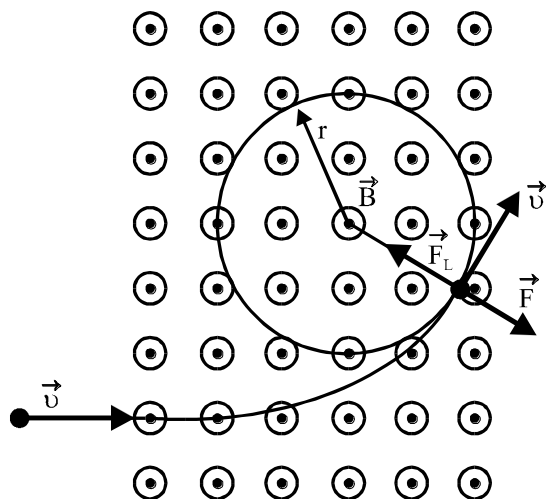


Zadania do rozdziału 8.

Zad.8.1.

Elektron (o masie $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ i ładunku elektrycznym $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) wpada z prędkością $v = 10^7 \text{ m/s}$ w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji $B = 10^{-2} \text{ T}$ prostopadle do linii sił tego pola. Znaleźć tor ruchu elektronu w polu magnetycznym.

Rozwiązanie:



Na elektron poruszający się z prędkością $\vec{v}$ w polu $\vec{B}$ działa siła Lorentza $\vec{F}_L$,

$$\vec{F}_L = -e(\vec{v} \times \vec{B}); \quad F_L = |\vec{F}_L| = evB$$

która jest skierowana prostopadle do wektorów $\vec{B}$ i $\vec{v}$.

Siła $\vec{F}_L$ działa tak, jak siła dośrodkowa ($\vec{F}_L \perp \vec{v}$), a więc zakrzywia tor elektronu.

Na poruszający się elektron o masie m z prędkością v po torze o krzywiznie r działa z kolei siła odśrodkowa F

$$F = m \frac{v^2}{r},$$

która działa wzdłuż tej samej prostej co siła F_L ale jest przeciwnie do niej skierowana.

Zatem elektron w polu magnetycznym zadania będzie poruszał się po okręgu o promieniu r w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{B}$.

Promień tego okręgu wyliczymy z warunku:

$$F_L = F \quad \text{co czyni:}$$

$$evB = m \frac{v^2}{r}$$

Stąd

$$r = \frac{mv}{eB}$$

$$r = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^7 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{-2} \text{ T}}$$

Ale

$$[T] = \left[\frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} \right]; \quad [N] = [\text{kg} \cdot \text{m/s}^2]$$

Zatem

$$r = 5,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \text{C} \cdot \text{m/s}}{\text{C} \cdot \text{N}} = 5,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}$$

$$r = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

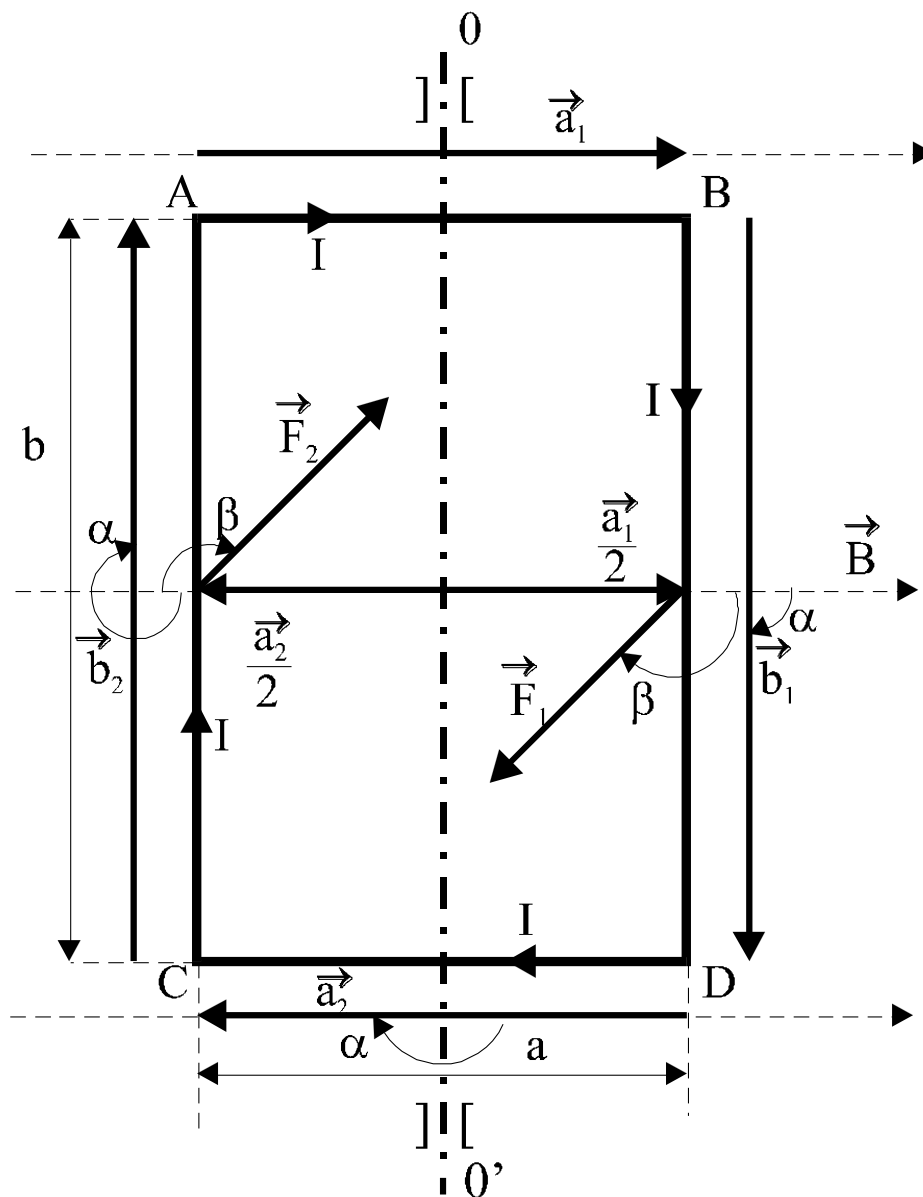
Zad.8.2.

Oblicz siły działania jednorodnego pola magnetycznego o indukcji $\vec{B}$ na osadzoną na osi 00' prostokątną ramkę ABCD z drutu o długościach boków a i b. Oś obrotu przechodzi przez bok a i jest symetralną ramki. Przez ramkę płynie prąd I.

Rozwiązanie:

a)

Założmy, że w pierwszej chwili powierzchnia ramki jest równoległa do linii siły indukcji $\vec{B}$.



Rys.a.

Korzystamy ze wzoru na siłę $\vec{F}$ działającą na prostoliniowy przewodnik o długości l z prądem I w polu magnetycznym $\vec{B}$.

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}); \quad F = |\vec{F}| = BIl \sin \alpha$$

gdzie $\vec{l}$ to wektor o długości l i zwrocie wyznaczonym przez kierunek prądu I , zaś α to kąt między wektorami $\vec{l}$ i $\vec{B}$.

Ponieważ dla boku scharakteryzowanego wektorem $\vec{a}_1$ $\alpha = 0$ ($\sin \alpha = 0$), a dla boku $\vec{a}_2$ $\alpha = \pi$ ($\sin \alpha = 0$) dlatego z boki te są równoległe wobec wektora B , a co za tym idzie nie działają na nie żadne siły.

Na boki $\vec{b}_1$ i $\vec{b}_2$ działają odpowiednio siły $F_1 = F_2 = F$ zawsze dokładnie prostopadłe do płaszczyzny rys. a (nie tworzą z nią kątów innych niż 90 stopni), tworząc parę sił.

Dla $\vec{b}_1$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\sin \alpha = 1$) i wtedy $F_1 = BIl$, zaś

dla $\vec{b}_2$; $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ ($\sin \alpha = -1$) i wtedy $F_2 = -BIl$.

Ta para sił działa na ramkę momentem obrotowym $\vec{M}$

$$\vec{M} = \frac{\vec{a}_1}{2} \times \vec{F}_1 + \frac{\vec{a}_2}{2} \times \vec{F}_2$$

$$M = |\vec{M}| = a \cdot F \cdot \sin \beta$$

gdzie $\frac{\vec{a}_1}{2}$ i $\frac{\vec{a}_2}{2}$ to ramię siły, β to kąt między $\frac{\vec{a}_1}{2}$ i $\vec{F}_1$. Kąt ten jest również zawarty między $\frac{\vec{a}_2}{2}$ i $\vec{F}_2$ (patrz rys.a).

Ponieważ w rozważanym przypadku $\beta = \frac{\pi}{2}$, dlatego

$$M = a \cdot F = BIl a$$

Moment pary sił M obraca ramkę wokół osi obrotu $00'$. Podczas obrotu kąt β maleje, więc i moment M powodujący ruch ramki maleje w myśl wzoru

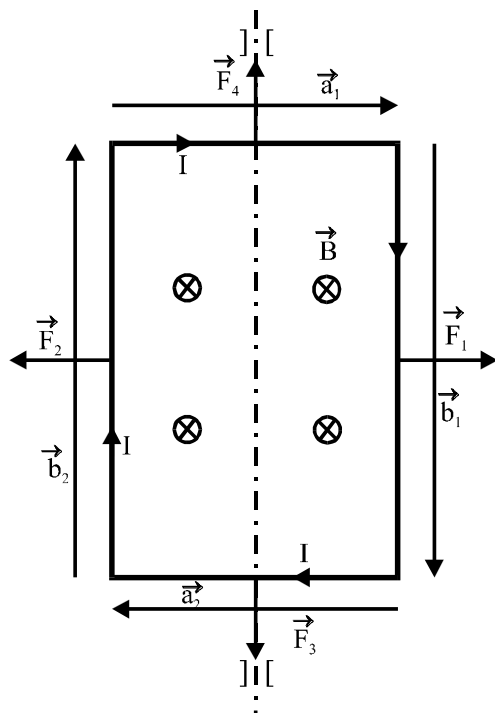
$$M = BIl a \sin \beta$$

Gdy $\beta = 0$ (wtedy płaszczyzna ramki jest prostopadła do $\vec{B}$) to

$$M = 0$$

Zobaczmy jakie siły działają na ramkę w tym położeniu.

b) Ramka w położeniu prostopadłym do linii sił pola $\vec{B}$.



Rys.b.

W tym położeniu na ramkę działają cztery siły $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ i $\vec{F}_4$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; \quad F_1 = F_2 = B I b$$

oraz

$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_3; \quad F_3 = F_4 = B I a$$

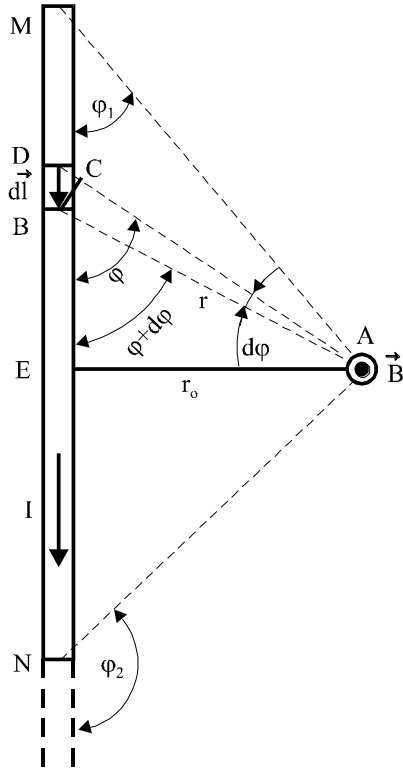
Siły te, jak widzimy na rys.b, dążą do rozciągnięcia ramki, lecz nie nadają jej ruchu obrotowego bo

$$M = 0$$

Zad. 8.3.

W prostoliniowym przewodniku o długości l płynie prąd o natężeniu I . Wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w punkcie A odległym o r_0 od przewodnika. Punkt A jest tak usytuowany w przestrzeni, że z tego punktu końce M i N przewodnika widać odpowiednio pod kątami φ_1 i φ_2 (patrz rysunek).

Rozwiązanie:



Indukcję magnetyczną $\vec{B}$ w punkcie A obliczamy z prawa B-S-L.

$$\vec{B} = \int_{\text{po całej długości przewodnika}} \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi} \frac{I}{r^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$

W naszym konkretnym przypadku B możemy przedstawić jako:

$$B = \int_{\text{po całej długości przewodnika}} \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi} \frac{I}{r^3} \sin \varphi r dl \quad (1)$$

Ale z trójkąta AEB wynika, że

$$r = \frac{r_o}{\sin \varphi} \quad (2)$$

Z trójkąta DCB otrzymujemy:

$BC = dl \cdot \sin \varphi$, gdzie BC możemy obliczyć z definicji kąta łukowego

$$\frac{BC}{r} = d\varphi$$

Zatem

$$dl = \frac{r d\varphi}{\sin \varphi} \quad (3)$$

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy:

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_o \mu_r \sin^2 \varphi}{4\pi r_o^2} \cdot I \sin \varphi \frac{r_o}{\sin \varphi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$$

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi r_o} \cdot I \sin \varphi d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r_o} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r_o} (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r_o} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

Gdy przewód jest nieskończenie długi to

$$\varphi_1 = 0 \quad a \quad \varphi_2 = \pi$$

Wtedy

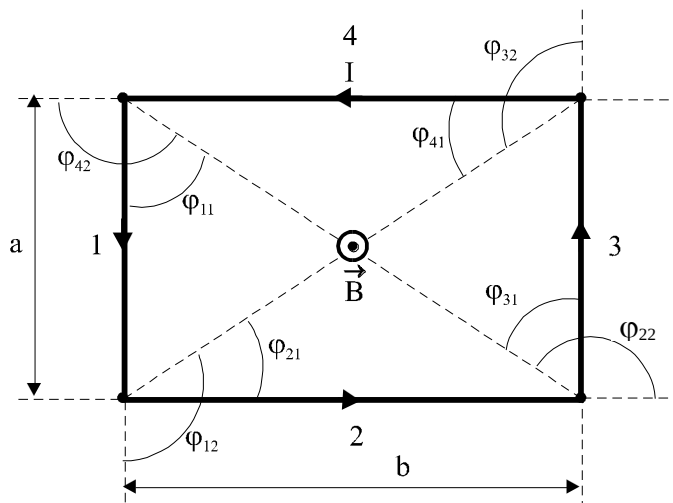
$$B = \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r_o} [1 - (-1)]$$

$$B = \frac{\mu_o \mu_r I}{2\pi r_o}$$

Zad. 8.4

Dana jest prostokątna ramka o bokach a i b , w której płynie stały prąd elektryczny o natężeniu I . Znaleźć kierunek i wartość wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w środku ramki.

Rozwiązanie:



Z prawa B-S-L wynika, że $\vec{B}$ w środku ramki jest wektorową sumą $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ i $\vec{B}_4$ wektorów indukcji pochodzących od poszczególnych boków ramki.

Wektory $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ i $\vec{B}_4$ leżą wszystkie na jednej prostej, prostopadłej do płaszczyzny ramki i przechodzącej przez jej środek.

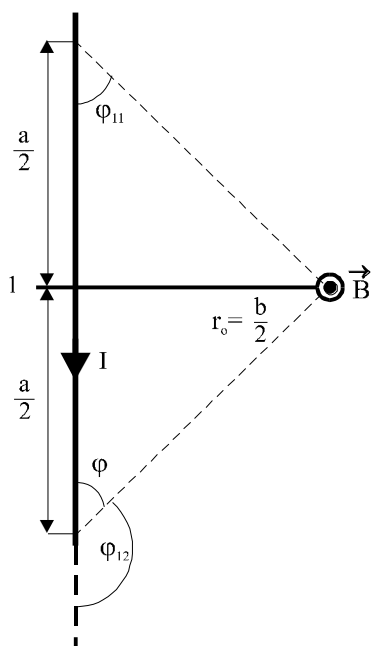
Zwroty tych wektorów są zgodne i są skierowane w stronę czytelnika.

Zatem

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

Przyczynki B_1, B_2, B_3 i B_4 obliczamy korzystając z wiadomości zdobytych w zad.8.2.

$$B_1 = \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r_o} (\cos \varphi_{11} - \cos \varphi_{12})$$



$$\text{ale } r_o = \frac{b}{2}; \quad \cos \varphi_{11} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos \varphi_{12} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

bo

$$\cos \varphi_{12} = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi = -\cos \varphi_{11}$$

ponieważ $\varphi = \varphi_{11}$

Zatem

$$B_1 = \frac{\mu_o \mu_r \cdot I}{4\pi \cdot b/2} \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\mu_o \mu_r I a}{\pi b \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Analogicznie

$$B_2 = \frac{\mu_o \mu_r \cdot I}{4\pi \cdot a/2} (\cos \varphi_{21} - \cos \varphi_{22}) = \frac{\mu_o \mu_r I b}{\pi a \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$B_3 = \frac{\mu_o \mu_r \cdot I}{4\pi \cdot b/2} (\cos \varphi_{31} - \cos \varphi_{32}) = \frac{\mu_o \mu_r I a}{\pi b \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$B_4 = \frac{\mu_o \mu_r \cdot I}{4\pi \cdot a/2} (\cos \varphi_{41} - \cos \varphi_{42}) = \frac{\mu_o \mu_r I b}{\pi a \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ostatecznie

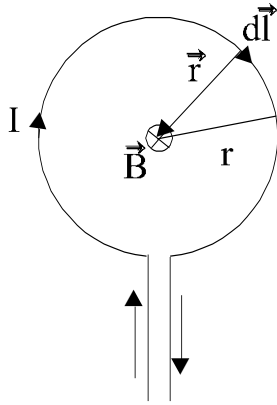
$$B = \frac{\mu_o \mu_r I}{\pi} \left(\frac{a}{b \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{a \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a}{b \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{a \sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$B = \frac{\mu_o \mu_r I}{\pi} \frac{2(a^2 + b^2)}{ab \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\mu_o \mu_r I}{\pi ab} \sqrt{a^2 + b^2}$$

Zad. 8.5.

Wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w środku obwodu kołowego o promieniu r , w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu I .

Rozwiązanie:



Zgodnie z prawem B-S-L wszystkie elementy $d\vec{l}$ tego obwodu z prądem I wywołują w środku okręgu indukcję

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi} \frac{I}{r^3} (d\vec{l} \times \vec{r})$$

o jednakowych kierunkach (wzdłuż prostej prostopadłej do płaszczyzny obwodu i przechodzącej przez środek okręgu) i zwrotach (za płaszczyznę rysunku).

A zatem całkowanie wektorowe sprowadza się do całkowania skalarnego

$$B = \int_{\text{po okręgu}} dB = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi r^2} I dl$$

bo kąt ϕ między wektorami $\vec{r}$ i $d\vec{l}$ wynosi $\frac{\pi}{2}$, a więc $\sin \phi = 1$.

Stąd

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} dl \\ B &= \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r^2} l \Big|_0^{2\pi r} = \frac{\mu_o \mu_r \cdot I}{4\pi r^2} [2\pi r - 0] \\ B &= \frac{\mu_o \mu_r I}{2r} \end{aligned}$$

Zad. 8.6.

Obliczyć indukcję magnetyczną $\vec{B}$ na osi obwodu kołowego w odległości d od środka obwodu. Natężenie prądu w obwodzie wynosi I , a promień obwodu R .

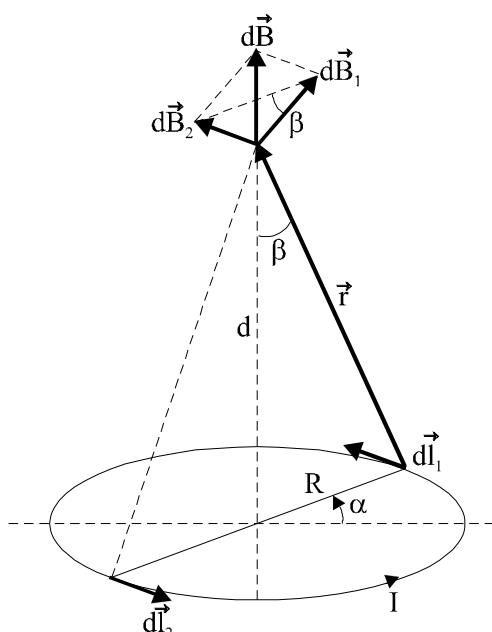
Rozwiązanie:

Wychodząc z prawa B-S-L

$$d\vec{B}' = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}); \quad \text{gdzie } \mu = \mu_o \mu_r$$

Ponieważ wektor $d\vec{l}$ oraz wektor wodzący $\vec{r}$ tworzą kąt $\frac{\pi}{2}$, więc

$$dB' = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I}{r^2} dl$$



Wektory indukcji $d\vec{B}_1$ i $d\vec{B}_2$ od symetrycznie położonych elementów $d\vec{l}_1$ i $d\vec{l}_2$ przewodnika są równe co do modułu i symetrycznie położone względem siebie, zatem wartość indukcji wypadkowej od oby elementó w wynosi:

$$dB = 2dB' \sin \beta = \frac{\mu \cdot I \cdot \sin \beta dl}{2\pi r^2}$$

Wektor indukcji $d\vec{B}$ jest prostopadły do powierzchni obwodu, i skierowany od obwodu.

Wypadkową indukcję od całego przewodnika otrzymamy całkując powyższe równanie po połowie okręgu czyli od 0 do πR

$$B = \frac{\mu \cdot I \cdot \sin \beta}{2\pi r^2} \int_0^{\pi R} dl = \frac{\mu \cdot I \cdot \sin \beta}{2\pi r^2} \pi R$$

Uwzględniając, że $\sin \beta = \frac{R}{r}$ i $r = \sqrt{R^2 + d^2}$, otrzymamy

$$B = \frac{\mu I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \quad (*)$$

Zad. 8.7.

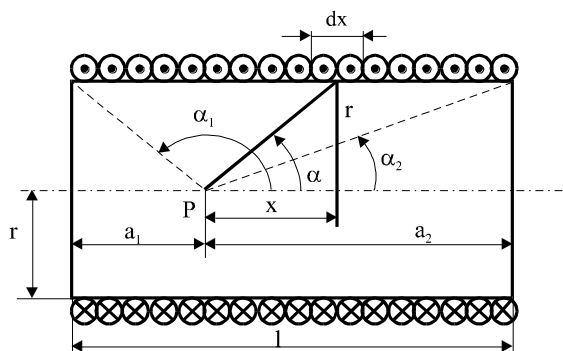
Wyznaczyć natężenie H pola magnetycznego na osi cewki cylindrycznej (solenoidu) z równomiernie i gęsto nawiniętymi zwojami, przez które przepływa prąd o natężeniu I . Cewka ma n zwojów, długość l i promień przekroju poprzecznego r . Położenie punktu P , dla którego liczymy H , określają odcinki a_1 i a_2 mierzone od końca cewki. Przedyskutować otrzymany wynik.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w rozpatrywanym punkcie P . Kierunek prądu w uzwojeniu niech będzie taki, jak na rysunku. Jeżeli wziąć pod uwagę kołowy element cewki o długości dx , to można go traktować jak cienki przewódni k kołowy i wykorzystać wynik z zadania 8.6.

Na jednostkę długości solenoidu przypada $(I \cdot n)/l$ amperozwojów czyli prąd dI płynący w elemencie dx solenoidu wynosi:

$$dI = \frac{I \cdot n}{l} dx$$



Podstawiając do wyniku końcowego (*) z zadania 8.6 za $d \rightarrow x$, za $R \rightarrow r$ i za $I \rightarrow dl$ solenoidu oraz wiedząc, że między wektorami $\vec{H}$ i $\vec{B}$ zachodzi związek $\vec{B} = \mu \vec{H}$ otrzymujemy:

$$dH = \frac{I \cdot n}{2l} \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{I \cdot n}{2lr} \frac{r^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

Aby znaleźć H w punkcie P należy powyższe wyrażenie scałkować po dx w granicach od a_1 do a_2 . W tym celu zmieniamy zmienną całkowania i przechodzimy do całkowania po kącie α (patrz rysunek). Z rysunku wynika, że

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{oraz} \quad x = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

czyli

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{r}{\sin^2 \alpha}$$

Stąd

$$dx = -\frac{r}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

Zatem

$$dH = -\frac{I \cdot n}{2lr} \sin^3 \alpha \cdot \frac{r}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$dH = -\frac{I \cdot n}{2l} \sin \alpha d\alpha$$

i

$$H = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dH = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\frac{I \cdot n}{2l} \sin \alpha d\alpha = \frac{In}{2l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha$$

$$H = \frac{I \cdot n}{2l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Wyrażając kąty za pomocą odcinków określających położenie punktu P otrzymuje się:

$$\cos \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt{r^2 + a_2^2}}$$

$$\cos(\pi - \alpha_1) = -\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{r^2 + a_1^2}}$$

Wtedy:

$$H = \frac{In}{2l} \left(\frac{a_1}{\sqrt{r^2 + a_1^2}} + \frac{a_2}{\sqrt{r^2 + a_2^2}} \right)$$

Jeżeli solenoid jest długi ($l \gg r$), to można przyjąć, że:

$$a_1 \gg r \quad i \quad a_2 \gg r$$

to wówczas natężenie pola H jest w całym solenoidzie takie samo i wynosi:

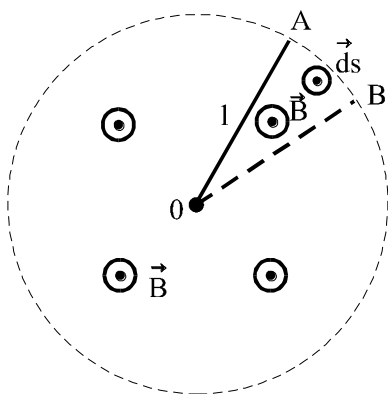
$$H = \frac{In}{2l} (1 + 1) = \frac{In}{l}, \quad H = \frac{In}{l}$$

Widzimy więc, że natężenie pola magnetycznego H wewnątrz solenoidu jest wprost proporcjonalne do ilości zwojów n solenoidu, a odwrotnie proporcjonalne do jego długości l .

Zad. 8.8.

Wyprowadź z prawa Faradaya wzór na siłę elektromotoryczną $\mathcal{E}$ indukowaną w pręcie o długości l , obracającym się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ ze stałą prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez jeden z końców pręta i prostopadłej do niego. Płaszczyzna obrotu jest prostopadła do $\vec{B}$.

Rozwiązanie:



Wychodzimy ze znanego wzoru:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Elementarny strumień $d\Phi_B$ przecinany przez wirujący pręt w ciągu czasu dt wynosi:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

gdzie $\vec{ds}$ jest to wektor powierzchni, którego moduł równa się wielkości powierzchni ds (zakreślonej przez pręt o długości l) i jest prostopadły do powierzchni ds .

Ponieważ $\vec{B} \parallel \vec{ds}$ (czyli kąt α jaki tworzą te dwa wektory wynosi 0 i wtedy $\cos \alpha = 1$) możemy zapisać:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{ds} = B \cdot ds \cdot \cos \alpha = B \cdot ds$$

Przybliżając pole ds zakreślone przez pręt w czasie dt polem trójkąta OAB mamy:

$$ds = \frac{1}{2} AB \cdot l$$

Odcinek AB trójkąta wyznaczamy z definicji miary łukowej kąta.

$$\frac{AB}{l} = d\alpha$$

gdzie droga kątowna $d\alpha = \omega \cdot dt$

Zatem

$$AB = l \cdot \omega \cdot dt$$

a $ds = \frac{1}{2} l^2 \omega dt$

i wtedy $d\Phi_B = \frac{1}{2} B l^2 \omega dt$

Ostateczny wzór na ε zaindukowaną w pręcie ma postać:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} B l^2 \omega$$