

R o z d z i a ł 2

KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

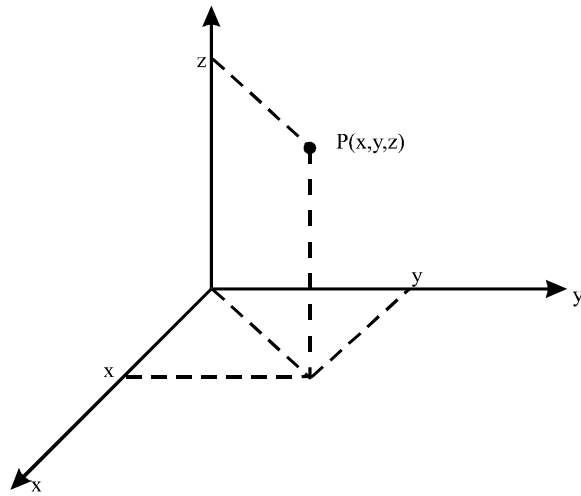
Kinematyka zajmuje się opisem ruchu ciał bez uwzględniania ich masy i bez rozpatrywania przyczyn, które ten ruch spowodowały.

Przez punkt materialny rozumiemy punkt geometryczny, w którym skupiona jest pewna masa.

2.1. Ruch bezwzględny i względny. Układ odniesienia. Układ współrzędnych.

Co to jest ruch? Punkt materialny jest w ruchu jeżeli stwierdzimy, że zmienia się jego odległość względem innego ciała. Ruch jako pojęcie absolutne nie ma sensu. Zawsze rozpatrujemy ruch względem jakiegoś innego ciała (układu). Układ, względem którego rozpatrujemy ruch będziemy nazywali układem odniesienia. Układem odniesienia może być pociąg, Ziemia, Układ Słoneczny, Galaktyka. Położenie punktu w przestrzeni określamy za pomocą współrzędnych, przy czym liczba współrzędnych potrzebna do opisanie położenia punktu jest równa liczbie wymiarów przestrzeni. Dla opisanie położenia punktu materialnego, najczęściej w fizyce, stosujemy następujące układy współrzędnych:

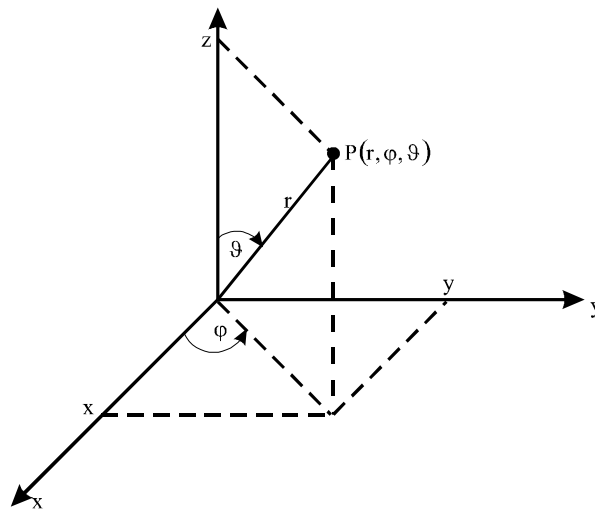
1^o Kartezjański układ współrzędnych $\{x,y,z\}$



Rys.2.1. Kartezjański układ współrzędnych

W przestrzeni trójwymiarowej oprócz współrzędnych kartezjańskich $\{x,y,z\}$ stosuje się także współrzędne sferyczne $\{r, \vartheta, \varphi\}$.

2^o Układ współrzędnych sferycznych



Rys.2.2. Układ współrzędnych sferycznych

Przejście od układu sferycznego do układu kartezjańskiego opisują wzory (2.1)

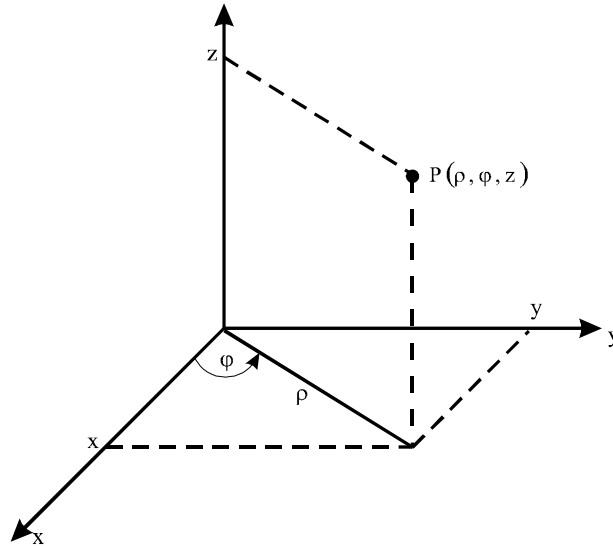
$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \tag{2.1}$$

Transformacja odwrotna (2.2) opisuje przejście z układu kartezjańskiego do układu sferycznego

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \vartheta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\
 \varphi &= \arctan \frac{y}{x}
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Trzecim często stosowanym układem współrzędnych jest układ cylindryczny $\{\rho, \varphi, z\}$.

3° Układ współrzędnych cylindrycznych



Rys.2.3. Układ współrzędnych cylindrycznych

Przejście z układu cylindrycznego do układu kartezjańskiego opisują wzory (2.3)

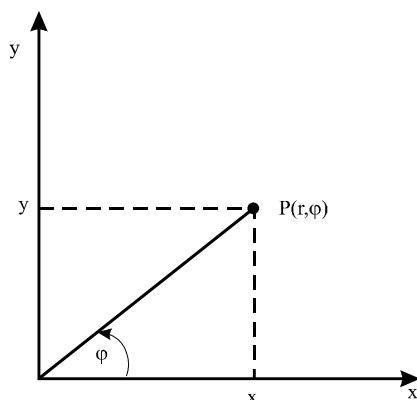
$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \varphi \\
 y &= \rho \sin \varphi \\
 z &= z
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Transformacja odwrotna (2.4) opisuje przejścia z układu kartezjańskiego do układu cylindrycznego

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\
 z &= z
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Na płaszczyźnie oprócz współrzędnych kartezjańskich $\{x, y\}$ bardzo często stosuje się współrzędne biegunowe $\{r, \varphi\}$.

4° Układ współrzędnych biegunowych



Rys.2.4. Układ współrzędnych biegunowych

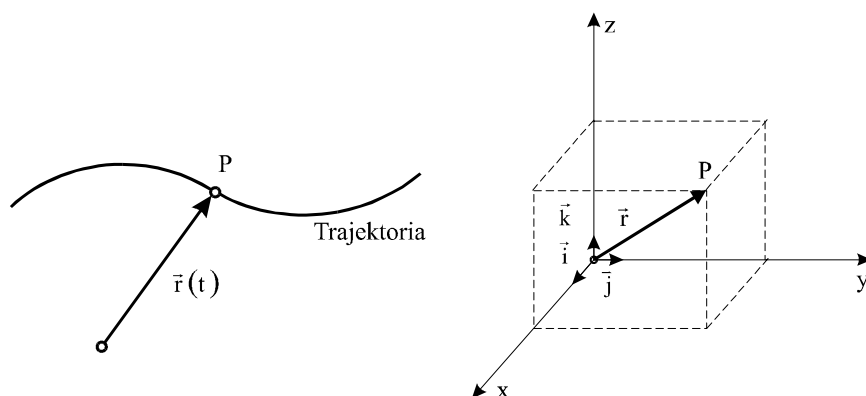
Między współrzędnymi kartezjańskimi $\{x, y\}$ i współrzędnymi biegunowymi zachodzą związki (2.5)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \varphi, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2. Ruch punktu materialnego

Chcąc opisać ruch punktu materialnego musimy wybrać układ odniesienia. Następnie wybieramy najdogodniejszy dla opisu matematycznego danego problemu układ współrzędnych.

Jeżeli potrafimy znaleźć $P\{x, y, z\}$ i przypisać temu punktowi czas t , to możemy skonstruować wektor wodzący $\vec{r} = [x, y, z]$. Krzywa opisana w czasie przez koniec wektora $\vec{r}$ nazywa się trajektorią lub torem ruchu punktu P .



Rys.2.5. Trajektoria ruchu punktu P

Wektor $\vec{r}(t)$ można napisać w postaci

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

wektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wersorami osi x, y i z w układzie kartezjańskim.

Tor punktu materialnego otrzymamy eliminując czas t z równań (2.7).

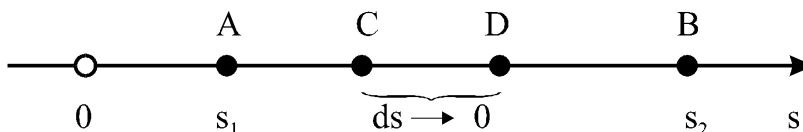
Ze względu na kształt toru ruchu punktu materialnego P wygodnie będzie nam podzielić jego ruch na prostoliniowy i krzywoliniowy.

2.3. Ruch prostoliniowy. Prędkość ruchu.

Ruchem prostoliniowym nazywamy ruch ciała (punktu materialnego) po torze będącym linią prostą. Rozważmy ruch ciała po prostej, którego położenie określa współrzędna s (rys.2.6). Ruch rozważanego ciała opisuje zależność funkcyjna

$$s=s(t) \quad (2.8)$$

gdzie: t – czas.



Rys.2.6. Określenie prędkości chwilowej w ruchu prostoliniowym.

Prędkość średnia. Jeżeli w chwili t_1 ciało zajmuje położenie A (współrzędna s_1), a w chwili t_2 położenie B (współrzędna s_2), to prędkość średnia ruchu jest definiowana wzorem

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.9)$$

Prędkość średnia jest więc ilorazem różnicowym drogi i czasu.

Ze wzoru (2.9) można określić główną jednostkę prędkości; jest nią m/s . Oprócz różnych jednostek wielokrotnych, jak np. km/s , mm/s , jest też dopuszczalna (często powszechnie stosowana) jednostka km/h .

Prędkość chwilowa. Prędkość średnia nie określa dokładnie ruchu ciała. Prawdziwy obraz ruchu ciała, np. na odcinku AB leżącym wzdłuż osi Os (rys.2.6), otrzymamy, znajdując prędkość chwilową w każdym punkcie tego odcinka. Obierzmy na tym odcinku jakiś punkt C

i w jego pobliżu punkt D. Jeżeli oznaczymy długość odcinka CD przez Δs , a czas jego przebycia przez Δt , to prędkość średnia na odcinku CD wyrazi się wzorem (2.9). Aby otrzymać prędkość chwilową, należy zbliżyć punkt D do punktu C, tzn. zmniejszać Δs i Δt . W granicy, gdy Δt dąży do 0, otrzymamy dokładną prędkość w punkcie C. Zatem

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (2.10)$$

prędkość chwilowa jest więc pochodną drogi względem czasu. Prędkość chwilową nazywamy też po prostu prędkością.

Ze wzoru (2.10) wynika, że przyrost drogi Δs w czasie od 0 do t wyraża się całką

$$\Delta s = \int_0^t v dt \quad (2.11)$$

2.3.1. Ruch prostoliniowy jednostajny.

Jeżeli prędkość ciała jest stała (nie zależy od czasu), to ruch jest jednostajny. Ze wzoru (2.11) przy założeniu, że w chwili $t=0$, $s=0$, otrzymujemy wzór na drogę w ruchu jednostajnym prostoliniowym

$$s = vt \quad (2.12)$$

Prędkość chwilowa w ruchu jednostajnym jest stała i równa prędkości średniej.

2.3.2. Ruch prostoliniowy zmienny. Przyspieszenie

Jeżeli prędkość ciała zależy od czasu, to ruch nazywamy zmiennym. Niech w chwili t_1 prędkość ciała wynosi v_1 , a w chwili t_2 niech wynosi v_2 . Przyspieszeniem średnim ruchu nazywamy iloraz różnicowy prędkości i czasu, co zapisujemy

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.13)$$

Rozumując podobnie jak przy wyznaczaniu prędkości chwilowej, wprowadzamy pojęcie przyspieszenia chwilowego. Przyspieszenie chwilowe, zwane krótko przyspieszeniem, jest pochodną prędkości względem czasu

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (2.14)$$

Z powyższego wzoru wynika, że jednostką przyspieszenia jest m/s^2 .

Uwzględniając zależność (2.10) możemy zapisać

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2.15)$$

Oznacza to, że przyspieszenie jest drugą pochodną drogi względem czasu.

Z równania (2.14) otrzymujemy

$$\Delta v = \int_0^t a dt \quad (2.16)$$

2.3.3. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny.

Ruch, w którym przyspieszenie jest stałe ($a=\text{const}$), nazywamy ruchem jednostajnie zmiennym. Jeżeli $a>0$, to ruch jest jednostajnie przyspieszony, jeżeli zaś $a<0$, to ruch jest jednostajnie opóźniony. Przypadek $a=0$ określa ruch jednostajny.

Wzór na prędkość ruchu jednostajnie zmiennego znajdziemy, całkując zależność (2.16)

$$\Delta v = \int_0^t a dt = at$$

Oznaczając prędkość początkową (gdy $t=0$) przez v_0 , a prędkość końcową przez v , otrzymujemy

$$\Delta v = v - v_0 = at$$

czyli

$$v = v_0 + at \quad (2.17)$$

Z kolei stosując ogólny wzór (2.11), znajdziemy wzór na drogę w omawianym ruchu. Mamy

$$\Delta s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

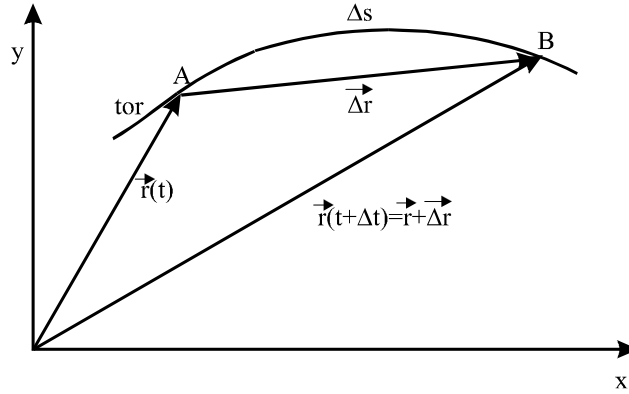
Jeśli drogę mierzymy od chwili $t=0$, wtedy $\Delta s=s$, zatem

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.18)$$

Z postaci wzorów (2.17) i (2.18) widać, że prędkość zależy liniowo od czasu, a droga jest wielomianem drugiego stopnia, zatem wykresem funkcji $s=f(t)$ jest parabola.

2.4. Ruch krzywoliniowy

Na rys.2.7. przedstawiono przykładowo tor, po którym porusza się punkt w ruchu krzywoliniowym oraz promienie wodzące określające położenie punktu w dwóch chwilach czasu. Załóżmy, że w chwili t punkt znajduje się w punkcie A, a jego położenie określone jest przez wektor wodzący $\vec{r}(t)$. Po upływie czasu Δt punkt przemieści się po swym torze do punktu B, który jest określony przez wektor $\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta \vec{r}$. Droga, jaką przebyło ciało w tym czasie, wynosi Δs .



Rys.2.7. Poruszający się punkt materialny przemieści się w czasie Δt z punktu A o wektor $\Delta \vec{r}$ do punktu B

Iloraz różnicowy przyrostu wektora $\Delta \vec{r}$ przez czas Δt , w którym ten przyrost nastąpił określa wektor prędkości średniej $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.19)$$

Prędkość średnia $\vec{v}$ jest wektorem o tym samym kierunku co wektor $\Delta \vec{r}$. Jeżeli teraz przedział czasu Δt będziemy skracać (Δt będzie dążył do zera) to stosunek $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ będzie dążył do wektora $\vec{v}$ prędkości chwilowej lub krótko prędkości $\vec{v}$ ciała w punkcie A.

Prędkość chwilowa wyraża się wzorem:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.20)$$

Wektor $\vec{v}$ jest skierowany wzdłuż stycznej do toru i ma zwrot kierunku ruchu.

Jeżeli $\Delta t \rightarrow 0$, to wartość drogi Δs przebytej przez ciało jest praktycznie równa $|\Delta \vec{r}|$. Dlatego wartość liczbowa prędkości (moduł wektora prędkości) jest równa pochodnej drogi względem czasu

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (2.21)$$

Na podstawie wzoru (2.6) wyrażenie (2.20) możemy zapisać w postaci

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (2.22)$$

gdzie v_x, v_y, v_z są współrzędnymi wektora $\vec{v}$, przy czym

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.23)$$

Współrzędne wektora prędkości są zatem pochodnymi względem czasu współrzędnych poruszającego się punktu. Wartość liczbowa prędkości chwilowej czyli moduł prędkości, może być wyrażona przez współrzędne wektora prędkości

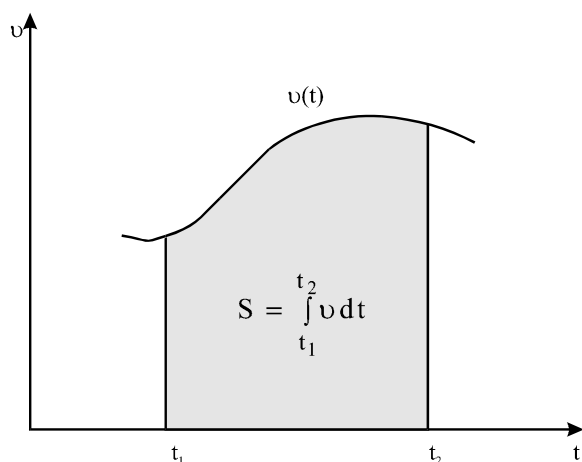
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (2.24)$$

Znajomość prędkości pozwala obliczyć drogę przebytą przez ciało (punkt materialny). Przepisując wzór (2.21) w postaci

$$ds = v dt \quad (2.25)$$

i całkując względem czasu w granicach od t_1 do t_2 , otrzymujemy drogę, jaką przebyło ciało w tym przedziale czasu

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt \quad (2.26)$$



Rys.2.8. Droga s przebyta przez poruszające się ciało w przedziale czasu od t_1 do t_2 .

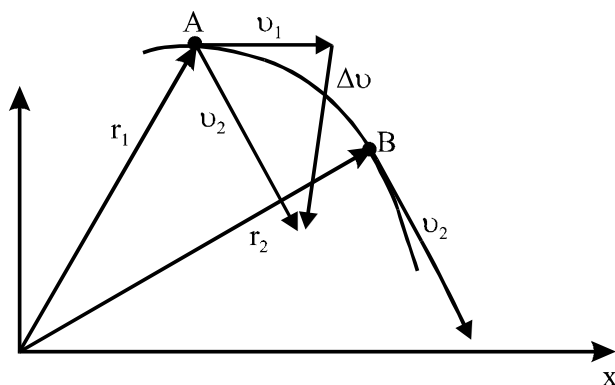
Na rys.2.8 przedstawiono graficzną interpretację zależności (2.26).

Przyspieszenie.

Rozważmy dwa blisko siebie leżące punkty A i B na torze ruchu ciała (rys.2.9) i oznaczmy wektory prędkości ciała w tych punktach odpowiednio przez $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Wektory te są styczne do toru. Ogólnie przyrost prędkości od punktu A do B wynosi:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (2.27)$$

Aby znaleźć graficznie wektor $\Delta \vec{v}$ przenosimy równolegle wektor $\vec{v}_2$ z punktu B do A; wektor $\Delta \vec{v}$ jest bokiem trójkąta zbudowanego na wektorach $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.



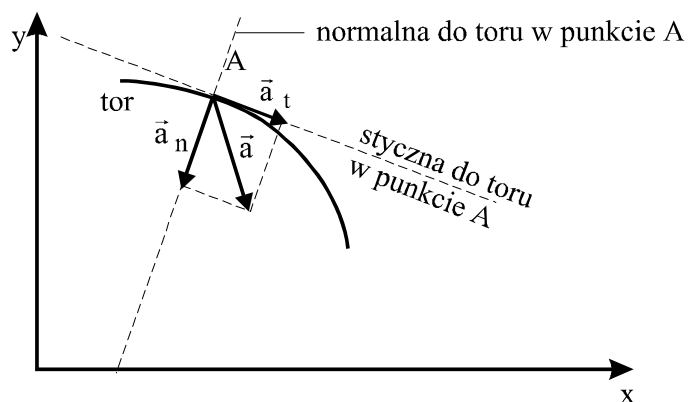
Rys.2.9. Przyrost prędkości $\Delta \vec{v}$ podzielony przez przyrost czasu Δt dąży do wektora przyspieszenia, gdy punkt B dąży do punktu A.

Utwórzmy wektor $\Delta \vec{v} / \Delta t$, gdzie Δt jest odstępem czasu, w jakim ciało przesunęło się z A do B. Jeżeli będziemy zmniejszać Δt , tzn. zbliżać punkt B do punktu A, to wektor $\Delta \vec{v} / \Delta t$ będzie w granicy dążył do wektora przyspieszenia w punkcie A, czyli

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (2.28)$$

Wektor przyspieszenia jest zatem pochodną wektora prędkości, albo drugą pochodną wektora wodzącego względem czasu.

Przyspieszenie $\vec{a}$ w ruchu krzywoliniowym możemy zawsze rozłożyć na dwie składowe: styczną $\vec{a}_t$ i normalną $\vec{a}_n$.



Rys.2.10. Przyspieszenie styczne $\vec{a}_t$ i normalne $\vec{a}_n$ w ruchu krzywoliniowym.

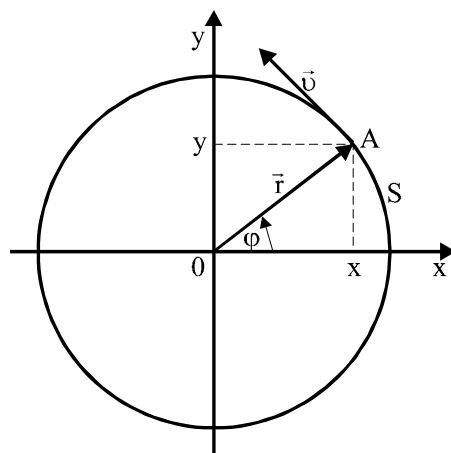
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (2.29)$$

Składowa $\vec{a}_t$ ma kierunek styczny do toru w rozpatrywanym punkcie A i charakteryzuje szybkość zmiany liczbowej wartości prędkości. Przyspieszenie to nosi nazwę przyspieszenia stycznego. W dowolnym ruchu jednostajnym ($\vec{v} = \text{const}$) $a_t = 0$.

Składowa $\vec{a}_n$ nosi nazwę przyspieszenia normalnego, gdyż ma kierunek prostopadły do stycznej toru w punkcie A. Przyspieszenie normalne charakteryzuje szybkość zmian kierunku ruchu. W każdym ruchu prostoliniowym składowa $\vec{a}_n = 0$.

2.5. Ruch po okręgu.

Ruch po okręgu jest szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego. Obierzmy układ współrzędnych Oxy tak, by początek układu znajdował się w środku koła o promieniu r (rys.2.11)



Rys.2.11 . Ruch po okręgu

Droga kątowa. Położenie punktu A na okręgu można wtedy jednoznacznie określić za pomocą kąta φ ; kąt φ nosi nazwę drogi kątowej. Jednostką drogi kątowej φ jest radian.

Drogę liniową s przebytą przez ciało po łuku koła można wyrazić za pomocą drogi kątowej następująco

$$s = \varphi r \quad (2.30)$$

Oczywiście, aby wzór ten był prawdziwy droga φ musi być wyrażona w radianach.

Prędkość kątowa. Różniczkując względem czasu obie strony równania (2.30) otrzymujemy

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} r \quad (2.31)$$

Wyrażenie po lewej stronie równania (2.31) jest prędkością liniową ciała v , natomiast pochodną drogi kątowej względem czasu, występującą po prawej stronie tego równania, nazywa się prędkością kątową ω .

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.32)$$

Prędkość liniową można więc przedstawić za pomocą prędkości kątowej i promienia w postaci

$$v = \omega r \quad (2.33)$$

Jak wynika z (2.32), jednostką prędkości kątowej jest $[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$.

Całkując wzór (2.32) otrzymujemy formułę na drogę kątową ruchu po okręgu

$$\varphi = \int_0^t \omega dt \quad (2.34)$$

Jeżeli prędkość kątowa w ruchu po okręgu jest stała, to ruch taki nazywamy ruchem jednostajnym po okręgu

Okres ruchu. Czas T potrzebny na przebycie drogi kątowej $\varphi=2\pi$ nazywamy okresem. Dla ruchu jednostajnego po okręgu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} [\text{s}] \quad (2.35)$$

Częstotliwość. Częstotliwością f ruchu po okręgu nazywamy liczbę obiegów punktu po okręgu w jednostce czasu, zatem

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.36)$$

Jednostką częstotliwości jest $[\text{s}^{-1}]$, zwana hercem [Hz].

Przyspieszenie kątowe. Gdy ruch po okręgu jest niejednostajny, prędkość kątowa ulega zmianom, możemy wówczas wprowadzić nową wielkość charakteryzującą ruch, mianowicie przyspieszenie kątowe ε , które definiujemy jako pochodną prędkości kątowej względem czasu

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.37)$$

Jednostką przyspieszenia kątowego jest $[\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}]$.

Całkując wzór (2.37) otrzymujemy

$$\omega = \int_0^t \varepsilon dt \quad (2.38)$$

W ruchu jednostajnym po okręgu $\varepsilon=0$. Ruch, w którym $\varepsilon=\text{const}\neq 0$, nazywamy ruchem jednostajnie zmiennym po okręgu.

W ruchu jednostajnym po okręgu położenie poruszającego się punktu A (patrz rys.2.11) jest jednoznacznie opisane promieniem wodzącym $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (2.39)$$

gdzie składowe $x(t)$ i $y(t)$ są rzutami wektora $\vec{r}(t)$ odpowiednio na osi $0x$ i $0y$ i wynoszą

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos \varphi = r \cos \omega t \\ y(t) &= r \sin \varphi = r \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.40)$$

Znając $\vec{r}(t)$ możemy obliczyć prędkość $\vec{v}$ w tym ruchu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} = -r\omega \sin \omega t \vec{i} + r\omega \cos \omega t \vec{j} \quad (2.41)$$

Z (2.41) wynika, że prędkość liniowa v czyli $|\vec{v}|$ ma stałą wartość

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = \omega r \quad (2.42)$$

Obliczmy iloczyn skalarny $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t)$

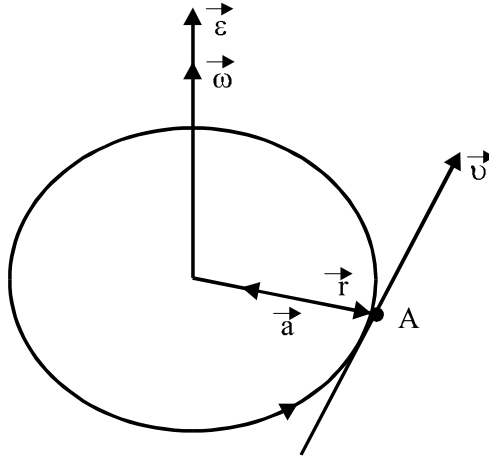
$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) &= (r \cos \omega t \vec{i} + r \sin \omega t \vec{j}) \cdot (-r\omega \sin \omega t \vec{i} + r\omega \cos \omega t \vec{j}) = \\ &= -r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t + r^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Zerowanie się iloczynu skalarnego (2.43) świadczy, że wektor $\vec{v}(t)$ jest zawsze prostopadły do wektora $\vec{r}(t)$.

Ponieważ v i r w równaniu (2.42) są wektorami, przy czym wektor $\vec{v}$ jest prostopadły do wektora $\vec{r}$, zatem zależność (2.42) możemy zapisać

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.44)$$

Z definicji iloczynu wektorowego (2.44) wynika, że wektor prędkości kołowej $\vec{\omega}$ jest prostopadły do płaszczyzny okręgu. Z racji (2.37) wektor przyspieszenia kąowego $\vec{\varepsilon}$ jest również prostopadły do płaszczyzny okręgu (patrz rys.2.12).



Rys.2.12. Wektory $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{\omega}$, i $\vec{e}$ w ruchu jednostajnym po okręgu.

Znając wyrażenie na prędkość $\vec{v}$ w ruchu jednostajnym po okręgu daną równaniem (2.41) możemy obliczyć przyspieszenie tego ruchu $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - r\omega^2 \sin \omega t \vec{j} \quad (2.45)$$

Wartość przyspieszenia a czyli $|\vec{a}|$ ma stałą wartość,

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{r^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r^2 \omega^4 \sin^2 \omega t} = \omega^2 r \quad (2.46)$$

którą np. (2.42) możemy zapisać

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (2.47)$$

Obliczmy iloczyn skalarny $\vec{v} \cdot \vec{a}$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{a} &= (-r\omega \sin \omega t \vec{i} + r\omega \cos \omega t \vec{j}) \cdot (-r\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - r\omega^2 \sin \omega t \vec{j}) = \\ &= r^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - r^2 \omega^3 \cos \omega t \sin \omega t = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Zerowanie się iloczynu skalarnego (2.48) świadczy, że przyspieszenie $\vec{a}$ w ruchu jednostajnym po okręgu jest zawsze prostopadłe do wektora prędkości $\vec{v}$. Z powyższego jak również z (2.29) wynika, że składowa styczna a_t przyspieszenia jest równa zero, zaś składowa normalna a_n wynosi

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (2.49)$$

Przyspieszenie $a = a_n$ w ruchu jednostajnym po okręgu nazywa się niekiedy przyspieszeniem dośrodkowym, podkreśla się w ten sposób, że jest ono skierowane do środka okręgu.

Trzeba raz jeszcze podkreślić, że w ruchu jednostajnym po okręgu, mimo istnienia przyspieszenia dośrodkowego, wartość liczbowa prędkości liniowej v nie ulega zmianie. Istnienie przyspieszenia dośrodkowego wpływa jedynie na zakrzywienie toru, czyli na zmiany kierunku wektora $\vec{v}$.