

R o z d z i a ł 3

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

3.1. Pierwsza zasada dynamiki

Opisując w rozdziale 2 różne rodzaje ruchu z punktu widzenia kinematyki podawaliśmy ich formalną charakterystykę. W dynamice interesują nas warunki, w jakich poszczególne ruchy powstają, a przede wszystkim przyczyny ich powstawania. Rozpocznijmy od rozważań dynamicznych związanych z ruchem postępowym brył, które będziemy traktowali jako punkty materialne.

Ustalenie zasad dynamiki było równoznaczne z obaleniem fałszywych poglądów panujących od czasów starożytnych a dotyczących przyczyn powstawania różnych rodzajów ruchu. Do obalenia tych poglądów przyczyniło się wprowadzenie do nauki przez Galileusza w XVI wieku metody doświadczalnej. Badania zapoczątkowane przez Galileusza podjęte zostały następnie przez Newtona, któremu zawdzięczamy ustalenie podstaw dynamiki.

Zasady dynamiki podane zostały przez Newtona jako tzw. prawa ruchu.

Pierwsza zasada dynamiki głosi, że ciało nie poddane działaniu żadnej siły albo poddane działaniu sił równoważących się pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Słuszność pierwszej części tej zasady, odnosząca się do przypadku, gdy na ciało nie działa żadna siła, nie może być na Ziemi doświadczalnie sprawdzona, nie możemy bowiem stworzyć na Ziemi takich warunków, aby ciało było wolne od działania sił. Druga część nadaje się do doświadczalnego sprawdzenia. Po dokładnym zrównoważeniu sił oporu przez siłę ciągnącą ciało, ciało to mające pewną prędkość $\vec{v}$, zachowa tę prędkość niezmienną

zarówno co do wartości, jak i co do kierunku, tzn. poruszać się będzie ruchem jednostajnie prostoliniowym.

Pierwsza zasada dynamiki nosi nazwę zasady bezwładności. Przez bezwładność rozumiemy właściwość ciała decydującą o tym, że ciało bez działania sił nie może zmienić ani wartości, ani kierunku swej prędkości. Czyli bez działania sił pozostaje w takim stanie jak było wcześniej: spoczywa jeśli spoczywało, lub porusza się ruchem jednostajnym jeśli było w jakimkolwiek ruchu.

3.2. Druga zasada dynamiki.

Pośrednim wnioskiem z pierwszej zasady jest, że wszelkie zmiany prędkości mogą zachodzić jedynie pod działaniem sił. Musi więc istnieć związek między siłą a zmianami prędkości. Ta zależność jest treścią drugiej zasady dynamiki.

Druga zasada dynamiki głosi, że: przyspieszenie ciała $\vec{a}$ jest wprost proporcjonalne do siły $\vec{F}$, która to przyspieszenie wywołuje:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (3.1)$$

gdzie: współczynnikiem proporcjonalności jest masa ciała m , na którą działa siła $\vec{F}$.

Równanie (3.1) jest równaniem wektorowym: wektor przyspieszenia ma kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i zwrotem działającej siły. Masa m ciała jest miarą jego bezwładności.

Określenie jednostki siły w układzie SI wynika z równania (3.1). Jednostką siły w układzie SI jest taka siła, która działając na ciało o masie $m=1$ kg nadaje mu przyspieszenie równe $a=1 \text{ m/s}^2$. Siłę tę nazwano niutonem [N].

$$1\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Wracając do (3.1) trzeba podkreślić, że o proporcjonalności siły do przyspieszenia mówimy w przypadku oddziaływania różnych sił na tę samą masę m ($m=\text{const}$). Jeżeli natomiast tą samą siłą F ($F=\text{const}$) działać będziemy kolejno na ciała o różnych masach $m_1, m_2, \dots$, to obowiązywać będą zależności

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 = \dots,$$

skąd

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

A zatem przyspieszenia uzyskane przez różne ciała pod działaniem tej samej siły są odwrotnie proporcjonalne do mas tych ciał.

Wyrażenie $\vec{F} = m\vec{a}$ jest również słuszne, gdy ciało o masie m poddane jest jednoczesnemu działaniu kilku sił: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ itd. W tym przypadku $\vec{F}$ jest sumą geometryczną (wypadkową) wszystkich sił działających, a $\vec{a}$ jest przyspieszeniem ciała.

Z wyrażeniem (3.1) wiąże się ściśle tzw. dynamiczny pomiar siły. Wystarczy znać masę ciała i wyznaczyć uzyskane przez nią przyspieszenie, aby móc obliczyć wartość działającej siły.

3.3. Ogólne ujęcie drugiej zasady dynamiki

Do wyrażenia (3.1) podstawiamy znane z rozdziału 2 wyrażenie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

i otrzymujemy

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1.$$

Iloczyn siły i czasu jej działania nazywamy popędem siły. Jest to wektor o kierunku zgodnym z kierunkiem wektora $\vec{F}$.

Iloczyn masy i prędkości nosi nazwę pędu. Jest to również wektor. Kierunek wektora pędu $\vec{p}$ jest zgodny z kierunkiem prędkości $\vec{v}$. Równanie ostatnie wyraża, że wektor popędu siły jest równy wektorowemu przyrostowi pędu wywołanemu przez tę siłę.

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = \Delta \vec{p} \quad (3.2)$$

czyli

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Jeżeli w czasie $t_2 - t_1$ wektor siły ulega zmianie, to otrzymane wyrażenie przedstawia siłę średnią w czasie Δt . Zakładając, że czas Δt zmierza do zera, znajdujemy siłę chwilową w chwili t jako pochodną pędu względem czasu:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.3)$$

Równanie (3.3) wyrażające siłę jako pochodną pędu względem czasu jest ogólniejsze od równania (3.1), to ostatnie bowiem jest słuszne jedynie wtedy, gdy ciała poruszają się z prędkościami małymi w porównaniu z prędkością światła. Gdy prędkość ciała jest porównywalna z prędkością światła, należy uwzględnić zmienność masy podczas ruchu co opisuje szczególna teoria względności. Zmienność masy wynikająca z ruchu ciała jest określona równaniem Einsteina:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad (3.4)$$

gdzie m oznacza masę ciała będącego w ruchu, m_0 – masę tegoż ciała w spoczynku, c – prędkość światła w próżni (ok. 300 000 km/s).

Ze wzoru wynika, że nawet wtedy, gdy prędkość ciała równa się 30 000 km/s, zmiana masy jest niewielka, mniejsza od 1%. Gdy prędkości zbliżają się do prędkości światła (co może występować np. w przypadku mikrocząsteczek), masa coraz szybciej rośnie. W tych warunkach zamiast mechaniki niutonowskiej należy stosować mechanikę relatywistyczną.

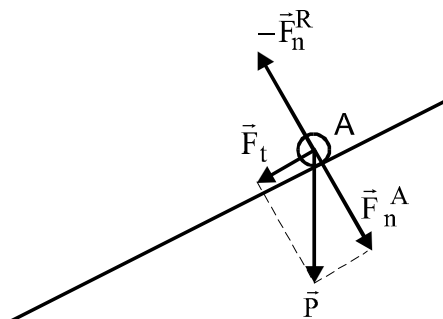
3.4. Trzecia zasada dynamiki.

Trzecia zasada dynamiki, zwana również zasadą akcji i reakcji, dotyczy wzajemnego oddziaływania dwóch ciał (względnie układów ciał).

Trzecia zasada dynamiki głosi, że jeżeli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$ równą co do wartości, lecz przeciwnie skierowaną:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (3.5)$$

Obie siły występują równocześnie, toteż nie można powiedzieć, która z nich jest siłą akcji, a która siłą reakcji, co widać wyraźnie np. w przyciąganiu grawitacyjnego dwóch ciał. Czasem jednak umownie odróżnia się siłę pierwotną – siłę akcji i siłę wtórną – siłę reakcji, np. w przypadku ciała spoczywającego na podstawie. Nacisk na podstawę traktuje się jako siłę akcji, a oddziaływanie podstawy na ciało jako siłę reakcji. Zestawienie tych sił w przypadku równi pochyłej przedstawia rys.3.1. Siłę ciężkości ciała $\vec{P}$ rozkładamy na dwie składowe: składową styczną $\vec{F}_t$ i składową normalną $\vec{F}_n^A$. Ta ostatnia jest właśnie siłą naciskającą ciała na równię. Odpowiada jej siła reakcji $\vec{F}_n^R$. Druga składowa siły ciężkości, a mianowicie $\vec{F}_t$, jest siłą wprawiającą ciało w ruch po równi. Chcąc utrzymać to ciało w spoczynku, należy tę składową zrównoważyć dodatkową siłą, również styczną do równi, równą co do wartości $\vec{F}_t$, lecz przeciwnie skierowaną.



Rys.3.1. Ciało A naciska na równię siłą akcji $\vec{F}_n^A$, a równia pochyła oddziałuje na to ciało siłą reakcji $\vec{F}_n^R$.

3.5. Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu.

Zajmiemy się siłami występującymi podczas ruchu po okręgu.

3.5.1. Siła dośrodkowa.

Rozważmy ruch jednostajny po okręgu z punktu widzenia dynamiki. Zgodnie z I zasadą dynamiki tylko ruch jednostajny prostoliniowy może istnieć bez działania sił. Ruch jednostajny po okręgu wymaga już istnienia siły. Według II zasady dynamiki wartość liczbową tej siły wyraża się zależnością

$$F=ma. \quad (3.6)$$

A pamiętamy (z rozdziału 2), że przyspieszenie a w ruchu jednostajnym po okręgu możemy zapisać

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (3.7)$$

Uwzględniając wyrażenie (3.6) i (3.7) otrzymujemy

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \text{lub} \quad F = m\omega^2 r \quad (3.8)$$

Kierunek tej siły jest zgodny z kierunkiem przyspieszenia a , tak więc siła ta działa wzdłuż promienia r do środka koła. Stąd pochodzi nazwa siły dośrodkowej.

Wstawiając w (3.8) zamiast ω wartość $2\pi/T$ otrzymujemy jeszcze inną postać wyrażenia siły dośrodkowej:

$$F = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad (3.9)$$

Można wymienić wiele przykładów siły dośrodkowej. Gdy kamień przymocowany do sznurka wprawiamy w ruch po okręgu, to siłę dośrodkową wywiera nasza ręka za pośrednictwem napiętego sznurka. Gdy pociąg posuwa się po zakrzywionym torze, to sprężyste oddziaływanie zewnętrznej szyny stanowi siłę dośrodkową. Jeśli przyjmiemy, że Księżyc krąży dookoła Ziemi po torze kołowym, to siłę dośrodkową stanowi przyciąganie grawitacyjne Ziemi. Podczas krążenia elektronu po kołowej orbicie dookoła jądra atomu siłę dośrodkową stanowi elektryczne przyciąganie ujemnie naładowanego elektronu przez dodatnio naładowane jądro atomowe.

Założmy, że w pewnej chwili przestaje działać na ciało siła dośrodkowa, np. przerywa się sznurek, do którego był przymocowany poruszający się kamień. Zgodnie z zasadą bezwładności ruch ciała nie ustaje, lecz trwa dalej jako ruch jednostajny wzdłuż stycznej do toru. Oczywiście, sprawa się komplikuje, jeśli oprócz siły dośrodkowej działają na to ciało jeszcze inne siły. Grudki błota odlatują od koła rowerowego po torze krzywoliniowym, gdyż do ruchu po stycznej dodaje się ruch wywołany działaniem siły ciężkości. Podobnie przedstawia się ruch odlatujących od tarczy szlifierskiej opiłków szlifowanych na niej przedmiotów.

3.5.2. Siła odśrodkowa reakcji.

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki działaniu siły dośrodkowej, na ciało krążące po okręgu, musi towarzyszyć działanie siły odśrodkowej na tzw. „więzy”. Przez więzy rozumiemy te ciała, które wymuszają ruch po okręgu. W naszych przykładach takimi więzami będą: ręka wprawiająca kamień w ruch za pośrednictwem sznurka, szyna kolejowa, Ziemia i jądro atomowe.

Siła odśrodkowa $\vec{F}_{\text{odśr}}$ jest równa co do wartości sile dośrodkowej $\vec{F}_{\text{dośr}}$, lecz ma zwrot przeciwny:

$$\vec{F}_{\text{dośr}} = -\vec{F}_{\text{odśr}} \quad (3.10)$$

Siła dośrodkowa (działająca na ciało) nie równoważy się z siłą odśrodkową (działającą na więzy), gdyż obie siły działają na różne ciała.

3.6. Inercjalne układy odniesienia. Transformacja Galileusza

Z pierwszej zasady dynamiki wynika, że jeśli na ciało nie działają żadne siły lub działają siły zrównoważone ($F=0$), to ciało jest nieruchome lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Ponieważ ruch jest zmianą położenia ciała względem układu

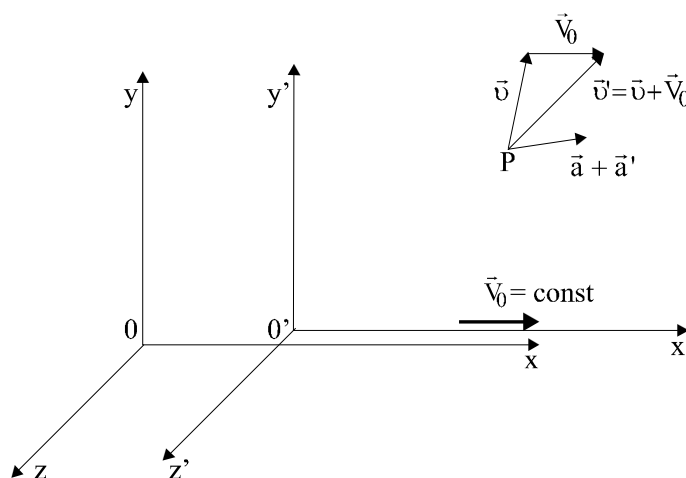
odniesienia, możemy zapytać, czy w każdym układzie odniesienia będzie spełniona I zasada dynamiki Newtona.

Otóż okazuje się, że zasada ta obowiązuje tylko w inercjalnych układach odniesienia. Układy odniesienia, w których I zasada dynamiki nie jest spełniona, noszą nazwę układów nieinercjalnych. Pierwsza zasada dynamiki jest w istocie postulatem, że układ inercjalny istnieje.

Rozpatrzmy dwa układy odniesienia (rys.3.2): jeden nieruchomy 0 i drugi 0' poruszający się względem układu 0 ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $\vec{v}_0$. Układy te orientujemy tak, aby osie x i x' pokrywały się i aby kierunek tych osi pokrywał się z kierunkiem ruchu układu 0'.

Przyjmujemy ponadto, że osie y i y' oraz z i z' są do siebie równoległe oraz że w chwili $t=0$ układy pokrywają się.

Założmy, że chcemy opisać ruch punktu materialnego P z punktu widzenia obserwatora związanego z układem 0 i obserwatora związanego z układem 0'.



Rys.3.2. Dwa układy odniesienia 0 i 0' poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym. Prędkość poruszającego się ciała jest w obu układach różna, natomiast przyspieszenie jest jednakowe.

Z rys.3.2. wynika, że:

$$x' = x - v_0 t \quad (3.11a)$$

$$y' = y \quad (3.11b)$$

$$z' = z \quad (3.11c)$$

Przyjmiemy ponadto, że w obydwu układach odniesienia czas płynie jednakowo, tzn.

$$t' = t \quad (3.11d)$$

Zależności (3.11a-d) noszą nazwę transformacji Galileusza.

Różniczkując powyższe wzory względem czasu, znajdziemy związki między współrzędnymi wektora prędkości punktu P w układzie 0 i 0'

$$v'_x = v_x - v_0 \quad (3.12a)$$

$$v'_y = v_y \quad (3.12b)$$

$$v'_z = v_z \quad (3.12c)$$

Różniczkując jeszcze raz względem czasu i pamiętając, że $\vec{v}_0 = \text{const}$, czyli $\frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0$,

otrzymujemy współrzędne wektora przyspieszenia

$$a'_x = a_x \quad (3.13a)$$

$$a'_y = a_y \quad (3.13b)$$

$$a'_z = a_z \quad (3.13c)$$

Z zależności (3.13a-c) wynika, że przyspieszenie w obu układach jest jednakowe. Mówiąc inaczej, przyspieszenie jest niezmiennikiem transformacji Galileusza. Oznacza to, że siły działające na ciało są w układach inercjalnych jednakowe. Można powiedzieć bardziej ogólnie, że prawa mechaniki są niezmiennicze przy przejściu od jednego układu inercjalnego do drugiego układu inercjalnego. Stwierdzenie to nosi nazwę zasady względności Galileusza. Z zasady tej wynika, że nie można za pomocą doświadczeń mechanicznych wykryć, czy układ znajduje się w stanie spoczynku, czy też porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

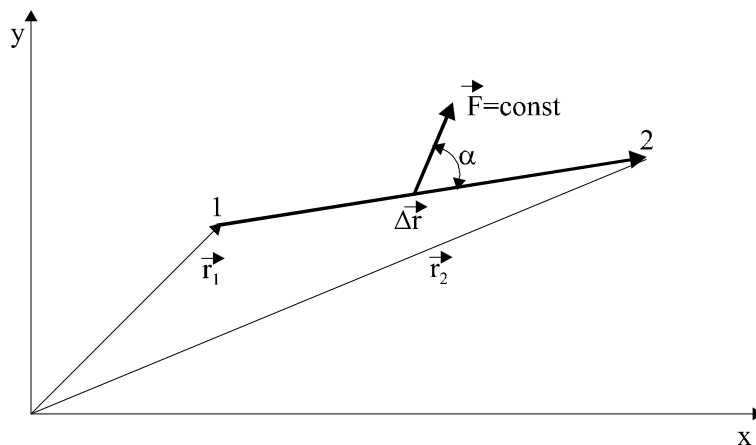
Pierwsza zasada dynamiki postuluje istnienie układu inercjalnego. Jednak taki układ odniesienia jest trudno zrealizować w praktyce. Układ odniesienia związany z Ziemią nie jest układem inercjalnym, gdyż Ziemia wykonuje ruch wirowy wokół własnej osi i ruch obrotowy wokół Słońca. Również układy odniesienia związane z gwiazdami nie są układami inercjalnymi, gdyż gwiazdy także wykonują ruchy niejednostajne. Jednak przy omawianiu wielu zjawisk fizycznych układy te można traktować w przybliżeniu jako inercjalne.

3.7. Praca. Moc. Energia kinetyczna.

Jeśli na ciało działa siła $\vec{F}$ i w wyniku działania tej siły ciało przemieści się z punktu 1 do punktu 2 o wektor $\Delta \vec{r}$ (rys.3.3), to wielkość

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \alpha \quad (3.14)$$

nazywamy pracą W wykonaną przez siłę $\vec{F}$ na drodze $\Delta\vec{r}$. Kąt α jest kątem zawartym między kierunkiem działania siły i kierunkiem przesunięcia.



Rys.3.3. Praca wykonana przez stałą siłę $\vec{F}$ na drodze prostoliniowej $\Delta\vec{r}$ jest równa $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$.

Jeśli siła jest funkcją położenia, tzn. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, to całkowite przemieszczenie ciała rozkładamy na n odcinków, tak aby w każdym z nich siłę można uważać za stałą. Wówczas praca całkowita wykonana przez siłę $\vec{F}(\vec{r})$ przy przesunięciu ciała z punktu 1 do punktu 2, których położenia są dane przez promienie wodzące $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, wynosi (rys.3.4)

$$W(1 \rightarrow 2) = \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n F_r(\vec{r}_i) \cdot \Delta r_i \quad (3.15)$$

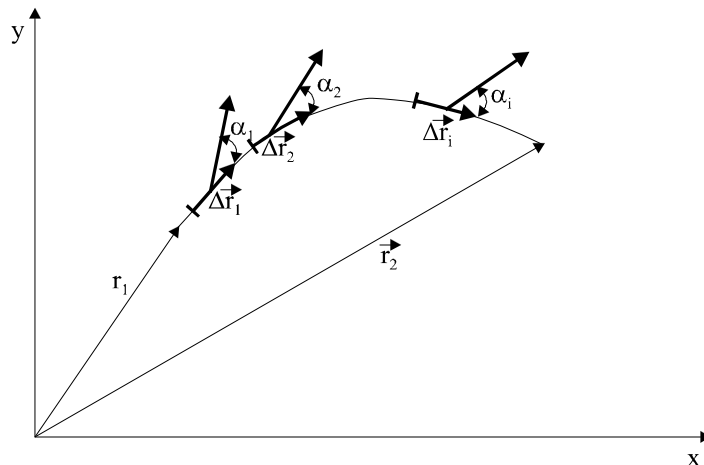
W granicy

$$\lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3.16)$$

Zatem praca W wynosi:

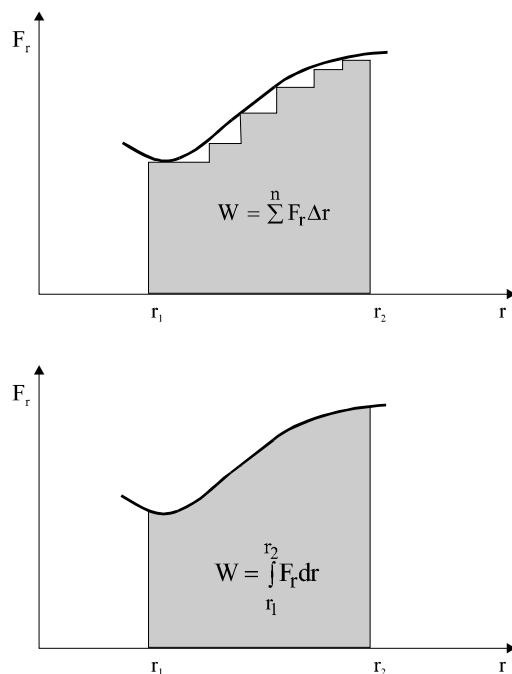
$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) \cdot dr \quad (3.17)$$

gdzie $F_r(r)$ jest rzutem siły $\vec{F}(\vec{r})$ na kierunek elementarnego przesunięcia $d\vec{r}$.



Rys.3.4. Jeśli siła jest zmienna, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, to praca tej siły dana (3.17)

Na rys. 3.5 przedstawiono geometryczną interpretację wzorów (3.15) i (3.17).
 Zauważmy, że jeśli $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) > 0$, tzn. kąt między kierunkiem $\vec{F}$ i $d\vec{r}$ jest mniejszy od 90° , to wówczas $W > 0$, czyli praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ jest dodatnia. Przykładem takiej sytuacji jest praca wykonana przez siły grawitacji podczas swobodnego spadku ciała. Jeśli natomiast $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) < 0$, tzn. kąt między $\vec{F}$ i $d\vec{r}$ jest większy od 90° , to praca siły $\vec{F}$ jest ujemna. Przykładem takich sił są siły oporu ruchu.



Rys.3.5. Geometryczna interpretacja wzorów (3.15) i (3.17)

Pracę wykonaną przez siłę działającą na ciało możemy wyrazić przez jego prędkość. Ponieważ $d\vec{r} = \vec{v}dt$, więc

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}dt \quad (3.18)$$

Jeśli założymy, że masa ciała jest stała, to wówczas $F = ma = m \frac{dv}{dt}$ i wyrażenie (3.18)

możemy zapisać w postaci

$$W = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v} = m \left(\frac{v^2}{2} \right) \Big|_{v_1}^{v_2} = m \frac{v_2^2}{2} - m \frac{v_1^2}{2} \quad (3.19)$$

gdzie v_1 i v_2 są prędkościami ciała odpowiednio w punkcie 1 i 2. Wyrażenie

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.20)$$

nazywamy energią kinetyczną.

Stwierdziliśmy w ten sposób, że praca wykonana przez siłę działającą na ciało jest równa zmianie energii kinetycznej tego ciała.

$$W(1 \rightarrow 2) = E_{k2} - E_{k1} \quad (3.21)$$

Jeśli $\vec{F} = 0$ to $W(1 \rightarrow 2) = 0$ i wówczas $E_{k2} = E_{k1}$. Oznacza to, że energia kinetyczna ciała swobodnego, na które nie działają żadne siły, jest stała.

Jednostką pracy i energii jest 1 dżul [J]; jest to praca siły 1N na drodze 1 m

$$1J = 1N \cdot m = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

Pracę wykonaną w jednostce czasu nazywamy mocą.

Jeżeli w przedziale czasu Δt została wykonana praca ΔW , to średnia moc $\bar{P}$ jest określana

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (3.22)$$

Mocą chwilową nazywamy granicę do jakiej zmierza moc średnia gdy $\Delta t \rightarrow 0$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (3.23)$$

Moc chwilowa jest więc pochodną pracy względem czasu. Jednocześnie z (3.23) wynika:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r \cdot dr \quad (3.24)$$

gdzie (jak pamiętamy) F_r jest rzutem wektora $\vec{F}$ na kierunek elementarnego przesunięcia $d\vec{r}$.

Korzystając z powyższego (3.23) możemy przekształcić do postaci:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}_r \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_r \cdot \vec{v} \quad (3.25)$$

(3.25) w zapisie wektorowym ma postać

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.26)$$

Ze wzoru (3.26) wynika, że moc danej siły $\vec{F}$ jest proporcjonalna do prędkości $\vec{v}$.

Jednostką mocy w układzie SI jest wat [W]. Moc jest równa jednemu watowi, jeżeli stała siła wykonuje pracę jednego dżula w czasie jednej sekundy.

$$1W = \frac{1J}{1s}$$

3.8. Dynamika układu punktów materialnych. Środek masy

W dotychczasowych naszych rozważaniach dotyczących dynamiki traktowaliśmy ciała poruszające się jako punkty materialne nie uwzględniając ich wymiarów geometrycznych, ani objętości. Obecnie przejdziemy do dynamiki układu punktów materialnych, przy czym warto od razu podkreślić, że ciało modelowe o ciągłym rozkładzie masy (tzw. ciało rozciągle) również może być traktowane jako układ nieskończonej liczby punktów materialnych.

Założmy, że układ jest złożony z N punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$ umieszczonych odpowiednio w punktach $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_N$ określonych jednoznacznie przez wektory wodzące $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N$. Oczywiście każdemu wektorowi wodzącemu $\vec{r}_i$ są przypisane współrzędne (x_i, y_i, z_i) .

Środkiem masy tego układu nazywamy punkt S , którego współrzędne wyrażają się wzorami:

$$x_s = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_s = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_s = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \quad (3.27)$$

i oznacza wskaźnik sumowania, który zmienia się od 1 do N . Wzory (3.27) można zapisać wektorowo za pomocą jednego wzoru

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (3.28)$$

gdzie $\vec{r}_s$ to promień wodzący środka masy.

Aby obliczyć położenie środka masy ciała rozciągniętego dzielimy je w myśli na N małych części o masach $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_N$. Wzór (3.28) przyjmuje wtedy postać

$$\vec{r}_s = \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i}$$

Gdy liczba części N zmierza do nieskończoności, powyższe wyrażenie dąży do granicy

$$\vec{r}_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i}$$

Z matematyki wiadomo, że granice sum w powyższym wzorze wyrażają się odpowiednimi całkami oznaczonymi. Zatem

$$\vec{r}_s = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \quad (3.29)$$

przy czym $\int dm = m$ oznacza całkowitą masę ciała.

Dla brył o regularnym kształcie środek masy pokrywa się ze środkiem symetrii. Na przykład środek masy jednorodnej kuli leży w jej środku geometrycznym, środek masy jednorodnego walca znajduje się na osi symetrii w połowie jego wysokości itp.

Z dotychczasowych rozważań – o charakterze raczej matematycznym – nie widać jeszcze korzyści, jakie wynikają z wprowadzenia pojęcia środka masy. Korzyści te wyrażnie się zaznaczają, gdy zajmiemy się ruchem postępowym ciała złożonego z szeregu punktów materialnych o łącznej masie m . Współrzędna x_s środka masy spełnia zgodnie z (3.27) równanie

$$m x_s = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots, \quad (3.30)$$

przy czym, wobec tego że ciało jest w ruchu, każda ze współrzędnych $x_s, x_1, x_2, x_3, \dots$ jest funkcją czasu. Różniczkując (3.30) względem czasu znajdujemy zależność między prędkościami

$$\begin{aligned} m \frac{dx_s}{dt} &= m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} + m_3 \frac{dx_3}{dt} + \dots, \\ m v_{sx} &= m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \dots, \end{aligned} \quad (3.31)$$

gdzie v_{sx} oznacza składową prędkość środka masy ciała w kierunku osi x . Różniczkując drugi raz znajdujemy związek między przyspieszeniami:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{sx}}{dt} &= m_1 \frac{dv_{1x}}{dt} + m_2 \frac{dv_{2x}}{dt} + m_3 \frac{dv_{3x}}{dt} + \dots, \\ m a_{sx} &= m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + m_3 a_{3x} + \dots, \end{aligned} \quad (3.32)$$

gdzie a_{sx} oznacza składową przyspieszenia środka masy ciała w kierunku osi x.

Uwzględniając drugą zasadę dynamiki można powyższe równanie przepisać w postaci

$$ma_{sx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots, \quad (3.33)$$

gdzie $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \dots$, są składowymi x-owymi sił wypadkowych, działających odpowiednio na masy m_1, m_2, m_3 itd.

Dla pozostałych osi y i z można wypisać równania analogiczne. Od tych trzech równań skalarnych można przejść do jednego równania wektorowego:

$$m\vec{a}_s = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum \vec{F} \quad (3.34)$$

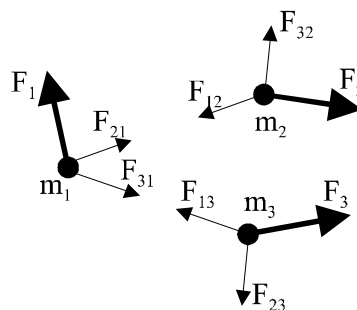
A zatem środek masy ciała ma tę właściwość, że iloczyn całkowitej masy m i przyspieszenie środka masy $\vec{a}_s$ równa się sumie wszystkich sił działających na poszczególne punkty układu.

Siły te możemy podzielić na zewnętrzne $\vec{F}_z$ (tzn. działające między punktami układu i punktami znajdującymi się zewnątrz rozważanego układu) i wewnętrzne $\vec{F}_w$ (tzn. działające między punktami danego układu):

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_z + \sum \vec{F}_w \quad (3.35)$$

Dla przykładu na rys.3.6 jest przedstawiony układ trzech punktów materialnych oddziałujących na siebie siłami wewnętrznymi, z których jedne są siłami przyciągającymi, a inne odpychającymi. Siły wewnętrzne mogą mieć różne pochodzenie. W ciałach stałych są to na przykład siły sprężystości, w gazach – siły odpychające występujące przy zderzeniach cząsteczek. Na rys.3.6 są także zaznaczone siły zewnętrzne (dla odróżnienia od wewnętrznych zaznaczone grubą linią).

Rys.3.6. Układ trzech punktów materialnych, na które działają siły wewnętrzne $\vec{F}_{ij}$ oraz siły zewnętrzne $\vec{F}_i$



Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że siły wewnętrzne występują parami, których składniki są równe co do wartości, lecz przeciwne co do kierunku. Stąd wniosek, że wypadkowa wszystkich sił wewnętrznych równa się zeru i wspomnianą właściwość środka masy można wyrazić prostszą zależnością

$$m\vec{a}_s = \sum \vec{F}_z \quad (3.36)$$

Innymi słowy, środek masy ciała porusza się tak, jakby w nim była skupiona całkowita masa poddana działaniu wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych. Stwierdzenie powyższe jest słuszne zarówno w odniesieniu do układu sztywnego o niezmiennych wzajemnych odległościach poszczególnych cząstek, jak również dla układu, w którego skład wchodzi cząstki wykonujące dowolne ruchy pod wpływem sił wewnętrznych.

Równanie (3.36) nosi nazwę równania ruchu ciała.

3.9. Zasada zachowania pędu

W odniesieniu do pojedynczego punktu materialnego drugą zasadę dynamiki zapisaliśmy w postaci (3.3)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Nasuwa się pytanie, jaki jest odpowiednik tego podstawowego równania dynamiki dla układu punktów materialnych.

Wracając do równania (3.31) stwierdziliśmy, że iloczyn całkowitej masy układu przez składową prędkości środka masy w kierunku osi x, czyli składowa x-owa pędu środka masy p_s , równa się sumie składowych x-owych pędów poszczególnych mas układu

$$p_{sx} = p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} + \dots,$$

Uwzględniając analogiczne równania dla pozostałych osi współrzędnych można od trzech równań skalarnych przejść do jednego wektorowego:

$$\vec{p}_s = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots = \vec{p}_w \quad (3.37)$$

gdzie $\vec{p}_s$ oznacza pęd środka masy układu równy $m\vec{u}_s$, $\vec{p}_w$ - pęd wektorowy układu.

Treść równania (3.37) można ująć następująco: pęd środka masy układu (czyli iloczyn całkowitej masy układu i prędkości środka masy) równa się pędowi wypadkowemu (czyli sumie geometrycznej pędów poszczególnych jego punktów materialnych).

Zróżniczkowanie (3.37) względem czasu prowadzi do zależności

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} + \dots \quad (3.38)$$

lub

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = \frac{d\vec{p}_w}{dt}. \quad (3.39)$$

Uwzględniając (3.3) stwierdzimy, że każdy ze składników sumy po prawej stronie równania (3.38) przedstawia siłę wypadkową $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ działającą na punkty materialne $m_1, m_2, m_3, \dots$ układu. A zatem

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}_s}{dt} = \frac{d\vec{p}_w}{dt}.$$

Ponieważ jednak na podstawie trzeciej zasady dynamiki $\sum \vec{F}_w = 0$, więc ostatnie równanie redukuje się do postaci

$$\sum \vec{F}_z = \frac{d\vec{p}_s}{dt} = \frac{d\vec{p}_w}{dt}. \quad (3.40)$$

Zależności te są odpowiednikiem równania (3.3) obowiązującym w przypadku ruchu postępowego układu punktów materialnych. Treść równania (3.40) można wyrazić następująco: wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na układ punktów materialnych równa się pochodnej względem czasu pędu środka masy lub pochodnej względem czasu wypadkowego pędu układu.

Z równania (3.40) wynika bardzo ważna zasada zachowania pędu. Załóżmy, że wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na rozważany układ równa się zeru. Wtedy

$$\frac{d\vec{p}_w}{dt} = 0, \quad \text{czyli} \quad \vec{p}_w = \text{const.} \quad (3.41)$$

Innymi słowy, gdy wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na układ równa się zeru, to wektor wypadkowego pędu całego układu pozostaje stały. Zmiana pędu układu może być wywołana jedynie działaniem takich sił zewnętrznych, które się nawzajem nie równoważą. Żadne siły wewnętrzne nie są w stanie zmienić wypadkowego pędu układu.

Wypowiedzianej wyżej zasady nie należy rozumieć w ten sposób, że poszczególne punkty materialne wchodzące w skład układu nie mogą zmieniać swego pędu pod działaniem sił wewnętrznych. Wszak pęd wypadkowy

$$\vec{p}_w = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots$$

Poszczególne pędy $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \dots$ pod działaniem sił wewnętrznych mogą ulegać zmianie, ale zawsze w ten sposób, by pęd wypadkowy układu pozostawał stały co do wartości liczbowej i kierunku.

Zasadę zachowania pędu zilustrujemy kilkoma przykładami. Wyskakując z łódki stojącej przy brzegu jeziora uzyskujemy pęd skierowany w stronę lądu. Równocześnie łódka – zgodnie z zasadą zachowania pędu – oddala się nieco od brzegu uzyskując pęd równy co do

wartości, lecz przeciwnie skierowany. Wypadkowy pęd układu łódka – człowiek pozostaje nadal równy zeru.

Na zasadzie zachowania pędu opiera się działanie śruby okrętowej i śmigła samolotu. Śruba odrzuca wodę do tyłu, statek uzyskuje pęd skierowany ku przodowi. Podobnie śmigło odrzuca do tyłu masy powietrza, a samolot przesuwa się naprzód.

Znane są ogólnie zjawiska „odrzutu” przy użyciu broni palnej: dubeltówka czy karabin „uderzają” strzelca, bo lufa cofa się (w stosunku do pocisku) przy wystrzale. Zjawisko odrzutu jest wykorzystywane na szeroką skalę w samolotach odrzutowych i pociskach raketowych. Zasada ich ruchu polega na tym, że w specjalnej komorze wewnętrznej odbywa się spalanie mieszanki wybuchowej. Gazy z dużą prędkością, a więc i z dużym pędem, uchodzą przez otwór w tylnej części samolotu lub rakiety, które równocześnie uzyskują pęd równy co do wartości, lecz skierowany ku przodowi.