

Zadania do rozdziału 2.

Zad.2.1.

Samochód na autostradzie porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $v=100$ km/godz. W jakim czasie t przebędzie on drogę $s=50$ km?

Rozwiązanie:

$$s = v \cdot t$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50 \text{ km/godz}}{100 \text{ km/godz}} = 0.5 \text{ godz.}$$

Zad.2.2.

Z miejscowości A oddalonej w linii prostej o 90 km od miejscowości B, wyjeżdża pociąg pospieszny jadąc w kierunku B z prędkością 54 km/godz. Po 10 minutach z miejscowości B wyjeżdża pociąg osobowy jadący w kierunku A z prędkością 36 km/godz. Obliczyć po jakim czasie i w jakiej odległości od miejscowości A nastąpiło spotkanie pociągów?

Rozwiązanie:

Oznaczamy:

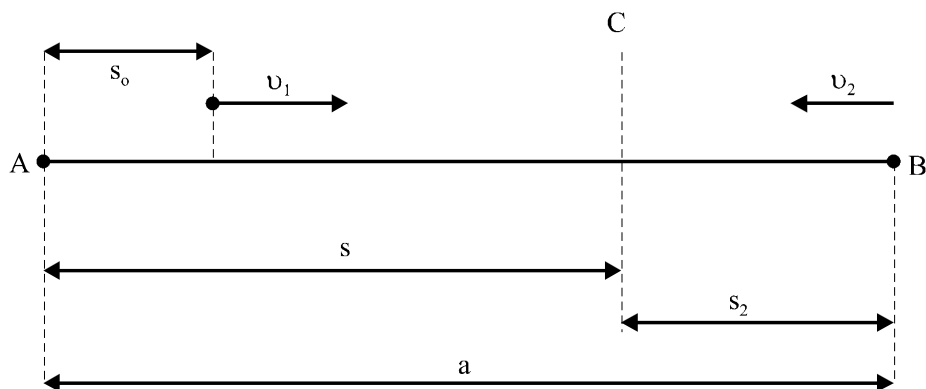
$$a=AB=90 \text{ km} = 90000 \text{ m}$$

$$v_1=54 \text{ km/godz} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_2=36 \text{ km/godz} = 10 \text{ m/s}$$

$$t_1=10 \text{ min} = 600 \text{ s}$$

Poszukujemy w jakiej odległości s od A leży punkt C spotkania pociągów oraz po jakim czasie t nastąpiło spotkanie pociągów



Po czasie t_1 gdy pociąg jadący z A do B przejechał drogę

$$s_0 = v_1 \cdot t_1$$

wyrusza pociąg z B do A.

Pociąg z B do A do chwili spotkania przebędzie drogę:

$$s_2 = a - s = v_2 \cdot (t - t_1)$$

Pociąg z A do B do chwili spotkania przebędzie drogę:

$$s = v_1 \cdot t$$

Ale

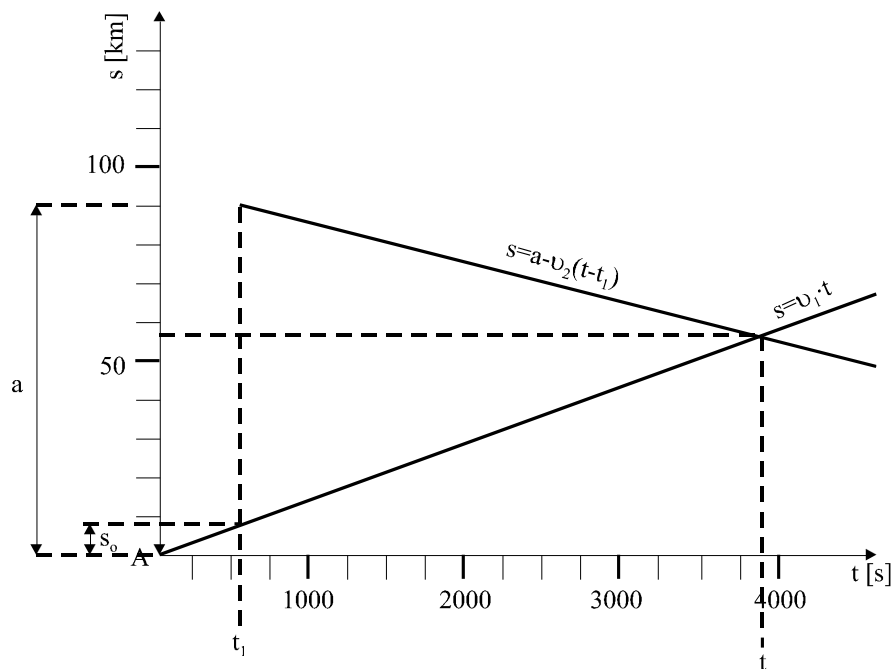
$$a = s + s_2 = v_2 \cdot (t - t_1) + v_1 \cdot t$$

$$a = v_2 \cdot t - v_2 t_1 + v_1 \cdot t$$

$$t = \frac{a + v_2 \cdot t_1}{v_1 + v_2} = \frac{90000\text{m} + 10\text{m/s} \cdot 600\text{s}}{15\text{m/s} + 10\text{m/s}} = 3840\text{s}$$

$$s = v_1 \cdot t = v_1 \cdot \frac{a + v_2 \cdot t_1}{v_1 + v_2} = 15\text{m/s} \cdot 3840\text{s} = 57600\text{m} = 57.6\text{km}$$

Zadanie to można zilustrować



Zad.2.3.

Samochód jadący z prędkością $v_0 = 54$ km/godz w pewnej chwili zaczyna hamować (czyli porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym). Po upływie czasu $t_1 = 5$ s od chwili rozpoczęcia hamowania prędkość samochodu wynosi $v = 18$ km/godz. Obliczyć opóźnienie samochodu, drogę hamowania i czas po jakim się zatrzyma?

$$v_o = 54 \text{ km/godz} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 18 \text{ km/godz} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = v_o - at_1$$

$$a = \frac{v_o - v}{t_1} = \frac{54 \text{ km/godz} - 18 \text{ km/godz}}{5 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s}}{5 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Opóźnienie a wynosi: $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

t – czas hamowania

Na końcu drogi hamowania $v=0$

Zatem $v = v_o - at$

$$0 = v_o - at$$

$$t = \frac{v_o}{a}$$

$$t = \frac{15 \text{ m/s}}{2 \text{ m/s}^2} = 7.5 \text{ s}$$

Czas hamowania t wynosi: $t=7.5 \text{ s}$

s – droga hamowania

$$s = v_o \cdot t - \frac{at^2}{2}$$

$$s = 15 \text{ m/s} \cdot 7.5 \text{ s} - \frac{2 \text{ m/s}^2 \cdot (7.5)^2 \text{ s}^2}{2} = (112.50 - 56.25) \text{ m}$$

$$s = 56.25 \text{ m}$$

Droga hamowania s wynosi: $s=56.25 \text{ m}$.

Zad.2.4.

Z balonu unoszącego się na wysokości $h=1960 \text{ m}$ zrzucono woreczek z piaskiem. Oblicz czas spadania t woreczka z piaskiem na ziemię oraz prędkość v w chwili upadku.

Przyspieszenie ziemskie $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Rozwiązanie:

Woreczek będzie poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym z zerową prędkością początkową.

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1960 \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}^2}} \cong 20 \text{ s}$$

Czas spadania t wynosi: $t=20 \text{ s}$.

$$v = g \cdot t = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

$$v = 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ s} = 196 \text{ m/s}$$

Prędkość upadku v wynosi: $v=196 \text{ m/s}$.

Zad.2.5.

Z karabinka wystrzelono pocisk pionowo w górę z prędkością $v_0=490 \text{ m/s}$. Oblicz wysokość h na jaką wzbije się pocisk oraz czas wznoszenia t i prędkość końcową upadku pocisku?

Rozwiązanie:

$$v = v_0 + at$$

$$v=0 \quad ; \quad a = -g$$

$$0 = v_0 - g \cdot t$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

$$t = \frac{490 \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}} \cong 50 \text{ s}$$

Czas wznoszenia pocisku t wynosi: $t=50 \text{ s}$.

$$h = v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h = \frac{(490)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12237 \text{ m}$$

Wysokość h , na którą wzbił się pocisk wynosi: $h=12237 \text{ m}$.

Oznaczmy przez t_s – czas spadania pocisku z wysokości h

$$h = \frac{gt_s^2}{2}$$

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{ale} \quad h = \frac{v_o^2}{2g}$$

Zatem

$$t_s = \sqrt{\frac{2v_o^2}{g \cdot 2g}} = \frac{v_o}{g}$$

$$t_s = 50 \text{ s}$$

Widzimy, że czas spadania pocisku t_s jest taki sam jak czas t jego wznoszenia.

Oznaczmy przez v_u - prędkość upadku pocisku

$$v_u = gt_s \quad \text{ale} \quad t_s = \frac{v_o}{g}$$

Zatem

$$v_u = g \cdot \frac{v_o}{g} = v_o$$

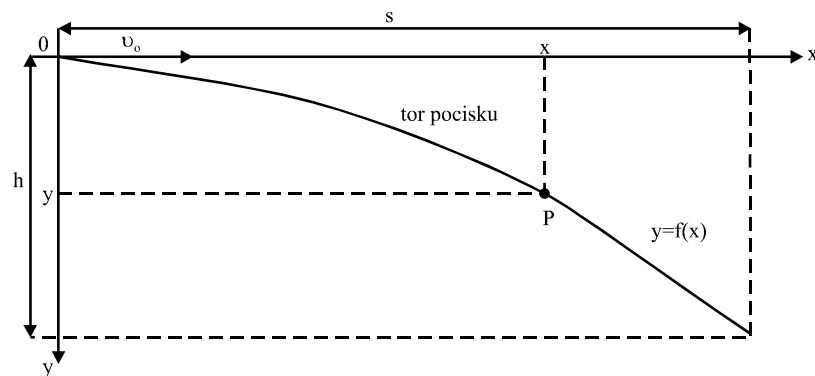
$$v_u = 490 \text{ m/s}$$

Widzimy, że prędkość upadku pocisku v_u jest taka sama jak prędkość v_o jego wystrzelenia.

Zad.2.5.

Z wysokości $h=1.5 \text{ m}$ wystrzelono z karabinu poziomo pocisk z prędkością $v_o=730 \text{ m/s}$. Znaleźć równanie toru pocisku ($y=f(x)$). Określić odległość s w jakiej pocisk upadnie na ziemię oraz czas t ruchu pocisku. Opór powietrza pominąć.

Rozwiązanie:



Ruch pocisku jest wypadkowym dwóch ruchów:

- w kierunku poziomym (osi $0x$) - jednostajnego prostoliniowego z prędkością v_0
- w kierunku pionowym (osi $0y$) - jednostajnie przyspieszonego (z przyspieszeniem ziemskim g) z prędkością początkową równą zero

W chwili t pocisk w punkcie P toru ma współrzędne:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \\ y &= g \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{jest to równanie toru w postaci} \\ \text{parametrycznej, gdzie parametrem} \\ \text{jest czas } t. \end{array}$$

Obliczając z pierwszego równania t

$$t = \frac{x}{v_0} \quad \text{i podstawiając do drugiego}$$

$$y = g \cdot \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{g}{v_0^2} x^2$$

$$y = \frac{g}{v_0^2} \cdot x^2 \quad \text{otrzymujemy równanie toru w postaci jawnej.}$$

Krzywą tą nazywamy parabolą.

Czas lotu pocisku t jest równy czasowi swobodnego spadku tego pocisku z wysokości h .

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.5 \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 0.55 \text{ s}$$

Czas lotu pocisku t wynosi: $t=55$ s.

W tym czasie pocisk przeleci w kierunku osi $0x$ drogę s

$$s = v_0 \cdot t$$

$$s = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2v_0^2 h}{g}}$$

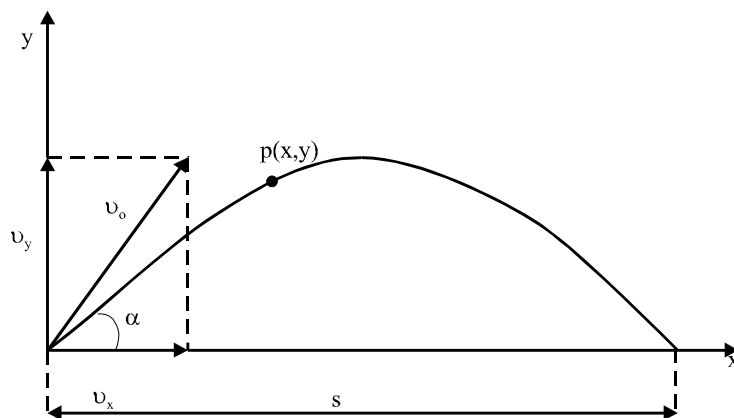
$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot (730)^2 \cdot 1.5 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \cdot \text{m}}{9.81 \text{ m/s}^2}} \cong 400 \text{ m}$$

Zasięg pocisku s wynosi: $s=400$ m.

Zad.2.6.

Z moździerza wyrzucano pocisk z prędkością $v_0=200$ m/s pod kątem $\alpha=60^\circ$ do poziomu. Znaleźć równanie toru ($y=f(x)$). Obliczyć odległość s w jakiej pocisk upadnie na ziemię od miejsca wystrzału oraz czas t lotu pocisku. Opór powietrza pominąć.

Rozwiązanie:



Wektor prędkości $\vec{v}_0$ rozkładamy na dwie składowe: $v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$ i $v_y = v_0 \cdot \sin \alpha$.

Teraz ruch pocisku możemy uważać za wypadkową dwóch ruchów;

- w kierunku poziomym (osi $0x$) - jednostajnego, prostoliniowego z v_x
- rzutu w górę (w kierunku osi $0y$) z prędkością początkową v_y .

W chwili t pocisk znajduje się w punkcie P toru o współrzędnych

$$\left. \begin{aligned} x &= v_x \cdot t = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y &= v_y \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

Powyższe dwa równania opisują tor i stanowią równanie toru w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest czas t .

Eliminując czas t

$$t = \frac{x}{v_o \cos \alpha}$$

formujemy równanie toru w postaci jawnej

$$y = v_o \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_o \cos \alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

Ponieważ jest to równanie kwadratowe względem x , a więc torem rzutu ukośnego jest parabola.

Zasięg pocisku ($x=s$) otrzymamy podstawiając do toru pocisku współrzędną $y=0$ upadku pocisku

$$0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

$$\frac{2v_o^2 (\sin \alpha \cos \alpha)x - gx^2}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

$$x(2v_o^2 \sin \alpha \cos \alpha - gx) = 0$$

$x=0$ - to jest punkt startu (nie upadku)

więc rozważmy $2v_o^2 \sin \alpha \cos \alpha - gx = 0$.

Wiemy, że $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

$$v_o^2 \sin 2\alpha = gx$$

$$x = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$x = \frac{(200)^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \cdot \sin 120^\circ}{9.81 \text{ m/s}^2} = \frac{(200)^2 \cdot \cos 30^\circ}{9.81} \text{ m}; \text{ ponieważ } \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

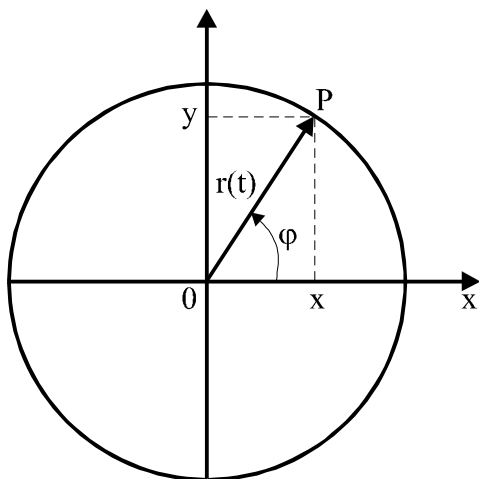
$$x=3531 \text{ m}$$

Zasięg pocisku wynosi $s=3531 \text{ m}$.

Zad.2.7.

Punkt P porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu R z prędkością kątową ω . Oblicz prędkość liniową v ruchu oraz przyspieszenie dośrodkowe a_n . Wykazać, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{a}_n$ są ortogonalne (wzajemnie prostopadłe).

Rozwiązanie:



Ruch P jest jednoznacznie opisany promieniem wodzącym

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$$

Czas t liczymy od chwili gdy $\varphi=0$.

Droga kątowna $\varphi = \omega \cdot t$

$$x(t) = R \cos \varphi = R \cos \omega t$$

$$y(t) = R \sin \varphi = R \sin \omega t$$

Prędkość $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left[\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right]$

$$\frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t \quad \frac{dy}{dt} = R\omega \cos \omega t$$

$$\vec{v}(t) = [-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t]$$

$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{R^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + R^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = R \cdot \omega$$

Przyspieszenie

$$\vec{a}_n(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}(-R\omega \sin \omega t), \frac{d}{dt}(R\omega \cos \omega t) \right]$$

$$\vec{a}_n(t) = [-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t]$$

$$a_n = |\vec{a}_n(t)| = \sqrt{R^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + R^2 \omega^4 \sin^2 \omega t} = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Aby sprawdzić czy wektory $\vec{v}$ i $\vec{a}_n$ są ortogonalne obliczamy ich iloczyn skalarny

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) \cdot \vec{a}_n(t) &= [-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t] \cdot [-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t] = \\ &= R^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - R^2 \omega^3 \cos \omega t \sin \omega t = 0 \end{aligned}$$

Iloczyn skalarny $\vec{v} \cdot \vec{a}_n = 0$, czyli wektory są ortogonalne.