

Zadania do rozdziału 1.

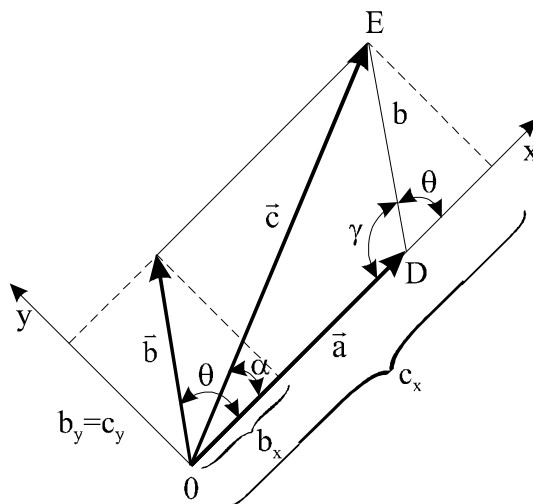
Zad.1.1.

Wykazać, że w wyniku sumowania wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzących kąt θ otrzymuje się nowy wektor $\vec{c}$ taki, że jego rzuty na prostokątne osie x i y spełniają zależności:

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y$$

Rozwiązanie:

Wybieramy układ współrzędnych 0xy tak jak na rysunku.



Stosując zasadę równoległoboku znajdujemy wektor $\vec{c}$. Jego rzuty na osie współrzędnych są odpowiednio równe c_x i c_y . Proste rozważania geometryczne wykazują, że

$$c_x = a_x + b_x \quad \text{ i } \quad c_y = a_y + b_y$$

Z rysunku też widać, że nachylenie wektora wypadkowego $\vec{c}$ względem osi x (a zatem także względem wektora $\vec{a}$) można wyrazić za pomocą zależności:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c_y}{c_x}$$

Zad.1.2.

W odniesieniu do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ z zad.1.1 wykazać (opierając się na rozkładzie na składowe), że wartość liczbowa $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$.

Rozwiązanie:

Rzuty danych wektorów na osie wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} a_x &= a, & b_x &= b \cos \theta \\ a_y &= 0, & b_y &= b \sin \theta \end{aligned}$$

A zatem

$$c_x = a + b \cos \theta, \quad c_y = b \sin \theta.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymamy

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 = (a + b \cos \theta)^2 + b^2 \sin^2 \theta,$$

stąd

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}.$$

Powyższe zadanie możemy rozwiązać posługując się wzorem Carnota dla dowolnego trójkąta ODE.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ponieważ $\gamma = \pi - \theta$ to $\cos \gamma = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

Zatem $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

Zad.1.3.

Dane są dwa punkty $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$. Znaleźć składowe i cosinusy kierunkowe wektora łączącego te punkty.

Rozwiązanie:

Składowe, czyli rzuty wektora $\vec{a}$ na osie układu 0xyz wynoszą:

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

$$a_x = x_B - x_A$$

$$a_y = y_B - y_A$$

$$a_z = z_B - z_A$$

Wektor $\vec{a}$ tworzy z osią 0x kąt α , z osią 0y kąt β a z osią 0z kąt γ . Cosinusy kątów α , β i γ zwane cosinusami kierunkowymi wynoszą:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}$$

gdzie a to moduł wektora $\vec{a}$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Zatem

$$\cos \alpha = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_B - z_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Na podstawie powyższych wzorów łatwo wykazać, że:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Zad.1.4.

Stałe siły $\vec{F}_1 = [1, 2, 3]$ [N] i $\vec{F}_2 = [4, -5, -2]$ [N] działają równomiernie na cząstkę w czasie przesunięcia z punktu A (0,0,7) [m] do punktu B (20,15,0) [m]. Jak wielka praca W została wykonana przy przesunięciu cząstki?

Rozwiązanie:

Wykonana praca W jest określona wzorem

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

gdzie siła $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ jest wypadkową siłą działającą na cząstkę, natomiast $\vec{r}$ jest wektorem przesunięcia

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = [1 + 4, 2 - 5, 3 - 2] = [5, -3, 1] \text{ [N]}$$

$$\vec{r} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] = [20 - 0, 15 - 0, 0 - 7] \text{ [m]}$$

Z definicji (1.9) iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = 5 \cdot 20 - 3 \cdot 15 - 1 \cdot 7 = 100 - 45 - 7 = 48 \text{ N} \cdot \text{m} = 48 \text{ [J]}$$

Zad.1.5.

Dane są dwa wektory $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$. Obliczyć:

1. moduły (długości) każdego wektora,
2. sumę i różnicę wektorów,
3. iloczyn skalarny,
4. cosinus kąta α zawartego między wektorami,
5. iloczyn wektorowy.

Rozwiązanie:

$$\text{Ad.1. } a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$b = |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}$$

$$\text{Ad.2. } \vec{a} + \vec{b} = \vec{i}(3-1) + \vec{j}(4+2) + \vec{k}(-5+6) = [2, 6, 1]$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{i}(3-(-1)) + \vec{j}(4-2) + \vec{k}(-5-6) = [4, 2, -11]$$

$$\text{Ad.3. } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-5) \cdot 6 = -3 + 8 - 30 = -25$$

$$\text{Ad.4. } \vec{a} \cdot \vec{b} = -25$$

ale z (1.1) wiemy, że

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\text{zatem } -25 = \sqrt{50} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{41}} = 0,55$$

Ad.5. Zgodnie z (1.10) możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x] = \\ &= [4 \cdot 6 - (-5)2, (-5)(-1) - 3 \cdot 6, 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2] = [34, -13, 2] \end{aligned}$$

Zad.1.6.

Siła $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}[\text{N}]$ działa na punkt, którego położenie wynosi $\vec{r} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}[\text{cm}]$. Obliczyć moment siły $\vec{M}$ względem początku układu.

Rozwiązanie:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-25 - 8)\vec{i} + (12 - 10)\vec{j} + (-4 - 15)\vec{k} = [-33, 2, -19][\text{Ncm}]$$

$$\vec{M} = [-0.33, 0.02, -0.19][\text{Nm}]$$

Moduł $|\vec{M}|$ wynosi

$$M = |\vec{M}| = \sqrt{0.33^2 + 0.02^2 + 0.19^2} [\text{Nm}] = 0.38 [\text{Nm}]$$

Zad.1.7.

W płaszczyźnie Oxy porusza się punkt, którego promień wodzący $\vec{r}(t)$ ma postać:
 $\vec{r}(t) = [R \cos \omega t, R \sin \omega t]$ gdzie R i ω to pewne stałe. Wyznaczyć prędkość $\vec{v}(t)$ i przyspieszenie $\vec{a}(t)$ tego punktu.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$

gdzie: $x(t) = R \cos \omega t, y(t) = R \sin \omega t$

Wektor prędkości $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

Wektor przyspieszenia $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$

Zatem

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{j}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cos \omega t) = -R\omega \sin \omega t$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R \sin \omega t) = R\omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-R\omega \sin \omega t) = -R\omega^2 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(R\omega \cos \omega t) = -R\omega^2 \sin \omega t$$

Zatem

$$\vec{v}(t) = [-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t]$$

$$\vec{a}(t) = [-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t]$$

Moduły tych wektorów wynoszą odpowiednio

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{R^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + R^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = R\omega \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = R\omega$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{R^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + R^2 \omega^4 \sin^2 \omega t} = R\omega^2 \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = R\omega^2$$

Zauważmy, że iloczyn skalarny

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = R^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - R^2 \omega^3 \cos \omega t \sin \omega t = 0$$

co oznacza, że wektory $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$ są wzajemnie prostopadłe.