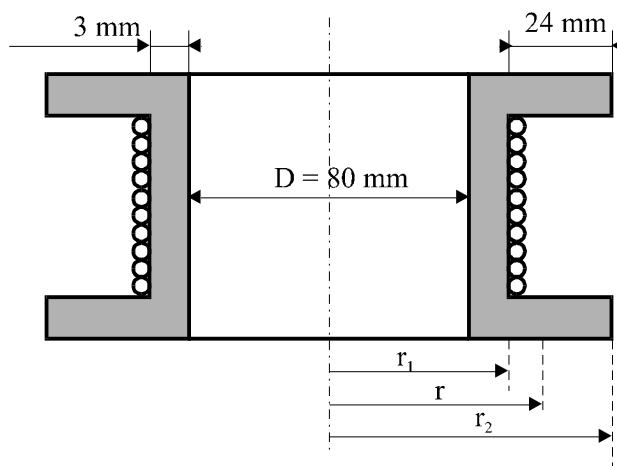


Zadania do rozdziału 9.

Zad. 9.1.

Oblicz opór elektryczny cewki, składającej się z $n = 900$ zwojów izolowanego drutu miedzianego o średnicy $d = 1\text{ mm}$ (w izolacji $1,2\text{ mm}$) w temperaturze $t = 60^\circ\text{C}$. Wymiary cewki przedstawiono na rysunku



Rozwiązanie:

Wychodzimy ze wzoru:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

gdzie: R – opór cewki w temperaturze pokojowej ($t=20^\circ\text{C}$),

$\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} [\Omega\text{m}]$ - opór właściwy miedzi (patrz tabela 9.1),

l – długość nawiniętego na cewkę drutu miedzianego,

$S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$ – pole przekroju poprzecznego drutu.

Z powodu braku danych co do długości cewki, długość l nawiniętego na cewkę drutu obliczamy (w przybliżeniu) ze wzoru:

$$l = n \cdot l''$$

gdzie: l' – to średnia długość jednego zwoju.

$$l' = 2\pi r$$

gdzie: r – to średnia wartość promienia zwoju.

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Z rysunku wynika, że

$$r_1 = 40 + 3 = 43\text{ mm} = 0.043\text{ m}$$

$$r_2 = 40 + 3 + 24 = 67\text{ mm} = 0.067\text{ m}$$

Stąd

$$r = \frac{0.043 + 0.067}{2} = \frac{0.110}{2} = 0.055m$$

Zatem $l = n \cdot 2\pi r$ i

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \frac{4 \cdot n \cdot 2\pi r}{\pi d^2}$$

$$R = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot \frac{4 \cdot 900 \cdot 2 \cdot 0.055m}{0.000001m} = 6.73 \Omega$$

Opór elektryczny cewki R_t w temperaturze $t = 60^\circ\text{C}$ obliczamy wg wzoru (9.7)

$$R_t = R[1 + \alpha(T - T_o)]$$

gdzie: $\alpha = 3.9 \cdot 10^{-3}[1/K]$ - temperaturowy współczynnik oporu miedzi (patrz tabela 9.2),

$T_o = (273.16 + 20)[K]$ - temperatura pokojowa,

$T = (273.16 + 60)[K]$ - temperatura dla której wyznaczamy R .

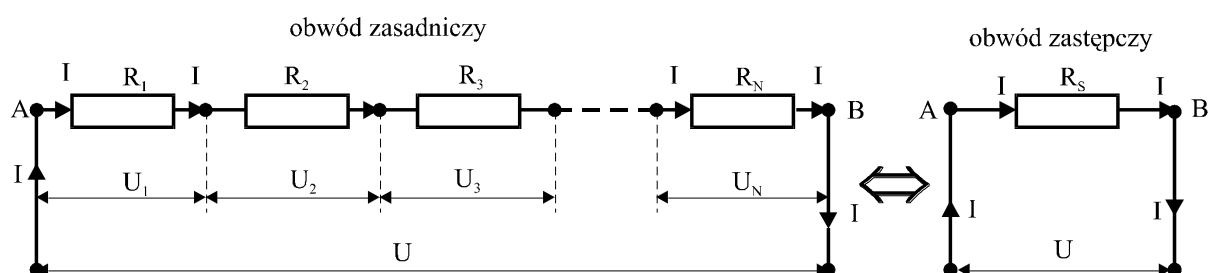
$$R_t = 6.73 \Omega [1 + 3.9 \cdot 10^{-3} 1/K \cdot 40K] = 7.78 \Omega$$

Opór elektryczny cewki, który w temperaturze pokojowej ($t=20^\circ\text{C}$) wynosił $R = 6.73 \Omega$, wzrósł do wartości $R_t = 7.78 \Omega$ w temperaturze $t = 60^\circ\text{C}$.

Zad. 9.2.

Wyznaczyć opór wypadkowy R_s dla N oporników (o oporach $R_1, R_2, R_3, \dots, R_i, \dots, R_N$) połączonych szeregowo.

Rozwiązanie:



Gdy do N oporników połączonych szeregowo podłączymy napięcie U to przez każdy opornik płynie prąd elektryczny o takim samym natężeniu I (I prawo Kirchhoffa dla węzła z dwoma przewodnikami). Zatem zgodnie z prawem Ohma,

$$\text{na oporniku } R_1 \text{ mamy spadek napięcia} \quad U_1 = IR_1$$

$$\text{na oporniku } R_2 \text{ mamy spadek napięcia} \quad U_2 = IR_2$$

$$\text{na oporniku } R_3 \text{ mamy spadek napięcia} \quad U_3 = IR_3$$

$$\text{na oporniku } R_i \text{ mamy spadek napięcia} \quad U_i = IR_i$$

na oporniku R_N mamy spadek napięcia $U_N = IR_N$

Na wszystkich U opornikach połączonych szeregowo mamy spadek napięcia U :

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_i + \dots + U_N$$

Czyli

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_i + \dots + IR_N$$

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_i + \dots + R_N) \quad (1)$$

Opór wypadkowy (zastępczy) R_S jest to opór, który podłączony do zacisków A i B obwodu (w miejsce N oporników połączonych w szereg) nie spowoduje zmiany prądu I dopływającego do węzła A i wypływającego z węzła B.

Dla obwodu zastępczego możemy zapisać:

$$U = I \cdot R_S \quad (2)$$

Z porównania równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$I \cdot R_S = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_i + \dots + R_N)$$

Stąd

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_i + \dots + R_N$$

Przy połączeniu oporników szeregowo, napięcia na poszczególnych opornikach sumują się, a natężenie prądu we wszystkich opornikach jest takie samo.

Zatem opór wypadkowy takiego połączenia wynosi:

$$R_S = \sum_{i=1}^N R_i$$

Zad. 9.3.

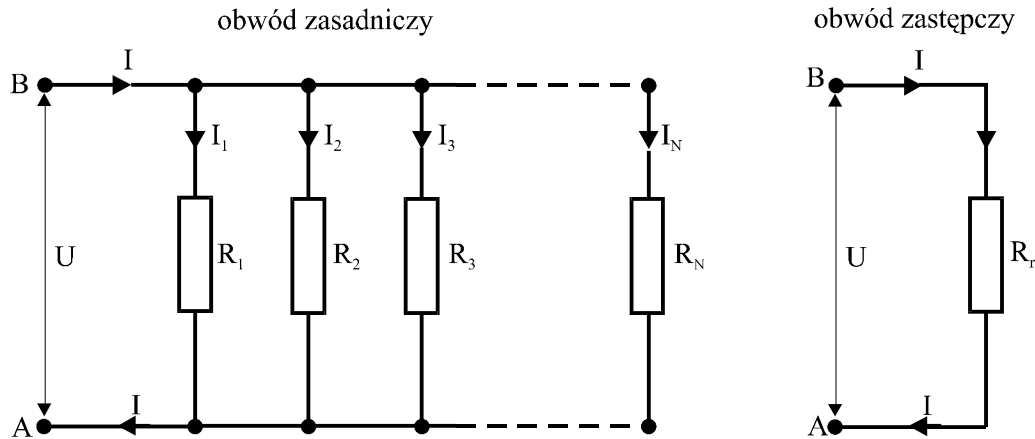
Wyznaczyć opór wypadkowy R_r dla N oporników (o oporach $R_1, R_2, R_3, \dots, R_i, \dots, R_N$) połączonych równolegle.

Rozwiązanie:

Gdy do N oporników połączonych równolegle podłączymy napięcie U to na każdym oporniku panuje to samo napięcie U .

Z I prawa Kirchhoffa wynika, że natężenie prądu I jest sumą natężeń prądów płynących w poszczególnych opornikach

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_i + \dots + I_N$$



Ale przez opornik R_1 płynie prąd $I_1 = U / R_1$

przez opornik R_2 płynie prąd $I_2 = U / R_2$

przez opornik R_3 płynie prąd $I_3 = U / R_3$

przez opornik R_i płynie prąd $I_i = U / R_i$

przez opornik R_N płynie prąd $I_N = U / R_N$

Zatem

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_i} + \dots + \frac{U}{R_N}$$

$$I = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) \quad (1)$$

Opór wypadkowy (zastępczy) R_r jest to opór, który podłączony do zacisków A i B obwodu (w miejsce N oporników połączonych równolegle) nie spowoduje zmiany prądu I dopływającego do węzła A i wypływającego z węzła B.

Dla obwodu zastępczego możemy zapisać:

$$I = \frac{U}{R_S} \quad (2)$$

Z porównania równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$\frac{U}{R_S} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)$$

Stąd

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)$$

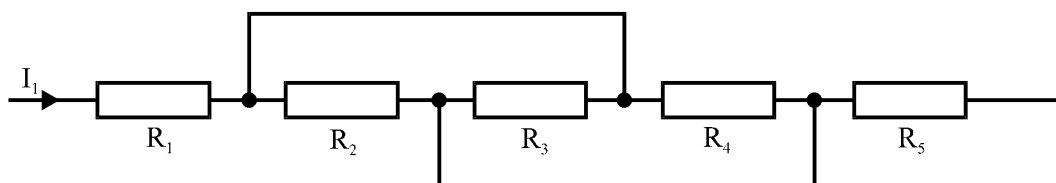
Przy połączeniu równoległym oporników, napięcia na wszystkich opornikach są te same, natomiast natężenie prądu jest sumą natężeń prądów płynących w poszczególnych opornikach.

Zatem opór wypadkowy takiego połączenia wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{R_r} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

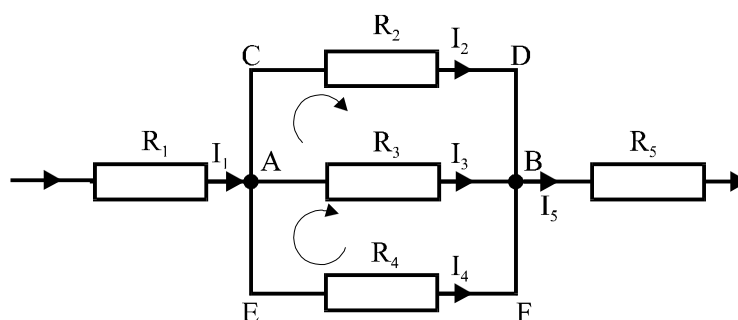
Zad. 9.4

Pięć oporników $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$, $R_3 = 3\text{k}\Omega$, $R_4 = 4\text{k}\Omega$ i $R_5 = 5\text{k}\Omega$ połączono w sposób przedstawiony na rysunku. Przez R_1 płynie prąd o natężeniu $I_1 = 0,2\text{ A}$. Obliczyć natężenie prądów płynących w pozostałych rezystorach.



Rozwiązanie:

Schemat połączeń można przerysować w postaci



Dla węzła A I prawo Kirchhoffa ma postać:

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0; \quad I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \quad (1)$$

Dla węzła B I prawo Kirchhoffa ma postać:

$$I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0; \quad I_5 = I_2 + I_3 + I_4 \quad (2)$$

Stosując II prawo Kirchhoffa dla oczka ACDB otrzymujemy:

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \quad (3)$$

Stosując II prawo Kirchhoffa dla oczka ABFE otrzymujemy:

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0 \quad (4)$$

Poszukujemy czterech niewiadomych (I_2 , I_3 , I_4 i I_5) i mamy do dyspozycji cztery równania (1, 2, 3 i 4).

Rozwiązując powyższy układ czterech równań otrzymujemy:

Z porównania równań (1) i (2) wynika, że:

$$I_5 = I_1 = 0.2 \text{ A}$$

Wyznaczając z równania (1) $I_2 = I_1 - I_3 - I_4$ i podstawiając tę wartość do (3) otrzymujemy:

$$I_3 = \frac{I_1 R_2 + I_4 R_2}{R_2 + R_3}$$

I_3 podstawiamy do równania (4) i otrzymujemy:

$$I_4 = I_1 / \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} \right) = 0.039 \text{ A}$$

Podobnie wyznaczamy: I_2 i I_3

$$I_2 = I_1 / \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_4} \right) = 0.097 \text{ A}$$

$$I_3 = I_1 / \left(1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_4} \right) = 0.064 \text{ A}$$

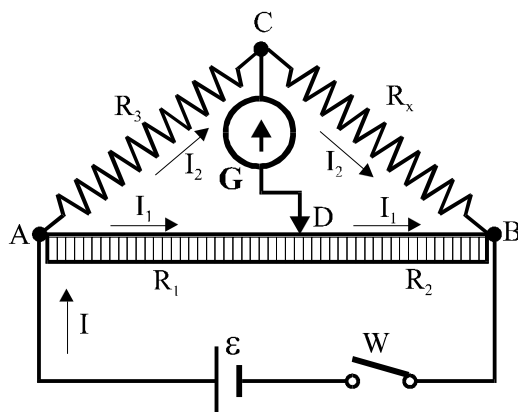
Na koniec sprawdzamy poprawność otrzymanych wyników

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 ; \quad 0,2 = 0,039 + 0,097 + 0,064$$

Zad. 9.5

Wyprowadzić warunek równowagi mostka Wheatstone'a (przyrządu do pomiaru nieznanego oporu R_x) którego schemat przedstawionego na rysunku.

Rozwiązanie:



Obwód mostka składa się ze źródła napięcia $\mathcal{E}$, reochordu AB czyli drutu oporowego o stałym przekroju S rozciągniętego na tle podziałki liniowej (linijki) od A do B, opornika wzorcowego R_3 , opornika o oporze badanym R_x , galwanometru G , suwaka na reochordzie D, klucza W oraz przewodów łączących.

Przy włączonym kluczu W , na drucie oporowym AB (na reochordzie) można znaleźć taki punkt D, w którym potencjał $V_D = V_C$. Doświadczalnie znajdujemy położenie tego punktu przesuwając ruchomy suwak wzdłuż reochordu do takiego położenia, aby wskazówka galwanometru G włączonego między punktami C i D nie odchyłała się od zera. Takie

zachowanie wskazówki galwanometru świadczy o tym, że między punktami C i D nie ma różnicy potencjałów (czyli $V_D = V_C$ a więc prąd między tymi punktami nie płynie).

W punktach A i B mamy węzły obwodu. W węźle a prąd I płynący od źródła dzieli się na prąd I_1 płynący przez drut reochordu AB, i prąd I_2 płynący przez oporniki R_3 i R_x .

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa mamy:

$$I = I_1 + I_2$$

Stosując drugie prawo Kirchhoffa odpowiednio dla oczka ACD i DCB otrzymujemy:

$$I_2 R_3 = I_1 R_1$$

$$I_2 R_x = I_1 R_2$$

Stąd (dzieląc stronami powyższe równania):

$$\frac{R_3}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}$$

Pamiętając o pierwszym prawie Ohma możemy zapisać:

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S} \quad \text{i} \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S}$$

i wtedy

$$R_x = R_3 \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

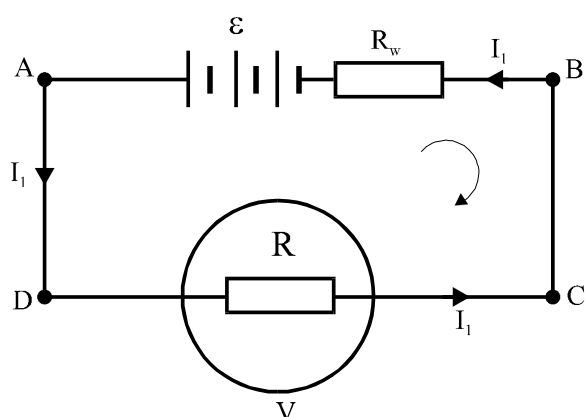
gdzie l_1 i l_2 są odległościami AD i DB drutu oporowego, odczytanymi bezpośrednio na skali podziałki liniowej reochordu.

Jak widzimy pomiar oporu metodą mostka Wheatstone'a jest pomiarem względnym, wymaga bowiem znajomości oporu wzorcowego R_3 . W zasadzie mierząc długości l_1 i l_2 otrzymujemy dane potrzebne do ustalenia stosunku R_x do R_3 .

Zad. 9.6.

Bateria akumulatorów o oporności wewnętrznej $R_w = 0.5 \Omega$ ma siłę elektromotoryczną $\mathcal{E} = 220 \text{ V}$. Oblicz napięcie U_1 na zaciskach baterii mierzone woltomierzem o oporności $R = 5000 \Omega$, oraz napięcie U_2 (mierzone tym samym woltomierzem przy poborze z baterii prądu o natężeniu $I = 24 \text{ A}$).

Rozwiązanie:



Natężenie prądu I_1 płynącego przez woltomierz obliczamy z drugiego prawa Kirchoffa dla oczka ABCD.

$$I_1 R_w + I_1 R = \varepsilon ;$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + R_w}$$

Stąd napięcie U_1 na zaciskach A i B baterii:

$$U_1 = I_1 R = \varepsilon - I_1 R_w$$

$$U_1 = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{R + R_w} \cdot R = \varepsilon \left(1 - \frac{R_w}{R + R_w} \right)$$

$$U_1 = 220 \text{ V} \left(1 - \frac{0.5 \Omega}{5000 \Omega + 0.5 \Omega} \right) = 220 \cdot 0.9999 \text{ V}$$

$$U_1 \approx 220 \text{ V}$$

Widzimy, że napięcie U_1 mierzone przez woltomierz będzie tym bliższe wartości siły elektromotorycznej ε baterii im większy będzie opór wewnętrzny R woltomierza.

Po włączeniu obciążenia zewnętrznego pobierającego prąd o natężeniu $I = 24 \text{ A}$ napięcie U_2 na zaciskach AB wyniesie:

$$U_2 = \varepsilon - I R_w$$

$$U_2 = 220 \text{ V} - 24 \text{ A} \cdot 0.5 \Omega = 220 \text{ V} - 12 \text{ V} = 208 \text{ V}$$

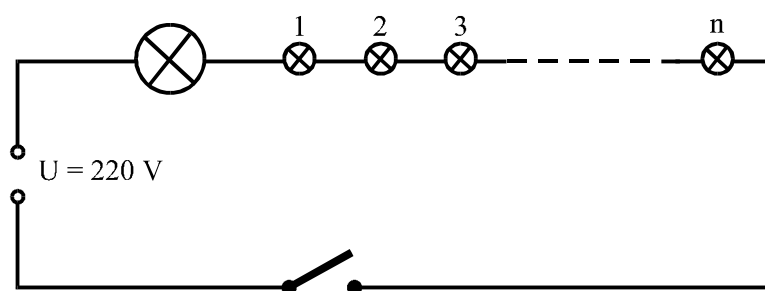
Widzimy, że przy obciążeniu baterii napięcie U_2 na jej biegunach jest znacznie mniejsze od siły elektromotorycznej ε .

Zad. 9.7.

Zaprojektować instalację oświetleniową choinki włączoną do sieci o napięciu $U = 220 \text{ V}$ i złożoną z szeregowego połączenia jednej dużej żarówki o mocy $P = 40 \text{ W}$ i napięciu znamionowym $U_1 = 220 \text{ V}$ oraz kilkunastu żarówek latarkowych o napięciu znamionowym $U_2 = 3,8 \text{ V}$ i natężeniu $I_2 = 0,1 \text{ A}$.

Oblicz niezbędną ilość żarówek n .

Rozwiązanie:



Moc P dużej żarówki wyraża się wzorem:

$$P = U_1 \cdot I_1 \quad (1)$$

gdzie I_1 jest natężeniem prądu płynącego przez żarówkę gdy jest ona podłączona do napięcia znamionowego U_1 .

Zgodnie z prawem Ohma odporność R_1 dużej żarówki opisuje równanie:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} \quad (2)$$

Stąd

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} \quad (3)$$

Podstawiając (3) do (1) otrzymujemy:

$$P = U_1 \cdot \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_1^2}{R_1} \quad (4)$$

Znając P i U_1 (dane w zadaniu) obliczamy R_1 :

$$R_1 = \frac{U_1^2}{P} \quad (5)$$

Prawo Ohma dla małej żaróweczki możemy zapisać:

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} \quad (6)$$

gdzie R_2 jest opornością małej (latarkowej) żaróweczki.

Ponieważ „duża żarówka” jest połączona w szereg z n „małych żaróweczek”, oporność R całej instalacji choinkowej wynosi:

$$R = R_1 + nR_2 \quad (7)$$

Ilość n małych żaróweczek należy tak dobrać aby prąd I płynący w instalacji

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + nR_2} \quad (8)$$

był równy prądowi dopuszczalnemu dla małych żarówek czyli

$$I = I_2 \quad (9)$$

Stąd

$$I_2 = \frac{U}{R_1 + nR_2} \quad (10)$$

Z (10) wyliczamy n

$$n = \frac{1}{R_2} \left(\frac{U}{I_2} - R_1 \right) \quad (11)$$

Po podstawieniu (6) za R_2 i (5) za R_1 otrzymujemy:

$$n = \frac{I_2}{U_2} \left(\frac{U}{I_2} - \frac{U_1^2}{P} \right)$$

$$n = \frac{0,1A}{3,8V} \left(\frac{220V}{0,1A} - \frac{(220)^2 V^2}{40V \cdot A} \right) = 26$$

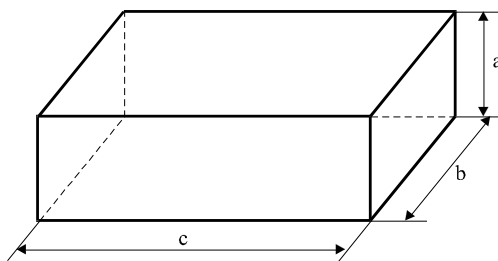
$$n = 26$$

Zad. 9.8

Stalową płytę prostokątną o wymiarach $a = 80 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$ i $c = 150 \text{ mm}$ zanurzono w wannie galwanicznej z roztworem soli niklowej i połączono z ujemnym biegunem źródła prądu. Anodę stanowi zanurzona w elektrolicie płyta niklowa o gęstości $\rho = 8,9 \text{ g/cm}^3$. Obliczyć czas t potrzebny na poniklowanie ścian płyty, jeżeli natężenie prądu płynącego przez elektrolit ma wartość $I = 25 \text{ A}$, a grubość warstwy niklu wynosi $d = 0,04 \text{ mm}$.

Rozwiązanie:

Obliczamy powierzchnię całkowitą S płyty stalowej



$$S = 2ab + 2ca + 2cb$$

$$S = 2 \cdot 0,08m \cdot 0,10m + 2 \cdot 0,15m \cdot 0,08m + 2 \cdot 0,15m \cdot 0,10m =$$

$$(0,016 + 0,024 + 0,030)m^2$$

$$S = 0,07m^2$$

Jeżeli powierzchnię S pokrywa warstwa niklu o grubości d to objętość V tej warstwy wynosi:

$$V = S \cdot d$$

$$V = 0,07 \text{ m}^2 \cdot 0,0004 \text{ m} = 0,000028 \text{ m}^3$$

$$V = 28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$$

Znając V i ρ warstwy niklu obliczamy masę m tej warstwy

$$m = \rho \cdot V \quad (1)$$

$$m = 8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 = 249,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

$$m = 0,02492 \text{ kg}$$

Zgodnie z pierwszym prawem elektrolizy Faradaya masa ta jest równa:

$$m = k \cdot I \cdot t \quad (2)$$

gdzie $k = 3,04 \cdot 10^{-7} \text{ kg} / \text{A} \cdot \text{s}$ - to równoważnik elektrochemiczny niklu (patrz tabela 9.3).

Porównując (1) i (2) otrzymujemy:

$$\rho V = kIt$$

Stąd

$$t = \frac{\rho V}{kI} = \frac{0,02492 [\text{kg}]}{3,04 \cdot 10^{-7} [\text{kg} / \text{A} \cdot \text{s}] \cdot 25 [\text{A}]} = 0,00033 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$t = 3300 \text{ s} = 55 \text{ min}$$