_2, \dots, \quad v_n = \omega r_n.$$

Każdy z nich ma więc określoną energię kinetyczną

$$\frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2}, \quad \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2}, \dots, \quad \frac{m_n \omega^2 r_n^2}{2}.$$

Energia kinetyczna całej bryły jest sumą energii kinetycznych wszystkich punktów materialnych wchodzących w skład bryły, a więc

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2).$$

Uwzględniając wzór definiujący moment bezwładności I dany wzorem (4.4) znajdujemy

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (4.21)$$

A zatem energia kinetyczna E_k bryły obracającej się dookoła nieruchomej osi równa się połowie iloczynu momentu bezwładności I i kwadratowi prędkości kątowej ω . Porównując wyrażenia (4.20) i (4.21) możemy stwierdzić, że moment bezwładności I odgrywa w ruchu obrotowym podobną rolę jak masa m w ruchu postępowym.

4.11. Analogia między ruchem postępowym i ruchem obrotowym

Z dotychczasowych rozważań wynika, że między prawami dynamiki punktu materialnego a prawami dynamiki bryły sztywnej istnieje pewna analogia. W tabeli 4.2. zestawiono wielkości i zależności występujące w ruchu postępowym prostoliniowym i odpowiadające im wielkości i zależności w ruchu obrotowym bryły sztywnej wokół stałej osi. Zestawienie takie ułatwia zapamiętanie zależności dla ruchu obrotowego, jeśli znamy zależności ruchu postępowego. Na przykład, zależność wyrażającą II zasadę dynamiki ruchu obrotowego otrzymujemy z zależności $F = ma$ przez zastąpienie siły, masy i przyspieszenia przez odpowiadające im wielkości ruchu obrotowego.

Tabela 4.2. Ruch prostoliniowy i obrotowy

Ruch prostoliniowy		Ruch obrotowy	
Droga liniowa	s	Droga kątowa	φ
Prędkość liniowa	$v = \frac{ds}{dt}$	Prędkość kątowa	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Przyspieszenie liniowe	$a = \frac{dv}{dt}$	Przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Masa	m	Moment bezwładności	I
Pęd	$p = mv$	Moment pędu (kręt)	$L = I\omega$
Siła	F	Moment siły	M
II zasada dynamiki	$F = ma = \frac{dp}{dt}$	II zasada dynamiki	$M = I\varepsilon = \frac{dL}{dt}$
Energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	Energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$