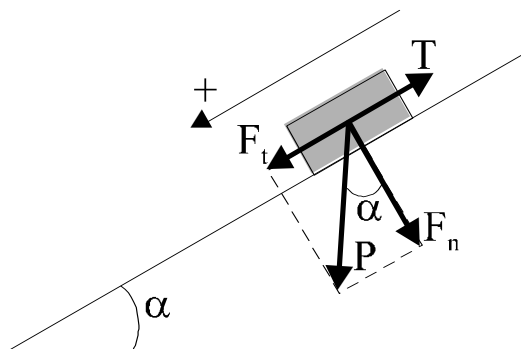


Zadania do rozdziału 5

Zad.5.1.

Udowodnij, że stosując równię pochyłą o dającym się zmieniać kącie nachylenia α można wyznaczyć współczynnik tarcia statycznego μ_0 .

Rozwiązanie:



W czasie zsuwania się po równi ciało o ciężarze $P=mg$ podlega działaniu wypadkowej dwóch sił:

siły zsuwającej

$$F_t = P \sin \alpha$$

i hamującej siły tarcia $T = \mu_0 F_n$,

$$F_n = P \cos \alpha$$

$$T = \mu_0 P \cos \alpha$$

Siła wypadkowa F wywołująca ruch równa się

$$F = F_t - T$$

$$F = P \sin \alpha - \mu_0 P \cos \alpha,$$

ale $P=mg$

zatem

$$F = mg(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)$$

Jeżeli przy danym kącie nachylenia równi ciało samorzutnie nie zaczyna się zsuwać, to znaczy że siła tarcia T jest większa od siły zsuwającej F_t . Stopniowo zwiększając nachylenie można osiągnąć taki kąt α , przy którym ruch się rozpocznie. To świadczy o bardzo małej przewadze siły F_t nad siłą T . W przybliżeniu można zakładać, że przy kącie granicznym, zwanym kątem tarcia, zachodzi równość wspomnianych sił:

$$F_t = T$$

Ostatnie równanie można też zapisać w postaci

$$P \sin \alpha_t = \mu_0 P \cos \alpha_t$$

gdzie μ_0 oznacza współczynnik tarcia statycznego. Z dalszego przekształcenia wynika, że

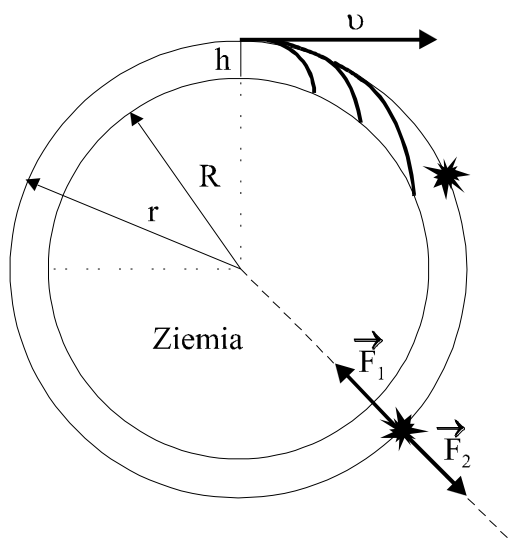
$$\mu_0 = \tan \alpha_t$$

Współczynnik tarcia statycznego równa się zatem tangensowi najmniejszego kąta α , przy którym ciało zaczyna zsuwać się po równi pochyłej.

Zad.5.2.

Wyznaczyć pierwszą prędkość kosmiczną, czyli najmniejszą możliwą prędkość v_I , jaką musi mieć punkt materialny (satelita) swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi. Promień Ziemi $R=6400$ km.

Rozwiązanie:



Wyobraźmy sobie pocisk wystrzelony poziomo na wys. h nad Ziemią, któremu nadano pewną prędkość początkową v . Po przebyciu pewnej drogi pocisk spadnie na Ziemię. Jeżeli będziemy zwiększać prędkość początkową pocisku, to jego droga będzie coraz dłuższa i przy pewnej prędkości początkowej pocisk zacznie obiegać Ziemię dookoła i nie spadnie na jej powierzchnię. Nastąpi to wtedy, gdy prędkość początkowa pocisku osiągnie pierwszą prędkość kosmiczną.

Na poruszający się po orbicie pocisk o masie m działają dwie siły F_1 i F_2 o przeciwnych zwrotach:

siła odśrodkowa $F_2 = \frac{mv^2}{r}$ i

siła grawitacji $F_1 = k_g \frac{Mm}{r^2}$

Warunkiem, aby orbita, po której porusza się pocisk, była stabilna jest równowaga tych sił

$$F_1 = F_2$$

$$k_g \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

i stąd

$$v = \sqrt{\frac{k_g M}{r}}$$

Promień r orbity satelity wynosi:

$$r = R + h$$

Ponieważ $h \ll R$ to pierwsza prędkość kosmiczna v_I wyraża się wzorem

$$v_I = \sqrt{\frac{k_g M}{R}}$$

Ale wiemy, że na powierzchni Ziemi spełnione jest równanie:

$$mg = k_g \frac{m \cdot M}{R^2}$$

$$k_g \cdot M = g \cdot R^2$$

Ostatecznie

$$v_I = \sqrt{\frac{k_g M}{R}} = \sqrt{gR}$$

$$v_I = \sqrt{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6400000 \text{m}}$$

$$v_I = 7924 \text{ m/s} \cong 7.9 \text{ km/s}.$$

Zad.5.3.

Wyznaczyć drugą prędkość kosmiczną tzw. prędkość ucieczki, czyli najmniejszą możliwą prędkość v_{II} jaką musi mieć punkt materialny (satelita) przy powierzchni Ziemi, aby mógł się oddalić od Ziemi w nieskończoność. Promień Ziemi $R=6400 \text{ km}$.

Rozwiązanie:

Obliczmy najpierw, z jaką prędkością v trzeba rzucić ciało pionowo do góry, aby wzniosło się ono na wysokość h . Zastosujemy w tym celu zasadę zachowania energii.

Całkowita energia mechaniczna E_1 na powierzchni Ziemi wynosi:

$$E_1 = E_k + E_p(R)$$

gdzie $E_k = \frac{mv^2}{2}$ to energia kinetyczna

$E_p = -k_g \frac{Mm}{R}$ to grawitacyjna energia potencjalna (patrz 5.19)

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} - k_g \frac{M \cdot m}{R}$$

Jeśli satelita ma uciec z pola grawitacyjnego Ziemi, to znaczy że jego końcowa energia potencjalna będzie równa 0 (ponieważ energia potencjalna jest ujemna i co najwyżej równa 0). Jednocześnie chcemy znaleźć najmniejszą możliwą prędkość, zatem w ostatniej fazie lotu jego

prędkość będzie 0, a co za tym idzie również energia kinetyczna. Czyli całkowita energia mechaniczna E_2 ciała w nieskończoności wynosi zero.

Z prawa zachowania energii

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{mv^2}{2} - k_g \frac{M \cdot m}{R} = 0$$

$$\frac{mv^2}{2} = k_g \frac{M \cdot m}{R}$$

$$v = v_{II} = \sqrt{\frac{2k_g M}{R}}$$

Ale wiedząc, że na powierzchni Ziemi spełniona jest równość

$$mg = k_g \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$$k_g M = g \cdot R^2$$

Ostatecznie

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2k_g M}{R}} = \sqrt{2gR}$$

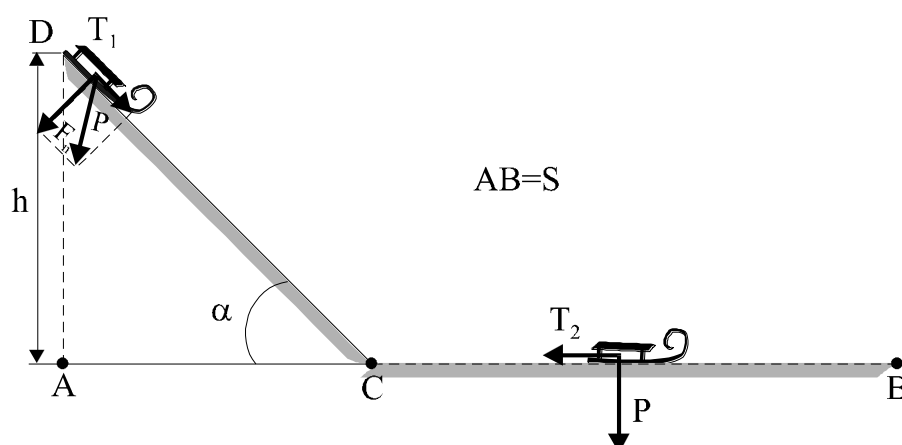
$$v_{II} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 6400000m}$$

$$v_{II} = 11206m/s \cong 11.2 km/s$$

Zad.5.4.

Sanki ześlizgują się z oblodzonej góry o wysokości h i zatrzymują się przebywając odległość CB . Odległość $AB=S$. Określić współczynnik tarcia μ sanek o lodową powierzchnię. Obliczyć przyspieszenie a sanek na odcisku CB .

Rozwiązanie:



$$\mu = \frac{T_1}{F_n}; \quad \mu = \frac{T_2}{P}; \quad F_n = P \cdot \cos \alpha; \quad P = mg$$

W punkcie D sanki mają energię potencjalną

$$E_p = mgh$$

W punkcie C sanki mają energię kinetyczną

$$E_k^c = \frac{mv^2}{2} = E_p - W_{DC}$$

gdzie W_{DC} – to praca wykonana przeciw sile tarcia T_1 na odcinku DC.

W punkcie B sanki mają $v = 0$, $E_k^B = 0$

$$E_k^B = E_p - W_{DC} - W_{CB} = 0$$

gdzie W_{CB} – to praca wykonana przeciw sile tarcia T_2 na odcinku CB.

Z prawa zachowania energii

$$E_p = W_{DC} + W_{CB}$$

$$W_{DC} = T_1 \cdot DC$$

$$W_{CB} = T_2 \cdot CB$$

$$mgh = T_1 \cdot DC + T_2 \cdot CB$$

$$T_1 = mg \cdot \cos \alpha \cdot \mu$$

$$T_2 = mg \cdot \mu$$

$$CB = S - AC$$

$$mgh = mg \cdot \cos \alpha \cdot \mu \cdot DC + mg\mu \cdot (S - AC) \quad \text{ale} \quad AC = DC \cdot \cos \alpha$$

$$mgh = mg \cdot \mu \cdot S$$

Zatem

$$\mu = \frac{h}{S}$$

Opóźnienie a na odcinku CB obliczamy z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m \cdot a = T_2 \qquad T_2 = mg \cdot \mu$$

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \mu = mg \frac{h}{S}$$

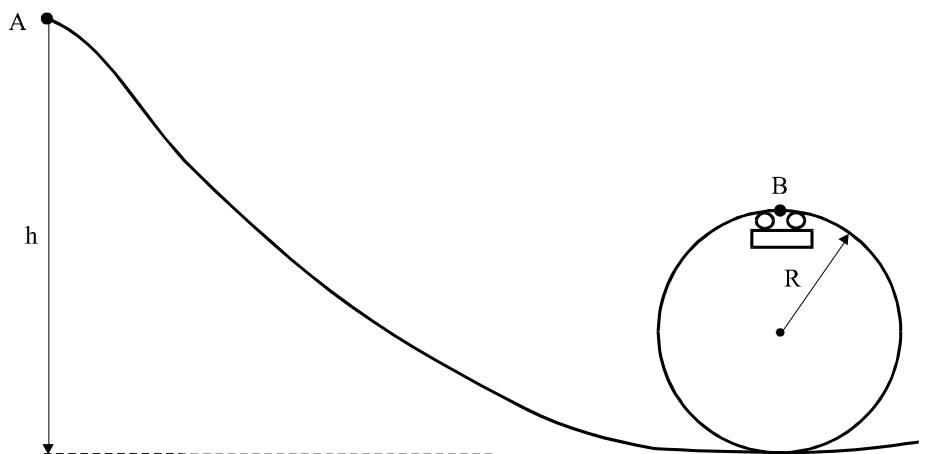
i stąd

$$a = \frac{gh}{S}$$

Zad. 5.5.

Wózek o masie m stacza się bez tarcia po szynach wygiętych tak jak na rysunku. Jaka jest najmniejsza wysokość h , aby wózek nie oderwał się od szyn w najwyższym punkcie pętli kołowej o promieniu R .

Rozwiązanie:



W punkcie A wózek ma energię mechaniczną E^A

$$E^A = E_k^A + E_p^A$$

gdzie $E_k^A = \frac{mv_A^2}{2} = 0$ bo w A $v = 0$

$$E_p^A = mgh$$

W punkcie B wózek ma energię mechaniczną E^B

$$E^B = E_k^B + E_p^B$$

$$E_k^B = \frac{mv_B^2}{2}$$

$$E_p^B = mg \cdot 2R$$

Z prawa zachowania energii

$$E^A = E^B$$

$$mgh = mg2R + \frac{mv_B^2}{2} \quad (*)$$

v_B musi być tak duże aby siła odśrodkowa $\frac{mv_B^2}{R}$ zrównoważyła ciężar wózka mg

$$\frac{mv_B^2}{R} = m \cdot g$$

$$v_B^2 = R \cdot g$$

Znając v_B równanie (*) możemy zapisać

$$mgh = mg2R + \frac{mRg}{2}$$

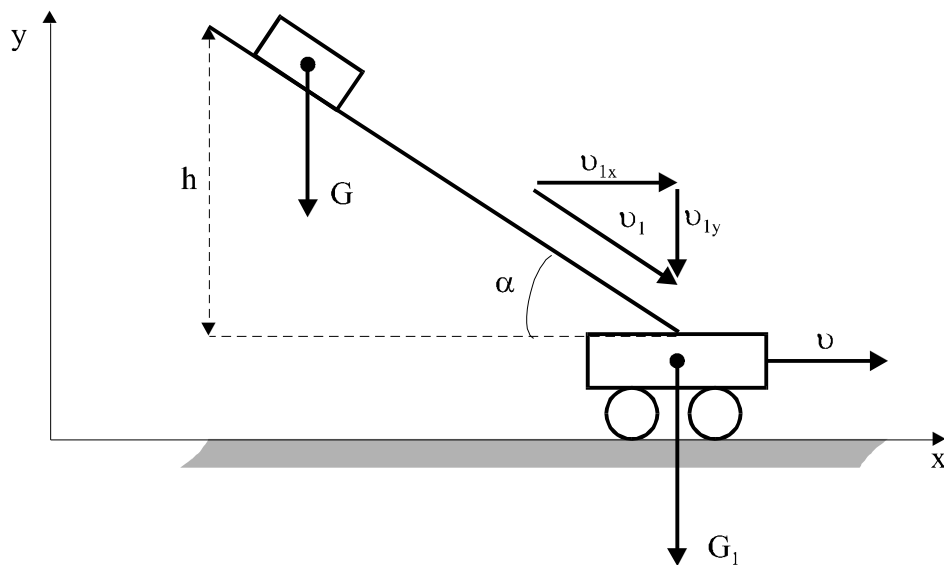
$$h = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2}R$$

$$h = \frac{5}{2}R$$

Zad.5.6.

Ciało o ciężarze G ześlizguje się bez tarcia z nachylonej deski na nieruchomą platformę. Jaką prędkość v uzyska platforma, kiedy ciężar na nią upadnie. Ciężar platformy wynosi G_1 , wysokość początkowa położenia ciała nad poziomem platformy wynosi h , a kąt nachylenia deski do poziomu α . Platforma porusza się bez tarcia.

Rozwiązanie:



Ciało o ciężarze G ma masę $m = \frac{G}{g}$

Z prawa zachowania energii obliczamy prędkość v_1 upadku ciała na platformę

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2}$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

W chwili upadku ciało ma pęd $\vec{p}_1$

$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$$

Wektor $\vec{p}_1$ ma składowe

$$p_{1x} = mv_{1x} = mv_1 \cdot \cos \alpha$$

$$p_{1y} = mv_{1y} = mv_1 \cdot \sin \alpha$$

Ciało o ciężarze G po upadku na platformę o ciężarze G_1 pozostaje na tej platformie.

Masa M platformy wraz z ciałem wynosi zatem

$$M = \frac{G + G_1}{g}$$

Po upadku platforma uzyskuje pęd $\vec{p}_2$

$$\vec{p}_2 = M\vec{v}$$

Wektor $\vec{p}_2$ ma składowe

$$p_{2x} = Mv$$

$$p_{2y} = 0$$

Z prawa zachowania pędu wynika, że

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

co pociąga $p_{1x} = p_{2x}$

Zatem możemy zapisać

$$\frac{G_1 + G}{g} \cdot v = \frac{G_1}{g} \cdot v_{1x}$$

$$v_{1x} = v_1 \cdot \cos \alpha = \sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha$$

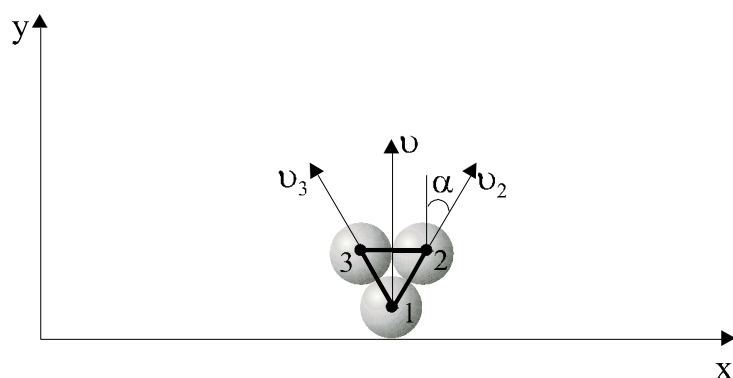
$$\frac{G_1 + G}{g} \cdot v = \frac{G_1}{g} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha$$

$$v = \frac{G_1}{G_1 + G} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha$$

Zad.5.7.

Trzy jednakowe kulki wiszą stykając się na trzech jednakowych niciach o jednakowych długościach. Jedną z kulek odchyłono w kierunku prostopadłym do prostej łączącej środki dwóch pozostałych kulek i puszczono swobodnie. Do chwili zderzenia kulka osiągnęła prędkość v . Jakie prędkości będą posiadały kulki po zderzeniu?

Rozwiązanie:



$$\alpha = 30^\circ;$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Po zderzeniu pierwsza kulka miała pęd

$$\vec{p}_1^I = m_1 \vec{v} \quad \text{i energię kinetyczną} \quad E_{k1}^I = \frac{m_1 v^2}{2}$$

zaś dwie pozostałe kulki spoczywały a więc

$$p_2^I = p_3^I = 0$$

$$E_{k1}^I = E_{k2}^I = 0$$

Po zderzeniu kule uzyskały odpowiednio prędkości v_1, v_2 i v_3 , którym odpowiadają pędy

$$\vec{p}_1^{\text{II}} = m_1 \vec{v}_1; \quad \vec{p}_2^{\text{II}} = m_2 \vec{v}_2; \quad \vec{p}_3^{\text{II}} = m_3 \vec{v}_3$$

oraz energie kinetyczne

$$E_{1k}^{\text{II}} = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \quad E_{2k}^{\text{II}} = \frac{m_2 v_2^2}{2}; \quad E_{3k}^{\text{II}} = \frac{m_3 v_3^2}{2}$$

Stosując prawo zachowania pędu możemy zapisać

$$\vec{p}_1^I = \vec{p}_1^{\text{II}} + \vec{p}_2^{\text{II}} + \vec{p}_3^{\text{II}}$$

co, gdy $m_1 = m_2 = m_3 = m$, jest równoważne

$$(1) \quad mv = -mv_1 + mv_2 \cdot \cos \alpha + mv_3 \cdot \cos \alpha \quad - \text{ dla osi } y$$

$$(2) \quad 0 = -mv_3 \cdot \sin \alpha + mv_2 \cdot \sin \alpha \quad - \text{ dla osi } x$$

Z (2) wynika, że $v_2 = v_3 = v_{2/3}$

$$mv = -mv_1 + 2mv_{2/3} \cdot \cos \alpha; \quad v = -v_1 + \sqrt{3}v_{2/3}; \quad v_{2/3} = \frac{v + v_1}{\sqrt{3}}$$

Z zasady zachowania energii

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + 2 \frac{mv_{2/3}^2}{2}$$

Po podstawieniu $v_{2/3} = \frac{v + v_1}{\sqrt{3}}$ otrzymujemy

$$v^2 = v_1^2 + \frac{2}{3}(v^2 + 2vv_1 + v_1^2)$$

$$3v^2 = 3v_1^2 + 2v^2 + 4vv_1 + 2v_1^2$$

$$5v_1^2 + 4vv_1 + v^2 = 0$$

$$\Delta = 16v^2 + 20v^2 = 36v^2 \quad \sqrt{\Delta} = \pm 6v$$

$$v_1 = \frac{-4v \pm 6v}{10} = +\frac{2}{10}v = +\frac{1}{5}v$$

$$v_{2/3} = \frac{v + \frac{1}{5}v}{\sqrt{3}} = \frac{6v}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}v$$