

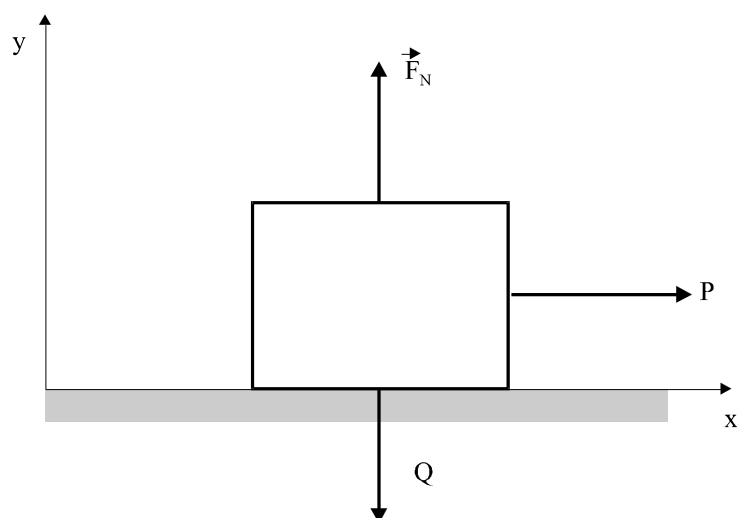
Zadania do rozdziału 3.

Zad.3.1.

Rozważmy klocek o masie $m=2$ kg ciągnięty wzdłuż gładkiej poziomej płaszczyzny przez siłę $\vec{P}$. Ile wynosi siła reakcji $\vec{F}_N$ wywierana na klocek przez gładką powierzchnię?

Oblicz siłę P , która nada klockowi poziomą prędkość $v_x = 4 \text{ m/s}$ w czasie $t=2$ s (jeżeli w chwili początkowej klocek znajduje się w spoczynku)?

Rozwiązanie:



Na klocek działają siły: $\vec{P}$ - siła ciągnąca, $\vec{Q}$ - siła ciężkości, $\vec{F}_N$ - siła reakcji wywierana na klocek przez powierzchnię.

Z drugiej zasady dynamiki wiemy, że :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

co możemy zapisać

$$\sum F_x = ma_x \text{ i } \sum F_y = ma_y$$

Ponieważ $a_y=0$; $a_x \neq 0$

$$\text{a} \quad \sum F_y = F_N - Q; \quad \sum F_x = P$$

$$\text{Zatem} \quad F_N - Q = 0; \quad P = ma_x$$

$$Q = m \cdot g; \quad Q = 2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 19.62 \text{ N};$$

Ponieważ $F_N=Q$ to siła nacisku $F_N=19.62 \text{ N}$

$$a_x = \frac{v_x - 0}{t} \quad a_x = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{s}}; \quad a_x = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ostatecznie $P = m \cdot a_x; \quad P = 2 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad P = 4 \text{ N}$

Zad.3.2.

Samochód ciężarowy o masie $m = 6 \text{ t}$ doznaje przyspieszenia $a = 0.5 \text{ m/s}^2$. Oblicz siłę F silnika, która ciągnie samochód.

Rozwiązanie:

Z drugiej zasady dynamiki

$$F = m \cdot a$$

$$F = 6000 \text{ kg} \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = 3000 \text{ N}$$

Zad.3.3.

Z lotniskowca, którego masa $m = 30\,000 \text{ t}$, wyrzucony został za pomocą katapulty samolot z siłą $F = 90\,000 \text{ N}$. Oblicz przyspieszenie a jakie doznaje lotniskowiec?

Rozwiązanie:

Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że na lotniskowiec działa siła $\vec{F}$, taka sama co do modułu lecz przeciwnie skierowana, z jaką lotniskowiec wyrzuca samolot.

Z drugiej zasady dynamiki

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{90000 \text{ N}}{30\,000\,000 \text{ kg}} = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{kg}}$$

$$a = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Zad.3.4.

Ciało o masie $m_1 = 2 \text{ kg}$ jest ciągnięte za pomocą nieważkiej nici po gładkiej, poziomej płaszczyźnie. Na drugim końcu nitki przerzuconym przez krążek wisi inne ciało o masie $m_2 = 1 \text{ kg}$. Zakładając, że krążek jest nieważki i służy wyłącznie do zmiany kierunku naprężenia w nici, znaleźć przyspieszenie a układu i naprężenie nici T .

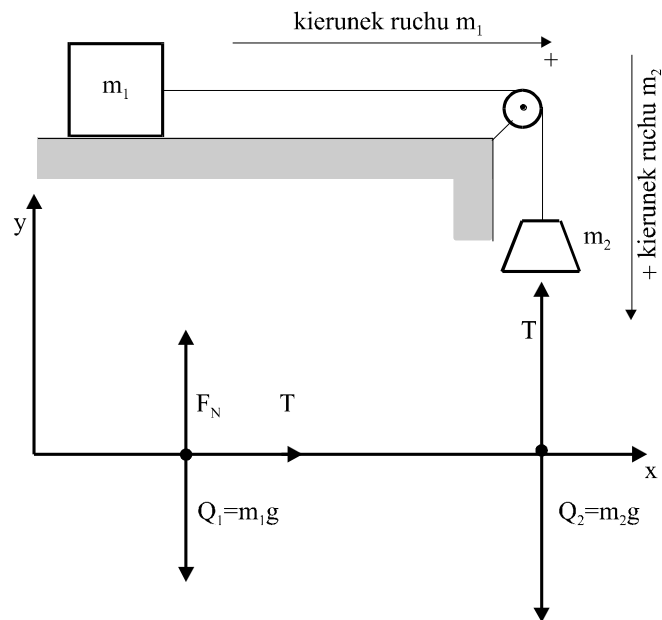
Rozwiązanie:

$$\Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\Sigma \vec{F} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_1 = \vec{i} a_{1x} + \vec{j} a_{1y}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{i} a_{2x} + \vec{j} a_{2y}$$



Ciało o masie m_1 porusza się w kierunku osi x , czyli $a_{1y} = 0$.

Wobec tego możemy napisać dla m_1

$$+ F_N - m_1 g = 0 \quad \text{dla osi } y$$

$$+ T = + m_1 a_{1x} \quad \text{dla osi } x$$

i dla m_2

$$- T + m_2 g = + m_2 a_{2y} \quad \text{dla osi } y$$

$$0 = 0 \quad \text{dla osi } x$$

Ze względu na to, że na krążku zmienia się kierunek naprężenia nici i, że nić ma ustaloną długość, zachodzi

$$a_{1x} = a_{2y} = a$$

Zatem

$$T = m_1 a$$

oraz $m_2 g - T = m_2 a$ dodając stronami oba równania otrzymujemy:

$$m_2 g = m_2 a + m_1 a$$

stąd
$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$a = \frac{1 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cong 3.3 \text{ m/s}^2$$

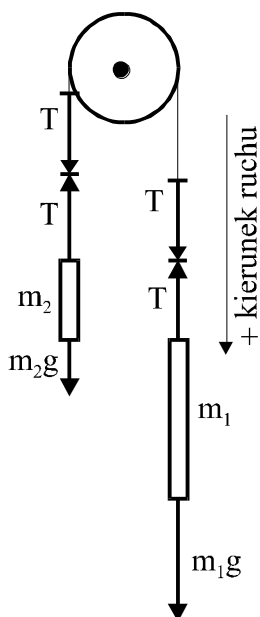
i
$$T = m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$T = 2 \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cong 6.5 \text{ N}$$

Zad.3.5.

Dwie nierówne masy $m_1=2 \text{ kg}$ i $m_2=1 \text{ kg}$ są połączone ze sobą za pomocą nieważkiej linki przerzuconej przez niewielki krążek. Oblicz przyspieszenie a układu oraz naprężenie linki T .

Rozwiązanie:



Ponieważ masa m_1 jest większa od masy m_2 to układ będzie się poruszał w kierunku zaznaczonym na rysunku. Równanie ruchu masy m_1 ma postać:

$$m_1 g - T = m_1 \cdot a_1 \quad *)$$

Równanie ruchu masy m_2 ma postać:

$$T - m_2 g = m_2 \cdot a_2 \quad **)$$

Ale $a_1 = a_2 = a$ (patrz zad.3.4) więc równania *) i **)

przyjmą postać i dodając je stronami otrzymujemy:

$$m_1 g - T = m_1 \cdot a$$

$$T - m_2 g = m_2 \cdot a$$

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

stąd

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$a = \frac{2 \text{ kg} - 1 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cong 3.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

oraz

$$T = m_1 g - m_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

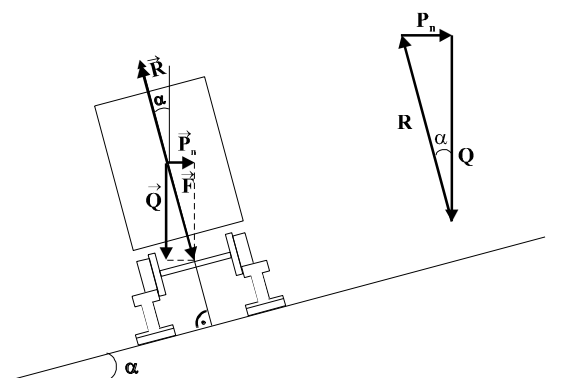
$$T = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) = m_1 g \frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$g = \frac{2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cong 13.1 \text{ N}$$

Zad.3.6.

Promień zakrętu toru kolejowego wynosi $r=100 \text{ m}$. Pod jakim kątem α ma być nachylony tor do poziomu, aby nacisk pociągu F na tor był prostopadły do toru (koła pociągu nie działają wówczas na płaszczyzny boczne szyn i nie występuje zjawisko zrzucania wagonów z toru) jeżeli prędkość pociągu na zakręcie wynosi $v=36 \text{ km/godz}$.

Rozwiązanie:



Rozpatrujemy jeden wagonu pociągu.

Zakładając, że masa wagonu wynosi m ,

$\vec{Q}$ - ciężar wagonu

$\vec{P}_n$ - siła odśrodkowa

$\vec{R}$ - wypadkowa siła reakcji szyn na koła wagonu

$\vec{F}$ - siła nacisku wagonu na tor.

Siła $\vec{F}$ będzie prostopadła do płaszczyzny toru gdy kąt zawarty między siłami $\vec{Q}$ i $\vec{F}$ będzie równy kątowi α nachylenia szyn.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_n}{Q}$$

$$Q = m \cdot g$$

Reakcję odśrodkową (siłę odśrodkową) możemy wyrazić

$$P_n = m \cdot a_n$$

gdzie przyspieszenie odśrodkowe a_n ma postać:

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Zatem

$$P_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{r \cdot g}$$

$$v = 36 \frac{\text{km}}{\text{godz}} = \frac{36.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{100 \text{ m}^2 / \text{s}^2}{100 \text{ m} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} \approx 0.1$$

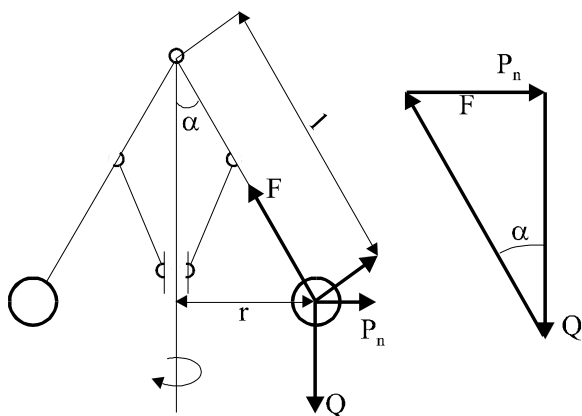
$$\alpha = \arctg 0.1 \cong 6^\circ$$

Wniosek: Kąt nachylenia toru na zakręcie nie zależy od masy m jadącego pociągu, a zależy jedynie od jego prędkości v i promienia krzywizny toru r .

Zad.3.7.

Długość prętów 1 regulatora Wata wynosi 200 mm. Oblicz kąt α nachylenia ramion regulatora, jego prędkość obrotowa wynosi $n=2$ obroty/s.

Rozwiązanie:



Zakładamy, że masa kuli regulatora wynosi m . Wtedy na kulę regulatora działają w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu trzy siły: ciężar kulki Q , siła odśrodkowa P_n oraz naciąg pręta F .

Ponieważ położenie kulki w tej płaszczyźnie przy stałych obrotach nie ulega zmianie, powyższe trzy siły znajdują się w równowadze.

Z trójkąta sił wynikają bezpośrednio następujące zależności

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_n}{Q}$$

Ciężar ciała Q można wyrazić równaniem $Q = m \cdot g$,

a reakcję odśrodkową P_n równaniem $P_n = \frac{mv^2}{r}$

gdzie: $r = l \sin \alpha$, a prędkość kulki $v = 2\pi nr = 2\pi nl \sin \alpha$, skąd

$$P_n = \frac{m \cdot 4\pi^2 n^2 l^2 \sin^2 \alpha}{l \sin \alpha} = 4\pi^2 n^2 m l \sin \alpha$$

Podstawiając wartość Q i P_n do pierwszego równania otrzymamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\pi^2 \cdot n^2 \cdot m \cdot l \cdot \sin \alpha}{m \cdot g}$$

i uwzględniając, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ otrzymamy

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4\pi^2 n^2 l \sin \alpha}{g}$$

Zatem

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4\pi^2 n^2 l}{g}$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l}$$

$$\cos \alpha = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{4 \cdot (3.14)^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.2 \text{ m}} = 0.31$$

$$\alpha = \arccos 0.31 \cong 71^\circ$$

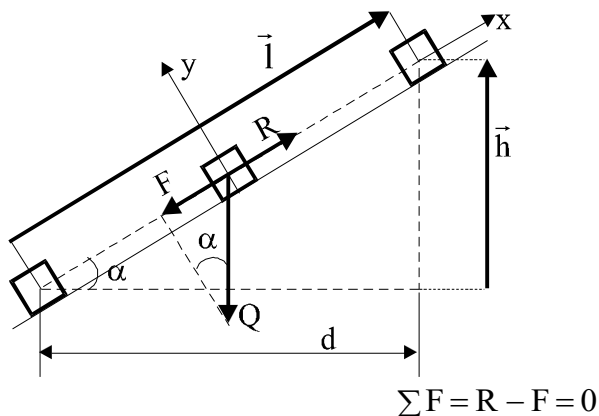
Wniosek: Kąt nachylenia α ramion regulatora Wata nie zależy od masy m kuli regulatora.

Zad.3.8.

Jaką pracę W wykona człowiek przesuwający klocek o masie $m=10 \text{ kg}$ z podstawy na szczyt równi pochyłej mającej długość $l=5 \text{ m}$ i wysokość $h=3 \text{ m}$. Człowiek przesuwa klocek ze stałą prędkością siłą P równoległą do równi. Oblicz moc człowieka P przy wykonywaniu tej pracy, jeśli czas przesuwania klocka wynosił $t=10 \text{ s}$.

Rozwiązanie:

Sytuacja jest przedstawiona na rysunku.



Ponieważ przesuwanie klocka wzdłuż osi x odbywa się (bez przyspieszenia) ruchem jednostajnym, zatem II zasada dynamiki przyjmie postać

$$F = Q \cdot \sin \alpha$$

$$Q = m \cdot g; \quad \sin \alpha = \frac{h}{l}$$

$$R = mg \frac{h}{l}; \quad R = 10 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{3 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 58.8 \text{ N}$$

$$R \cong 58.8 \text{ N}$$

Praca W wykonana przez siłę P na drodze l

$$W = \vec{R} \cdot \vec{l} = P \cdot l$$

$$W = 58.8 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 294 \text{ J}$$

Gdyby klocek trzeba było podnieść do góry bez użycia równi to wówczas wykonalibyśmy pracę W'

$$W' = \vec{Q} \cdot \vec{h} = Q \cdot h$$

$$W' = 10 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ m} = 294 \text{ J}$$

A więc praca $W=W'$. Używając równi pochyłej możemy zyskać na sile, ale musimy wykonać taką samą pracę.

Moc człowieka

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{294 \text{ J}}{10 \text{ s}} = 29.4 \text{ W}$$

Zad.3.10.

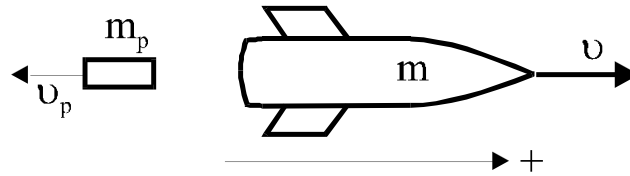
Oblicz prędkość v , którą uzyska rakieta o masie $m=1.6 \text{ t}$ w chwili startu, jeżeli gazy spalinowe posiadały prędkość $v_p = 3500 \text{ m/s}$, a masa spalonego paliwa wraz z utleniaczem wynosiła $m_p=50 \text{ kg}$.

Rozwiązanie:

Przed startem rakieta miała masę $m_0 = m + m_p$, zaś prędkość $v_0 = 0$.

Zatem pęd $\vec{p} = m_o \vec{v}_o = 0$.

Ponieważ na raketę w chwili startu nie działają żadne siły zewnętrzne, dlatego pęd p całego układu (rakietę + wylatujące spaliny) musi być równy zero.



Pęd rakiety po starcie $p_r = mv$

Pęd spalin po starcie $p_s = -m_p v_p$

Pęd układu $p_r + p_s = mv - m_p v_p = 0$

Zatem $mv = m_p v_p$

$$v = \frac{m_p v_p}{m}$$

$$v = \frac{50 \text{ kg} \cdot 3500 \text{ m/s}}{1600 \text{ kg}} \cong 110 \text{ m/s}$$

Zad.3.10.

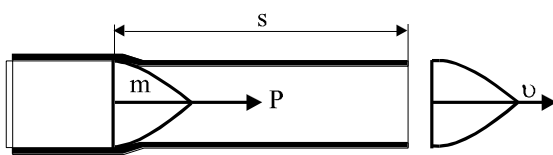
Oblicz energię kinetyczną pocisku o masie $m=40 \text{ kg}$, wystrzelonego z lufy armatniej z prędkością $v = 600 \text{ m/s}$. Oblicz średnią siłę parcia P gazów prochowych w lufie, jeżeli długość jej wynosi $s=2 \text{ m}$.

Rozwiązanie:

Energia kinetyczna E_K pocisku wynosi

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_K = \frac{40 \text{ kg} \cdot (600)^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2}{2} = 7200000 \text{ J}$$



Energia kinetyczna jaką uzyskał pocisk po opuszczeniu lufy pojawiła się kosztem wykonanej pracy W , którą wykonały gazy prochowe przesuwające pocisk siłą P na dystansie długości lufy s

$$W = P \cdot s = E_K$$

$$P = \frac{E_K}{s} = \frac{mv^2}{2s}$$

$$P = \frac{40 \text{ kg} \cdot (600)^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2}{2 \cdot 2 \text{ m}} = 3600000 \text{ N}$$