

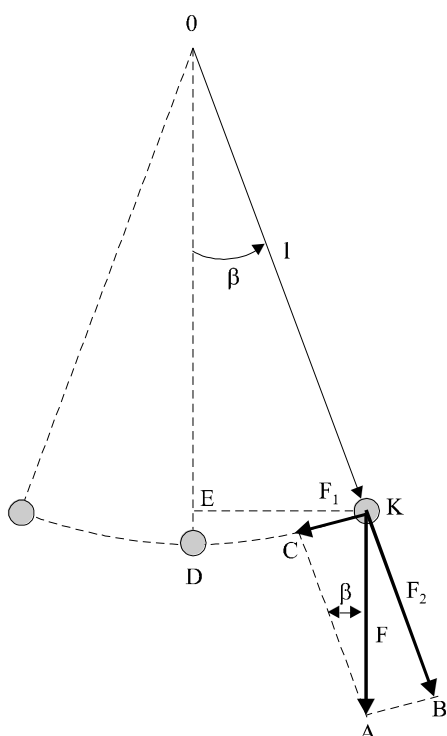
Zadania do rozdziału 6

Zad.6.1.

Wyprowadzić równanie ruchu drgań wahadła matematycznego. Oblicz okres T wahadła matematycznego o długości $l=10$ m.

Rozwiązanie:

Wahadło matematyczne jest to punkt materialny (np. w postaci kulki K o masie m i bardzo małym promieniu) zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici. Wychylając nić o niewielki kąt β od położenia pionowego i puszczając swobodnie kulkę K wywołujemy jej drgania dookoła położenia równowagi D .



W dalszych rozważaniach pomijając będziemy siły oporu zakładając, że na kulkę działa tylko siła ciężkości $F = mg$.

Siłę tę rozkładamy na dwie składowe. Jedną z nich F_2 działa wzdłuż nici powodując tylko jej naprężenie, druga F_1 styczna do toru wahadła, wywołuje jego ruch w kierunku punktu równowagi D z przyspieszeniem a . Przyspieszenie liniowe a obliczamy ze wzoru

$$a = |\vec{a}| = |\vec{\varepsilon} \times \vec{l}| = \varepsilon \cdot l$$

gdzie $\vec{\varepsilon}$ to wektor przyspieszenia kąowego wahadła, którego wartość wynosi:

$$\varepsilon = \frac{d^2\beta}{dt^2}$$

Zatem

$$a = \frac{d^2\beta}{dt^2} \cdot l$$

Przyspieszenie a wywołuje siła $F_1 = F \cdot \sin \beta$.

Stosując II zasadę dynamiki Newtona dla ruchu postępowego otrzymujemy

$$m \cdot a = -F_1$$

Znak $(-)$ przy F_1 bo wektor $\vec{F}_1$ jest przeciwnie skierowany do wychylenia β .

$$m \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} \cdot l = -mg \cdot \sin \beta$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \beta \quad (1)$$

Widzimy, że powyższe równanie ruchu wahadła matematycznego nie jest równaniem ruchu drgań harmonicznym o ogólnej postaci

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\omega_o^2 A \quad (2)$$

Gdy kąty β wychylenia nici od położenia pionowego są małe (nie przekraczają $5-6^\circ$), wówczas dla β mierzonego w radianach zachodzi

$$\sin \beta \approx \beta$$

Wtedy równanie (1) przyjmuje postać

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \beta \quad (3)$$

Równanie (3) jest równaniem drgań harmonicznym wahadła matematycznego. Porównując (2) i (3) widzimy, że

$$\omega_o^2 = \frac{g}{l}$$

$\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ gdzie T – okres drgań

Stąd

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

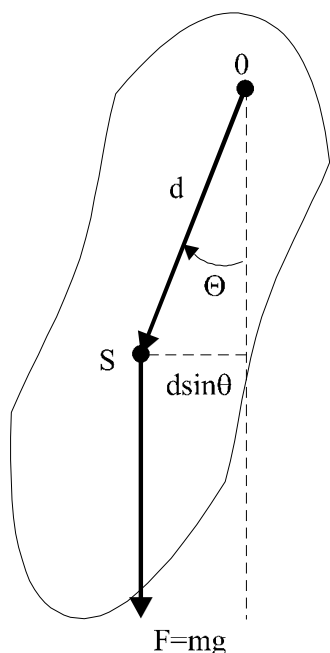
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{10m}{9.81m/s^2}} \approx 6.28s$$

Okres drgań wahadła matematycznego o długości $l=10$ m wynosi 6.28 s.

Zad.6.2.

Wyprowadź równanie ruchu drgań wahadła fizycznego wokół osi 0 umieszczonej w odległości d od środka ciężkości S tego wahadła. Masa wahadła wynosi m zaś moment bezwładności wynosi I .

Rozwiązanie:



Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna dowolnego kształtu o środku ciężkości w punkcie S, zawieszona w ten sposób, że może się obracać bez tarcia dookoła osi poziomej przechodzącej przez punkt O.

Odległość OS od środka ciężkości do osi obrotu oznaczmy przez d , masę bryły przez m , zaś moment bezwładności bryły względem osi obrotu przez I .

Na rysunku wahadło jest już wychylone od położenia równowagi.

Miarą wychylenia jest kąt θ oznaczony na rysunku. W tym położeniu na wahadło działa moment siły ciężkości M , równy $M = |\vec{M}| = |\vec{d} \times \vec{F}| = -mgd \sin \theta$.

Moment M skierowuje wahadło w stronę położenia równowagi (przeciwnie do wychylenia θ) co uwzględnia znak (-).

Stosując drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego bryły sztywnej otrzymujemy

$$\begin{aligned} I \cdot \varepsilon &= M \\ I \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= mgd \cdot \sin \theta \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \frac{mgd}{I} \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Widzimy, że powyższe równanie ruchu wahadła fizycznego nie jest równaniem ruchu drgań harmonicznym o ogólnej postaci

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -\omega_o^2 A \quad (2)$$

Gdy kąty θ wychylenia wahadła od położenia pionowego są małe (nie przekraczają $5-6^\circ$), wówczas dla θ mierzonego w radianach zachodzi

$$\sin \theta \approx \theta$$

Wtedy równanie (1) przyjmuje postać

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \theta \quad (3)$$

Równanie (3) jest równaniem drgań harmonicznym wahadła fizycznego. Porównując (2) i (3) widzimy, że częstość kołowa ω drgań własnych wahadła fizycznego wynosi

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgd}{l}}$$

Iloczyn mgd jest maksymalną wartością momentu siły ciężkości odpowiadającą wychyleniu wahadła o kąt $\theta = 90^\circ$ od położenia równowagi. Nazywamy ją momentem kierującym wahadła i oznaczamy literą D:

$$D=mgd.$$

Zatem

$$\omega_o = \sqrt{\frac{D}{l}}, \quad \text{zaś okres drgań}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{D}}$$

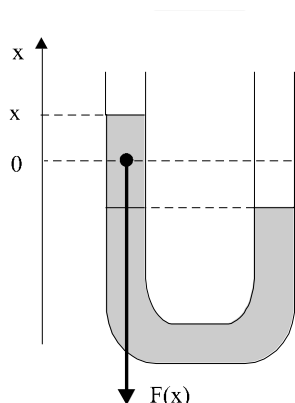
Zauważmy, że wahadło matematyczne (zad.6.1) można uważać za przypadek szczególny wahadła fizycznego. Podstawiając $I = ml^2$ i $D=mgd$ otrzymujemy znany wzór na okres wahadła matematycznego:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Zad.6.3.

Rura o przekroju $S = 0,3 \text{ cm}^2$ zgięta w kształcie litery U wypełniona jest słupem cieczy o masie $m = 121 \text{ g}$ i gęstości $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$. Ciecz wytrącono z położenia równowagi. Czy drgania będą harmoniczne? Od czego zależy okres T drgań.

Rozwiązanie:



Gdy wytrącimy ciecz z równowagi o x to na całą masę m cieczy działa siła $F(x) = -2x \cdot S \cdot \rho \cdot g$, (równa ciężarowi fragmentu cieczy $2x$ wychylonego z położenia równowagi) powodująca powrót cieczy do położenia równowagi.

Stosując drugą zasadę dynamiki Newtona dla tego układu otrzymujemy

$$m \cdot a = F(x) \quad (1)$$

Wiedząc, że $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ (1) możemy zapisać:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -2x \cdot S \cdot \rho \cdot g$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2 \cdot S \cdot \rho \cdot g}{m} \cdot x \quad (2)$$

Widzimy, że równanie ruchu drgań słupa cieczy w U-rurce jest równaniem ruchu drgań harmonicznym o ogólnej postaci

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\omega_o^2 A \quad (3)$$

Porównując (2) i (3) obliczamy

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2S\rho g}{m}}, \quad \text{oraz}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.121 \text{ kg}}{2 \cdot (0.3 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2 (13.6 \cdot 10^3) \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}} \cong 0.8 \text{ s}$$

Zad.6.4.

Obliczyć logarytmiczny dekrement tłumienia λ drgań, jeżeli w ciągu $t = 10$ s trwania ruchu, energia mechaniczna drgającej na sprężynie o stałej sprężystości k masy m maleje do połowy. Okres drgań ruchu tłumionego wynosi $T = 2$ s.

Rozwiązanie:

Z definicji $\lambda = \ln \frac{A_o e^{-\beta t}}{A_o e^{-\beta(t+T)}} = \beta T$

Dla chwili $t_1=0$ amplituda drgań wynosi: $A_1 = A_o e^{-\beta t_1} = A_o$

Dla chwili $t_2=t$ amplituda drgań wynosi: $A_2 = A_o e^{-\beta t}$

Energia mechaniczna E w każdej chwili t drgań jest równa sumie energii potencjalnej E_p i kinetycznej E_k i wynosi:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} k A^2$$

gdzie A to amplituda drgań w danej chwili.

Zatem

w chwili $t_1 = 0$ energia układu wynosi $E_1 = \frac{1}{2} k A_1^2$,

a w chwili $t_2 = t$ energia układu wynosi $E_2 = \frac{1}{2} k A_2^2$.

Zatem
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k A_1^2}{\frac{1}{2} k A_2^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = 2$$

Czyli
$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{2}$$

Ale
$$A_1 = A_0, \quad A_2 = A_0 e^{-\beta t}$$

Zatem

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta t}} = \sqrt{2}; \quad e^{\beta t} = \sqrt{2};$$

$$\beta t = \ln \sqrt{2} \quad \text{stąd} \quad \beta = \frac{1}{t} \cdot \ln 2$$

Znając β i T obliczamy λ

$$\lambda = \beta T = \frac{T}{t} \ln 2$$

$$\lambda = \frac{2s}{10s} \cdot \ln 2 = 0.2 \ln 2 \cong 0.1386$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia λ wynosi 0.1386.

Zad.6.5.

Równanie drgań niegasnących dane jest w postaci $y = 10 \sin(0,5\pi t)$ [cm].

- Znaleźć równanie fali, jeśli prędkość v rozchodzenia się drgań wynosi 300 m/sek.
- Napisać i przedstawić graficznie równanie drgań dla punktu odległego o $x = 600$ m od źródła drgań.
- Przedstawić analitycznie i graficznie równanie drgań dla punktów fali w momencie czasu $t = 4s$ od początku drgań.

Rozwiązanie:

Równanie fali możemy zapisać

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (1)$$

Równanie (źródła fali) drgań niegasnących ma postać

$$y(t) = 10 \sin(0,5\pi \cdot t) \quad (2)$$

Równanie drgań punktu dla $x=0$, czyli źródła fali, opisane przez równanie fali (1) wynosi

$$y(0, t) = A \sin \left(\omega t - \frac{0}{v} \right) = A \sin \omega t \quad (3)$$

Porównując (2) i (3) zauważamy, że

$$A=10 \text{ cm} \quad \omega = 0.5\pi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{s} \right]$$

Wiedząc, że $\omega = \frac{2\pi}{T}$ obliczamy T

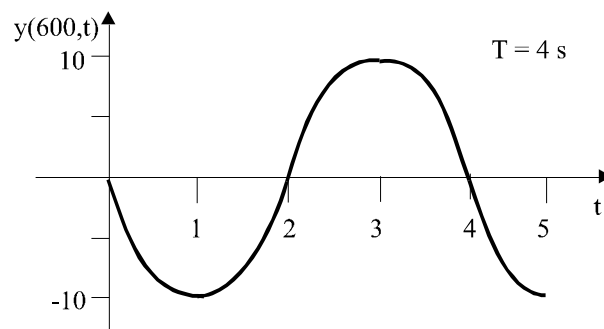
$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}; \quad T = 4s.$$

Ad.a Ogólne równanie fali ma postać

$$y(x, t) = 10 \sin \frac{\pi}{2} \left(t - \frac{x}{300} \right)$$

Ad.b Równanie fali dla x = 600 m ma postać

$$y(600, t) = 10 \sin \frac{\pi}{2} \left(t - \frac{600}{300} \right) = 10 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot t - \pi \right) = -10 \sin \frac{\pi}{2} t$$

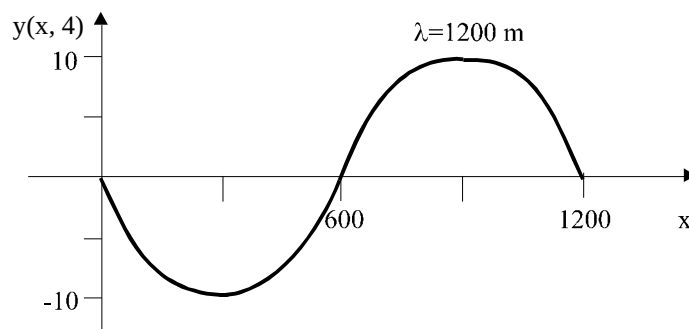


Ad.c. Równanie fali dla t=4 s ma postać

$$y(x, 4) = 10 \sin \frac{\pi}{2} \left(4 - \frac{x}{300} \right) = 10 \sin \left(2\pi - \frac{\pi \cdot x}{2 \cdot 300} \right)$$

$$y(x, 4) = -10 \sin \frac{\pi x}{600}$$

Widzimy, że $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{600}$, czyli $\lambda=1200 \text{ m}$.



Zad.6.6.

Drgania akustyczne mające częstotliwość $\nu=500$ Hz i amplitudę $A=25$ mm rozchodzą się w powietrzu. Długość fali wynosi $\lambda=70$ cm. Znaleźć: a) prędkość rozchodzenia się drgań, b) maksymalną prędkość cząstek powietrza.

Rozwiązanie:

Równanie fali ma postać:

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

Ad.a Między prędkością v rozchodzenia drgań a λ , T i ν zachodzi związek

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$$

$$v = 0.7 \text{ m} \cdot 500 \frac{1}{\text{s}} = 350 \text{ m/s}$$

Prędkość rozchodzenia się drgań w powietrzu wynosi 350 m/s.

Ad.b Maksymalną prędkość drgań cząstek V obliczamy z zależności

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

$$V = A\omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

gdy $\cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = 1$

to $V_{\max} = A\omega$

Ale $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

Wtedy $V_{\max} = A \cdot 2\pi\nu$

$$V_{\max} = 0.025 \text{ m} \cdot 6.28 \cdot 500 \frac{1}{\text{s}} = 78.5 \text{ m/s}$$

Maksymalna prędkość drgań cząstek powietrza wynosi 78.5 m/s.

Zad.6.7.

Jaką różnicę faz $\Delta\varphi$ będą miały drgania dwóch punktów, znajdujących się w odległości $x_1=10$ m i $x_2=16$ m od źródła drgań. Okres drgań wynosi $T = 0,04$ s i prędkość rozchodzenia się drgań - $v=300$ m/sek.

Rozwiązanie:

Równanie fali ma postać

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \varphi$$

gdzie $\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ - to faza drgań punktu (x,t).

$$y(x_1, t) = A \sin[\varphi(x_1, t)] = A \sin \omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right)$$

$$y(x_2, t) = A \sin[\varphi(x_2, t)] = A \sin \omega \left(t - \frac{x_2}{v} \right)$$

Zatem różnica faz $\Delta\varphi = \varphi(x_2, t) - \varphi(x_1, t)$

$$\Delta\varphi = \omega \left(t - \frac{x_2}{v} \right) - \omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right) = \omega \frac{x_1 - x_2}{v}$$

ale $\omega = \frac{2\pi}{T}$

więc $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \frac{x_1 - x_2}{v}$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(x_1 - x_2)}{\lambda}$$

$$\lambda = v \cdot T = 300m/s \cdot 0.04 = 12m$$

$$x_1 - x_2 = 10m - 16m = -6m$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(-6m)}{12m} = -\pi$$

Różnica faz $\Delta\varphi$ drgań dwu punktów x_1 i x_2 wynosi $-\pi$.