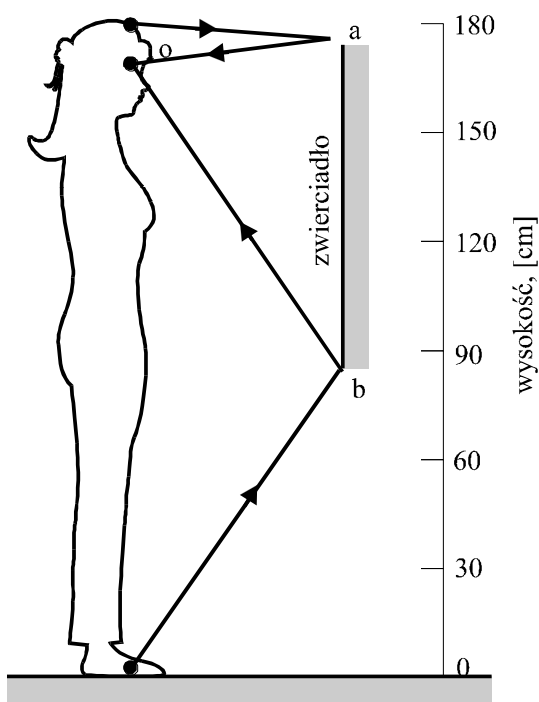


Zadania do rozdziału 10.

Zad.10.1.

Jaką wysokość musi mieć pionowe zwierciadło aby osoba o wzroście 1.80 m mogła się w nim zobaczyć cała. Załóżmy, że oczy znajdują się 10 cm poniżej czubka głowy.

Rozwiązanie:



Aby prawidłowo rozwiązać zadanie musimy sobie odpowiedzieć na pytanie co to znaczy „zobaczyć” siebie w lustrze.

Oznacza to, że promienie od stóp i czubka głowy po odbiciu się od zwierciadła – zgodnie z prawami Snelliusa trafią do naszego oka.

Najkorzystniejszy jest układ taki gdy dolny koniec lustra (punkt b) jest w połowie wysokości pomiędzy okiem a podłogą czyli punkt b powinien być 85 cm nad podłogą.

Również punkt górny lustra (punkt a) powinien być w połowie odległości pomiędzy okiem a czubkiem głowy czyli na wysokości 175 cm.

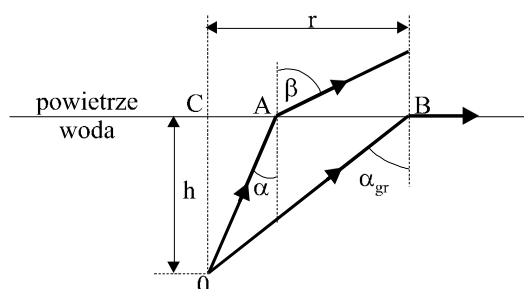
Tak więc lustro powinno mieć

$$175 - 85 = 90 \text{ cm}$$

Zad.10.2

Punktowe źródło światła zanurzone do wody na głębokość $h = 1 \text{ m}$. Oblicz średnicę koła na powierzchni wody, z którego światło wydobywa się z wody, jeżeli współczynnik załamania wody względem powietrza wynosi $n = 1.33$.

Rozwiązanie:



Zgodnie z prawem Snelliusa

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n$$

„Plama” światła jest ograniczona do obszaru gdzie promień światła może wyjść

z wody do powietrza. Graniczny promień jest zdefiniowany przez efekt całkowitego wewnętrznego odbicia.

$$\alpha = \alpha_{gr} \quad \text{gdy} \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

wtedy $\sin \beta = 1$

$$\frac{1}{\sin \alpha_{gr}} = n \rightarrow \sin \alpha_{gr} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.33}$$

Promień r możemy wyznaczyć z trójkąta OCB

$$\frac{r}{h} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{gr} \right)$$

$$r = h \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{gr} \right)$$

średnica

$$d = 2r = 2h \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{gr} \right) = 2h \frac{\cos \alpha_{gr}}{\sin \alpha_{gr}} = 2h \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{gr}}}{\sin \alpha_{gr}} \cong 1.76m$$

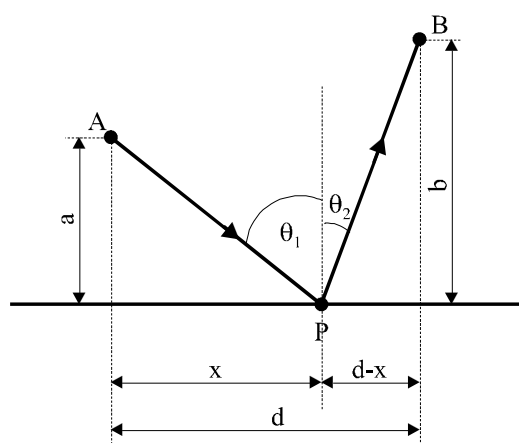
Zad.10.3.

W roku 1650 Pierre Fermat odkrył ważną zasadę, którą formułujemy następująco: Promień świetlny biegnący z jednego punktu do drugiego przebywa drogę, na której przebycie trzeba zużyć – w porównaniu z innymi sąsiednimi drogami – minimum albo maksimum czasu. W oparciu o tą zasadę wyprowadź prawa odbicia i załamania światła.

Rozwiązanie:

1. Prawo odbicia

Rozważmy dwa punkty A i B i biegnący pomiędzy nimi promień po drodze APB.



Czyli żądamy aby:

$$\frac{dl}{dx} = 0$$

Oznaczmy: x – jest zmienną zależną od położenia punktu P.

Całkowita długość l wynosi:

$$l = AP + PB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

Minimum (maksimum) funkcji możemy określić przez przyrównanie pochodnej do zera.

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{2}[b^2 + (d-x)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(d-x)(-1) = 0$$

porządkując wyrażenie otrzymujemy:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

Patrząc na rysunek widać, że

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \theta_1$$

$$\frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \sin \theta_2$$

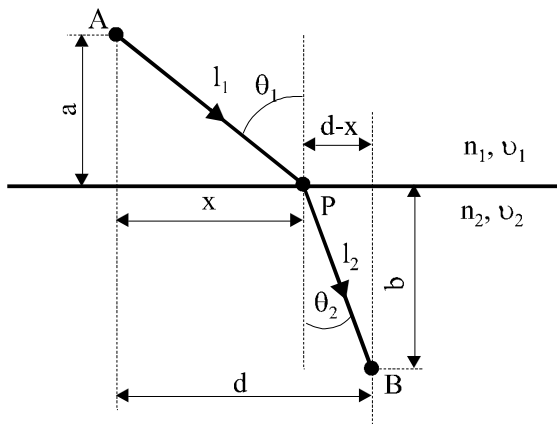
$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

powyższe możemy zapisać:

$$\theta_1 = \theta_2$$

czyli kąt padania θ_1 równa się kątowi odbicia θ_2 .

2. Prawo załamania



W tym przypadku wprowadzamy dodatkowe pojęcie drogi optycznej (l_{opt})

$$l_{opt} = n \cdot l_{geometryczna}$$

Czas przebiegu promienia od punktu A do P i dalej od P do B jest

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}$$

ale wiemy, że

$$n = c/v, \text{ czyli } n_1 = \frac{c}{v_1}; n_2 = \frac{c}{v_2}$$

stąd

$$t = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{c} = \frac{l_{opt}}{c}$$

Zgodnie z zasadą Fermata l_{opt} musi być minimalne:

Zatem

$$\frac{dl_{opt}}{dt} = 0$$

$$l_{opt} = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

$$\frac{dl_{opt}}{dx} = \frac{1}{2} n_1 (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{2} n_2 [b^2 + (d-x)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(d-x)(-1) = 0$$

Porządkując wyrażenie otrzymujemy

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

Porównując z rysunkiem otrzymujemy:

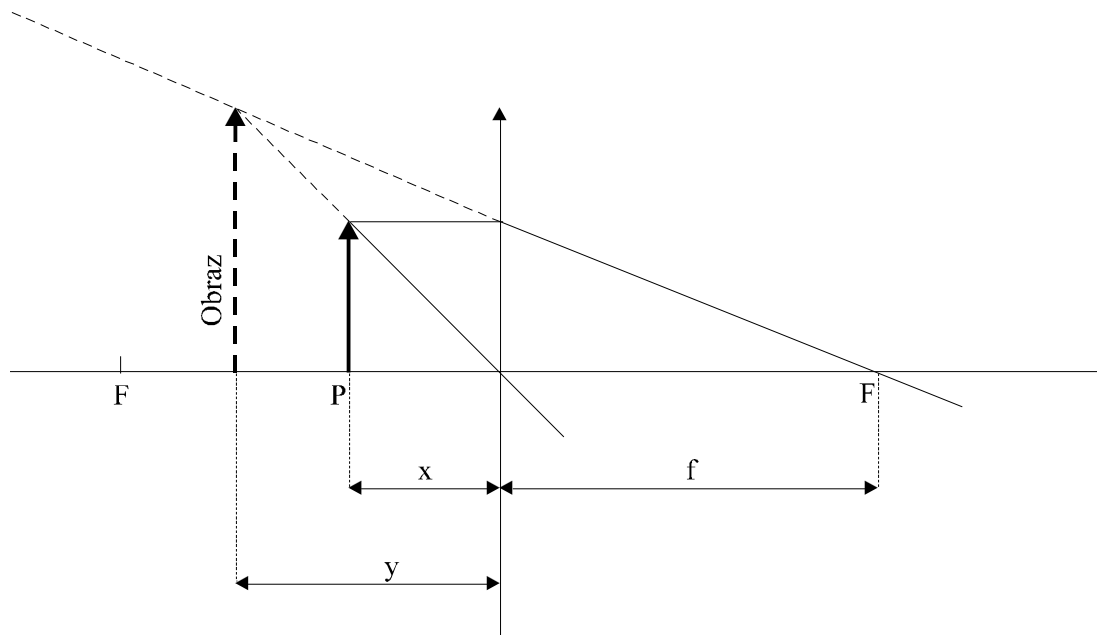
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

czyli znane prawo załamania.

Zad.10.4.

Ogniskowa f cienkiej soczewki skupiającej jest równa 24 cm. Przedmiot P położony jest w odległości $x = 9$ cm od soczewki. Opisać obraz powstający w soczewce.

Rozwiązanie:



Wychodzimy z równania soczewkowego

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

y – odległość obrazu od soczewki

x – odległość przedmiotu od soczewki

f – ogniskowa

Wstawiając dane do powyższego równania otrzymujemy:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{y + 9}{9 \cdot y} = \frac{1}{24}$$

$$24 \cdot (y + 9) = 9 \cdot y \rightarrow y = -14,4 \text{ cm}$$

co oznacza, że obraz jest pozorny.

Powiększenie w obrazu jest dane wzorem:

$$W = \frac{y}{x} = -\frac{14,4}{+9,0} = +1,6$$

Czyli otrzymujemy obraz pozorny, prosty, powiększony 1,6 razy. Opisany w tym zadaniu obraz, to obraz powstający w lupie czyli pojedynczej soczewce skupiającej.

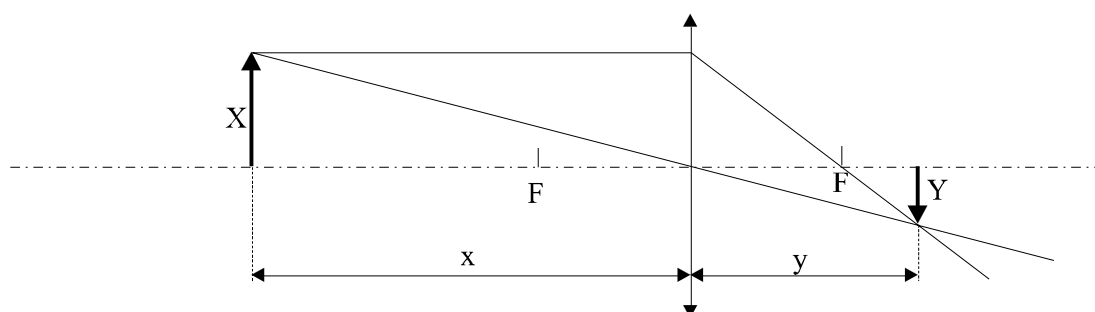
Zad.10.5.

Prosty aparat fotograficzny wyposażony jest w jedną soczewkę dwuwypukłą o ogniskowej $f = 12 \text{ cm}$.

W jakiej odległości y od soczewki należy umieścić kliszę, aby otrzymać ostry obraz przedmiotu oddalonego o $x = 3 \text{ m}$ od obiektywu.

Jaka będzie wielkość obrazu Y , jeżeli przedmiot ma wysokość $X = 2 \text{ m}$.

Rozwiązanie:



Wychodzimy z równania soczewkowego

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

Poszukujemy y

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}; \frac{1}{y} = \frac{x - f}{f \cdot x}$$

$$y = \frac{f \cdot x}{x - f}$$

$$y = \frac{12\text{cm} \cdot 300\text{cm}}{300\text{cm} - 12\text{cm}} = 12,5\text{cm}$$

$$y = 12,5 \text{ cm}$$

Powiększenie aparatu fotograficznego w wynosi

$$W = \frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$$

$$W = \frac{12,5\text{cm}}{300\text{cm}} = 0,042$$

Znając W i X obliczamy Y czyli wysokość obrazu

$$Y = W \cdot X$$

$$Y = 0,042 \cdot 200\text{cm} = 8,4\text{cm}$$