ELEKTROSTATYKA

Oddziaływania elektromagnetyczne:

- o zjawiska elektryczne,
- o promieniowanie elektromagnetyczne i optyka,
- o powiązane z mechaniką kwantową.

Ładunek elektryczny

Siła oddziaływania między elektronem a protonem znajdującymi się w odległości równej promieniowi atomu wodoru:

- o grawitacyjne: $F = G m_p m_e / r^2 = 3.61\times10^{-47}$ N
  ($m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67\times10^{-27}$ kg),
- o elektrostatyczne: 8.19×10^{-8} N, siła $2,27\times10^{39}$ razy większa.

W dużych obiektach ilość elektronów i protonów jest jednakowa i dlatego ogromne siły przyciągania i odpychania elektrostatycznego wzajemnie kompensują się i pozostaje jedynie słaba siła grawitacyjna.

Oddziaływanie grawitacyjne dużych obiektów może okazać się silniejsze od oddziaływania elektrostatycznego (przykładem są czarne dziury we Wszechświecie).

Źródłem siły grawitacyjnej jest masa grawitacyjna.
Siła elektrostatyczna wywołana jest ładunkiem elektrycznym.
Ładunek elektryczny może być dodatni lub ujemny.

- Ładunek elementarny $e = 1.60\times10^{-19}$ C
- Niektóre cząstki elementarne (np. neutron, foton i neutrino) charakteryzują się zerowym ładunkiem elektrycznym.
- Naładowana cząstka ma ładunek skwantowany, tzn. równy całkowitej wielokrotności *e*.

Prawo zachowania ładunku sformułowane przez Franklina w 1747 r.

W układzie zamkniętym całkowity ładunek pozostaje stały.

Prawo to jest spełnione nawet przy anihilacji naładowanych cząstek.

Prawo Coulomba

Siła działająca pomiędzy dwoma naładowanymi cząstkami jest proporcjonalna do iloczynu ładunków q_1 i q_2 i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi

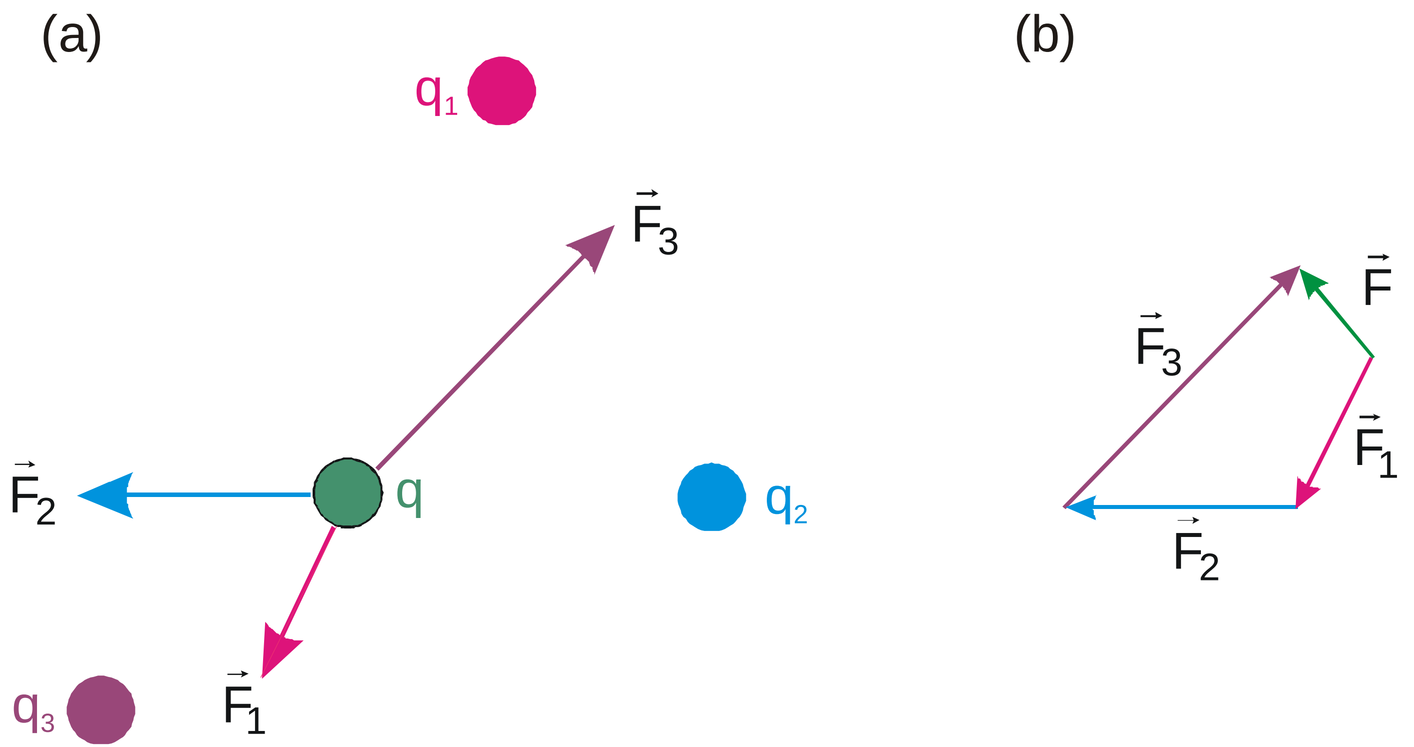
$$F = k_o \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{4.1}$$

gdzie k_o jest współczynnikiem proporcjonalności.

Jednostka ładunku jest C. Stała k_o w układzie SI wynosi $1/4\pi\varepsilon_o$. Wówczas

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \tag{4.2}$$

gdzie $\varepsilon_o = 1/4\pi k_o = 8.854 \times 10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$. Wielkość tę nazywamy **przenikalnością elektryczną próżni**.



Rys. 4.1. (a) Siły działające na ładunek q za strony ładunków q_1, q_2, q_3. (b) Wypadkowa siła otrzymana w wyniku dodania wektorowego sił działających na ładunek q.

Zasada superpozycji sił elektrostatycznych potwierdzona jest eksperymentalnie.

Pole elektryczne

Definicja pola

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{4.3}$$

Wielkość *E* mierzona jest w N/C lub V/m.

Pole elektryczne ładunku punktowego *Q* w odległości *r*:

$$\vec{E} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{E}(x,y,z)$$

czyli

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r}\,' \tag{4.4}$$

gdzie $\vec{r}\,'$ jest wektorem jednostkowym skierowanym od ładunku *Q* do punktu *P(x, y, z).*

Pole elektryczne pochodzące od *n* ładunków punktowych

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{r_j^2}\vec{r}_j\,' = \sum_{j=1}^{n}\vec{E}_j(x,y,z) \tag{4.5}$$

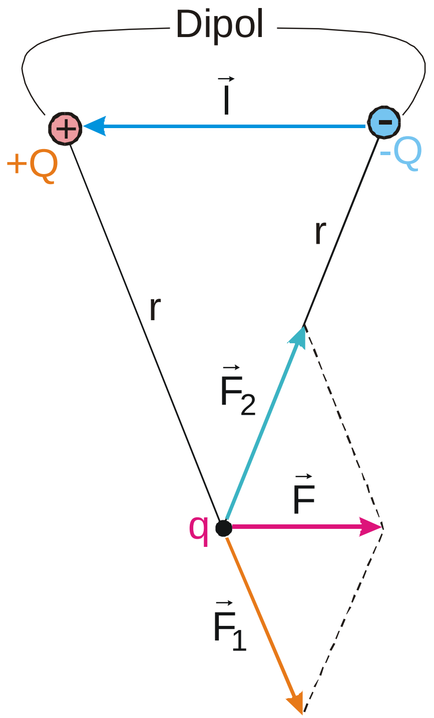
W przypadku ładunku rozłożonego o gęstości ładunku r = dQ/dV = $r(x,y,z)$ [jednostka C/m^3]

$$E = \frac{1}{4p\, e_o e_r} \int_V \frac{r(x',y',z')}{r^2} dx'\, dy'\, dz' \tag{4.6}$$

e_r określa względną przenikalność elektryczną ośrodka.

W skali mikro (np. w atomie) gęstość ładunku zmienia się silnie od punktu do punktu i wtedy takie pojęcie traci sens.

Dipol



Rys. 4.2. Siły działające na ładunek *q* ze strony dipola o momencie *p* = *Ql*.

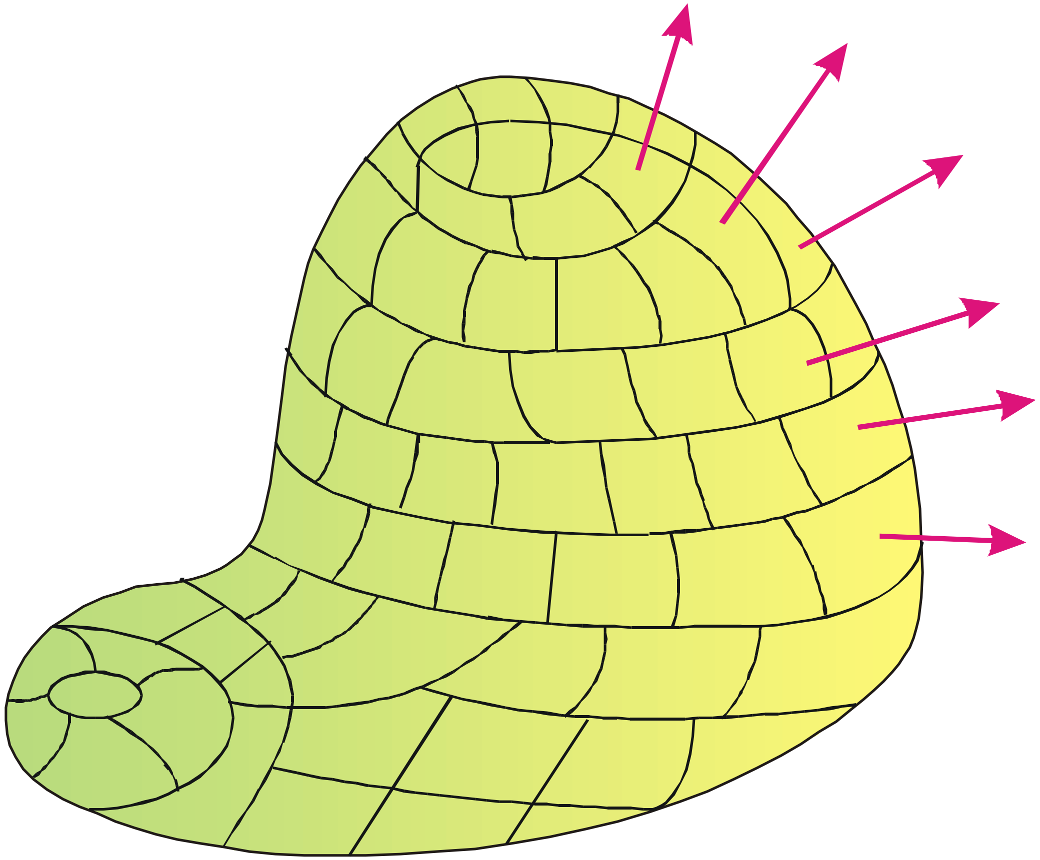
Dipol elektryczny charakteryzujemy momentem dipolowym $p = Ql$. Zauważmy, że $F / F_1 = l / r$, czyli

$$F = \tfrac{l}{r} F_1 = \tfrac{l}{r}\left(k_o \frac{Qq}{r^2}\right) = q\, k_o \frac{p}{r^3} \tag{4.7}$$

Pole elektryczne dipola

$$E = \frac{1}{4p\, e_o} \frac{p}{r^3} \tag{4.8}$$

Strumień pola



Rys. 4.3. Strumień pola elektrycznego.

Każdemu elementowi *dS* przypisujemy wektor $d\vec{S}_j$ normalny do powierzchni i określający orientację elementu *dS*

$$\left| d\vec{S}_j \right| = dS; \qquad \frac{d\vec{S}_j}{dS_j} = \vec{n}$$

Strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię $d\vec{S}_j$

$$dF_E = \vec{E}_j \cdot d\vec{S}_j \tag{4.9}$$

Całkowity strumień przez powierzchnię S:

$$F_E = \sum_j \vec{E}_j \cdot d\vec{S}_j = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{4.10}$$

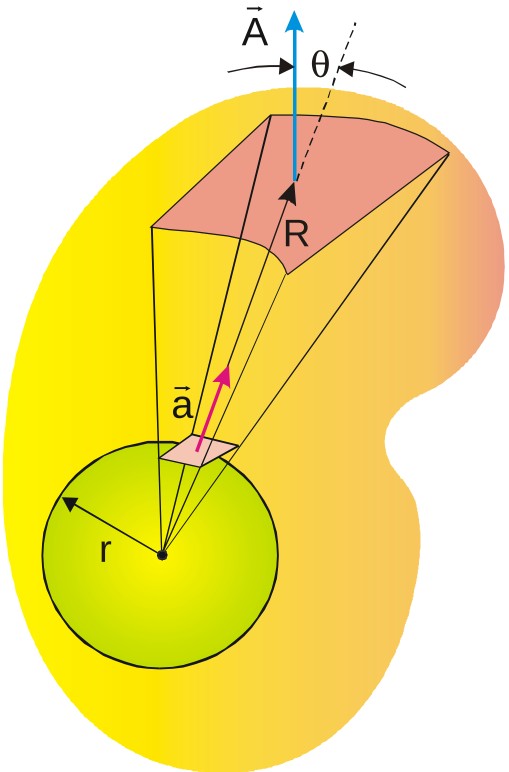
Jednostka strumienia ma wymiar Vm.

Prawo Gaussa

Dla ładunku punktowego q otoczonego kulą o promieniu r i środku pokrywającym się z położeniem ładunku, strumień Φ_E przechodzący przez sferę

$$\Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o\varepsilon_r} \qquad (4.11)$$

Strumień pola nie zależy od wielkości powierzchni.



Rys. 4.4 Strumień przez dowolną zamkniętą powierzchnię zawierającą ładunek q.

Rozpatrzymy dowolną powierzchnię, która zawiera kulę wraz z ładunkiem i udowodnimy, że całkowity strumień przez tę powierzchnię jest identyczny jak strumień przez powierzchnię kulistą.

Powierzchnia elementu $\vec{A}$ jest większa od powierzchni elementu $\vec{a}$

$$A = a\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{\cos\theta}$$

ze względu na ten sam kąt bryłowy

$$d\Omega = \frac{a}{r^2} = \frac{A}{R^2}\cos\theta$$

oraz ze względu na nachylenie elementu do kierunku radialnego.

Kąt θ jest kątem zawartym zewnętrzną normalną a kierunkiem radialnym.

Strumień natężenia pola przez oba elementy jest równy

$$d\Phi_{E,a} = \vec{E}_r \cdot \vec{a} = E_r a$$

oraz

$$d\Phi_{E,A} = \vec{E}_R \cdot \vec{A} = E_R A \cos\theta$$

Wstawiając do równania na strumień wartości

$$E_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{q}{R^2} \qquad \text{i} \qquad A = a\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{\cos\theta}$$

dostajemy

$$d\Phi_{E,A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r} a = E_r a \tag{4.12}$$

Strumienie przez oba elementy są równe. Również całkowity strumień przez obie powierzchnie będzie jednakowy, a więc **strumień natężenia pola przez dowolną zamkniętą powierzchnię otaczającą ładunek *q* będzie równy** $q/\varepsilon\varepsilon_o$.

Jeżeli ładunek leży na zewnątrz zamkniętej dowolnej powierzchni, to strumień przez tę powierzchnię znika.

Jeżeli mamy *n* ładunków punktowych objętych powierzchnią, to strumień przez tę powierzchnię wynosi:

$$F_E = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{e_o e_r} \qquad (4.13)$$

W przypadku ładunku o gęstości objętościowej $r(x,y,z)$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{e_o e_r} \int_V r\,dV \qquad (4.14)$$

Prawo Gaussa brzmi: ***strumień natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą równa się iloczynowi całkowitego ładunku zamkniętego w tej powierzchni przez.***

Powierzchniowy rozkład ładunku

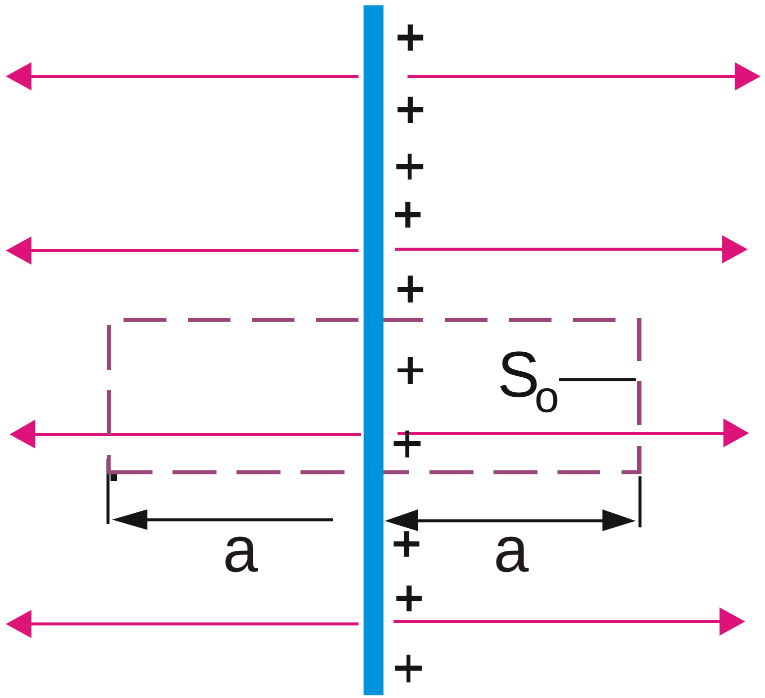


Fig. 4.6. Nieskończona powierzchnia metalowa o gęstości powierzchniowej ładunku σ.

Całkowity strumień natężenia pola elektrycznego

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES_o$$

Zgodnie z twierdzeniem Gaussa

$$2ES_o = \frac{\sigma S_o}{\varepsilon_o \varepsilon_r}$$

czyli pole elektryczne naładowanej płaszczyzny jest równe

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o \varepsilon_r} \qquad (4.17)$$

Kondensator płaski

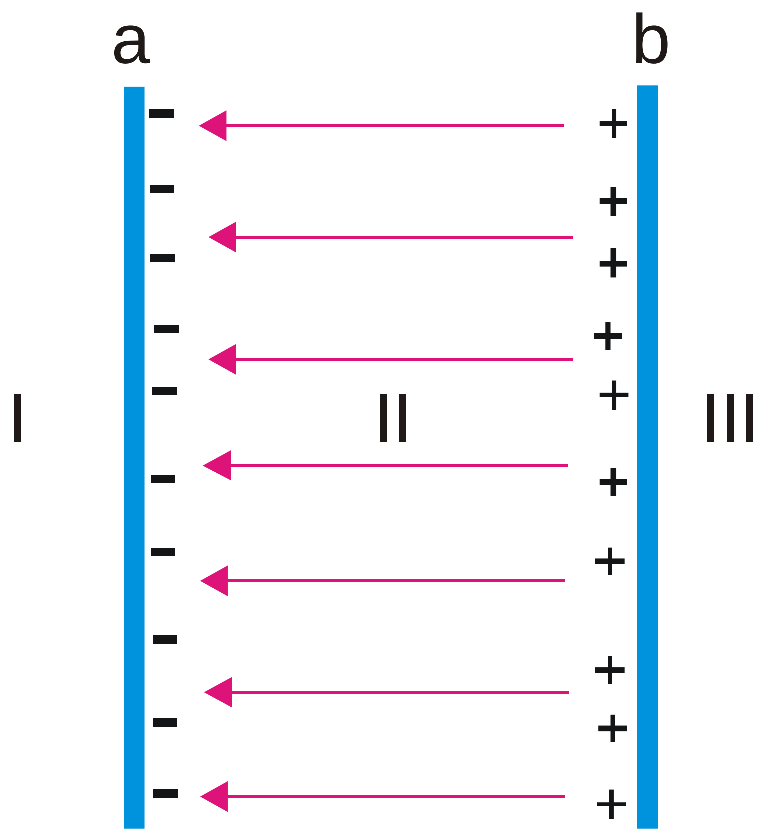


Fig. 4.7. Pole elektryczne między dwoma płaszczyznami o równych gęstościach ładunku powierzchniowego s lecz przeciwnych znakach.

Pole wytworzone przez płaszczyznę b wynosi $E_b = s \,/\, 2e_o e_r$ i jest skierowane od tej płaszczyzny.

W obszarze I:

$$E_I = E_{aI} + E_{bI} = \frac{s}{2e_o e_r} - \frac{s}{2e_o e_r} = 0$$

W obszarze II:

$$E_{II} = E_{aII} + E_{bII} = -\frac{s}{2e_o e_r} - \frac{s}{2e_o e_r} = -\frac{s}{e_o e_r} \quad (4.18)$$

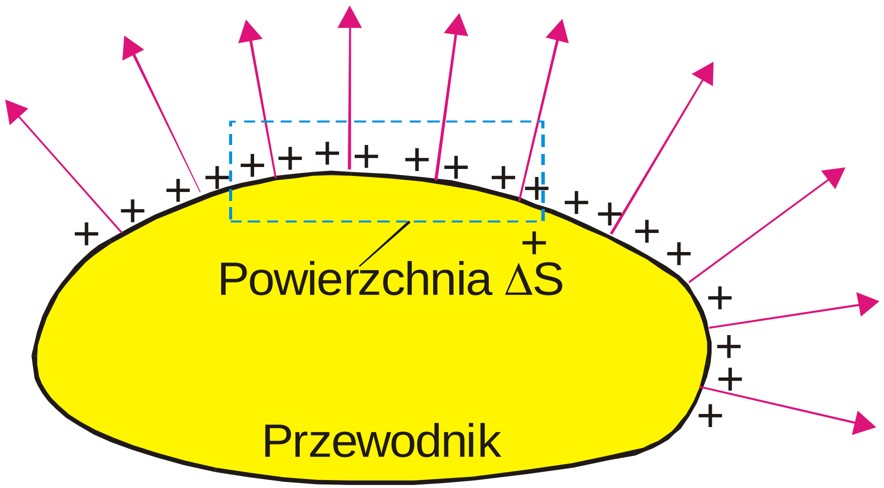
W obszarze III:

$$E_{III} = E_{aIII} + E_{bIII} = -\frac{s}{2e_o e_r} + \frac{s}{2e_o e_r} = 0$$

Na zewnątrz płaszczyzn pole elektryczne znika, natomiast między płaszczyznami wynosi $s \,/\, e_o e_r$.

Powierzchnia przewodnika

Większość ciał stałych dzielimy na przewodniki i izolatory (dielektryki).
Dodatkowy ładunek umieszczony na powierzchni lub wewnątrz dielektryka pozostaje nieruchomy.



Rys. 4.9 Wewnątrz prostopadłościanu o podstawie ΔS znajduje się ładunek $\sigma\Delta S$.

W przewodniku pole elektryczne może istnieć jedynie w ciągu krótkiego okresu czasu dopóki swobodne elektrony nie zgromadzą się na powierzchni przewodnika pod wpływem działania zewnętrznego pola i nie utworzą przeciwnie skierowanego pola.
Zgodnie z twierdzeniem Gaussa

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_w}{\varepsilon_o \varepsilon_r}$$

- W stanie równowagi ładunkowej przewodnika $E_w = 0$, ładunek wewnętrzny przewodnika $Q_W = 0$.
- Linie sił pola elektrycznego na powierzchni przewodnika są skierowane prostopadle do powierzchni.

$$E\,\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_o \varepsilon_r}$$

czyli natężenie pola na powierzchni przewodnika

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_r} \qquad (4.20)$$

Potencjał elektryczny

Pokażemy, że całka z pola elektrycznego $\vec{E}$ po krzywej łączącej punkty A i B

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = const$$

przybiera tę samą wartość dla wszystkich dróg łączących punkty A i B.

Dla ładunku punktowego praca sił pola elektrostatycznego wynosi

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_A - U_B \tag{4.21}$$

i jest równa zmianie energii potencjalnej pola elektrostatycznego.

Przyjmujemy $U = 0$, gdy ładunek znajduje się w nieskończoności. Wówczas

$$U_A = -q\int_\infty^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{4.22}$$

Jeżeli przesuniemy ładunek *q* z nieskończoności do punktu położonego w odległości *r* od ładunku punktowego *Q*, to energia potencjalna będzie równa pracy przeciwko sile elektrostatycznej

$$U = -q\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\,dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}qQ\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

Wobec tego, energia potencjalna ładunku punktowego *q* umieszczonego w polu ładunku *Q* wynosi

$$U = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{qQ}{r} \tag{4.23}$$

Potencjał elektryczny określamy jako energię potencjalną jednostkowego ładunku

$$V = \frac{U}{q} \tag{4.24}$$

Jednostką potencjału elektrycznego jest wolt V = J/C.

Potencjał ładunku punktowego *Q*

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q}{r} \tag{4.25}$$

Potencjał elektryczny jest pracą jaką należy wykonać aby przesunąć ładunek jednostkowy z nieskończoności na odległość r od ładunku punktowego Q.

Różnica potencjałów (napięcie elektryczne) pomiędzy dwoma punktami stanowi pracę jaką należy wykonać w celu przesunięcia jednostkowego ładunku z jednego punktu pola do drugiego.

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (4.26)$$

Z ostatniego wyrażenia wynika

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (4.27)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \qquad (4.28)$$

Z kolei wektor przesunięcia $d\vec{s}$

$$d\vec{s} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$$

Przyjmując teraz, że $\vec{E} = -gradV$

$$\vec{E} = -\left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \qquad (4.29)$$

widzimy, że iloczyn skalarny

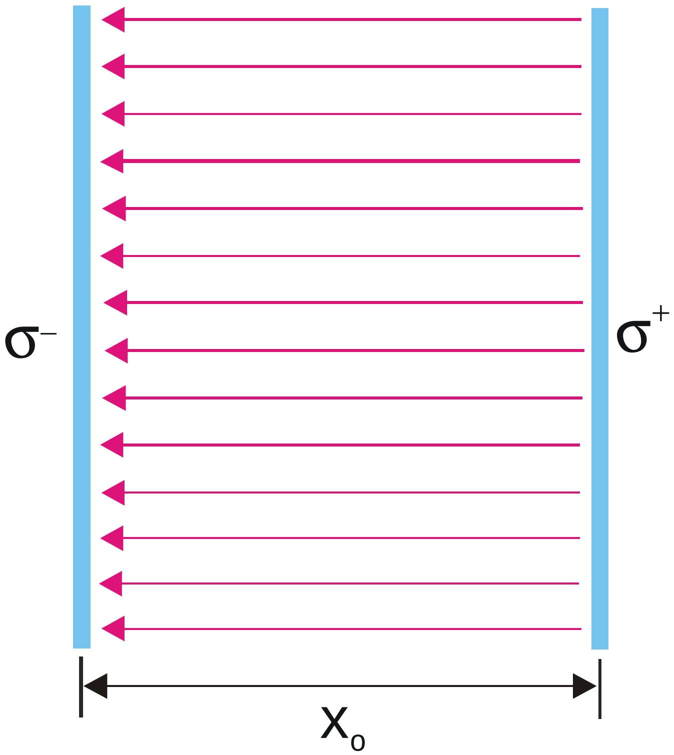
$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = -dV$$

co potwierdza relację (4.27). Pokazaliśmy zatem, że

$$\vec{E} = -gradV \qquad (4.30)$$

Znak minus oznacza, że wektor natężenia pola elektrycznego skierowany jest od większego do mniejszego potencjału. Wektor *grad V* pokrywa się z kierunkiem wzrostu funkcji *V*.

Przykład: różnica potencjałów pomiędzy dwiema przeciwnie naładowanymi równoległymi płytkami



Rys. 4.11. Dwie równoległe płytki naładowane równymi co do wartości lecz przeciwnymi ładunkami.

Zgodnie z (4.27)

$$V = -Ex_o$$

Ponieważ linie sił pola elektrycznego skierowane są od ładunków dodatnich do ujemnych, to znak minus wskazuje, że dodatnia płytka charakteryzuje się wyższym potencjałem.

Różnica potencjałów między płytkami wynosi

$$DV = \frac{s x_o}{e_o e_r} = \frac{x_o Q}{e_o e_r S} \qquad (4.31)$$

Jeżeli kilka naładowanych ciał położonych jest w odległościach odpowiednio $r_1, r_2, \ldots, r_n$ od punktu P, to potencjał elektryczny w tym punkcie jest równy sumie potencjałów od poszczególnych ciał.

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n \right) d\vec{s} = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

Siły elektrostatyczne są zachowawcze.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad (4.32)$$

Powyższa **całka po konturze zamkniętym nazywana jest cyrkulacją wektora natężenia pola elektrycznego**.

Wzór (4.32) nie jest słuszny w przypadku zmiennych w czasie pól elektrycznych. Pola takie nie są potencjalne.

Pojemność elektryczna

Stosunek nagromadzonego ładunku do różnicy potencjałów *V* nazywamy pojemnością *C*:

$$C = \frac{Q}{DV} \qquad (4.33)$$

Jednostka pojemności: C/V = F (farad). Stosuje się mniejsze jednostki jak mikrofarad (μF), nanofarad (nF), pikofarad (pF).

Różnica potencjałów pomiędzy dwoma płytkami wynosi $DV = x_o Q / e_o e_r S$. Stąd wynika, że pojemność kondensatora płaskiego wynosi

$$C = \frac{Q}{DV} = \frac{e_o e_r S}{x_o} \qquad (4.34)$$

Gęstość energii pola elektrycznego

Załóżmy, że początkowo nienaładowany kondensator stopniowo ładowano, przy czym różnica potencjałów wzrastała od 0 do V_o. Ładunek na okładkach kondensatora będzie wzrastał od 0 do Q_o, gdzie $Q_o = CV_o$. Praca wykonana przy przemieszczaniu ładunku dq od ujemnie naładowanej płytki do naładowanej dodatnio wynosi

$$dW = Vdq$$

Energia zmagazynowana w kondensatorze

$$W = \int_0^{V_o} Vdq = \int_0^{Q_o} \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q_o^2}{C} \qquad (4.35)$$

Zauważmy, że

$$E = \frac{DV}{x_o} = \frac{Q_o}{e_o e_r S} \qquad \text{czyli} \qquad Q_o = e_o e_r SE$$

Podstawiając to do (4.35) otrzymamy

$$W = \frac{1}{2}\frac{(e_o e_r SE)^2}{C}$$

Uwzględniając z kolei (4.34) mamy

$$W = \frac{e_o e_r E^2}{2} S x_o$$

Teraz dzieląc obie części przez objętość kondensatora Sx_o, otrzymujemy gęstość energii pola elektrycznego

$$w = \frac{1}{2} e_o e_r E^2 \tag{4.36}$$

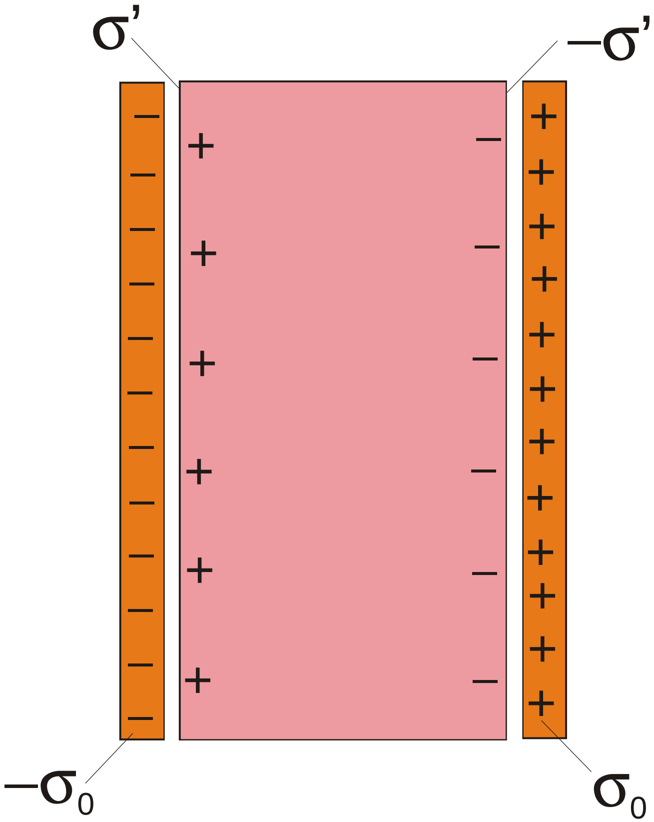
Z bardziej ogólnych ale zarazem bardziej złożonych rozważań wynika, że całkowita energia konieczna do uformowania dowolnego rozkładu ładunków, jest równa dokładnie całce po $e_o e_r E^2 / 2$ liczonej po całej przestrzeni *V*, gdzie *E* jest polem utworzonym przez taki rozkład ładunku

$$W = \frac{e_o e_r}{2} \int E^2 dV \tag{4.37}$$

Dielektryki

Jeżeli między okładkami umieścimy substancję, to pojemność kondensatora wzrasta od C do C'. Możemy wówczas określić względną przenikalność dielektryczną substancji

$$e_r = \frac{C'}{C} \tag{4.38}$$



Rys. 4.12. Powstanie ładunku indukowanego s' na powierzchni dielektryka umieszczonego między okładkami kondensatora.

W dielektrykach ładunki nie mają możliwości swobodnego przemieszczania

Polaryzacja dielektryka to indukcja ładunku na powierzchni dielektryka pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego.

Wskutek zjawiska polaryzacji zmienia się wartość natężenia pola w ośrodku dielektrycznym; wpływ pola wewnętrznego.

Cząsteczki niespolaryzowane (np. H_2, Cl_2, CCl_4, węglowodory): środki ciężkości ładunków dodatnich i ujemnych pokrywają się.

Pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego w cząstkach niespolaryzowanych indukuje się moment dipolowy

$$\vec{p}_e = \varepsilon_o \alpha \vec{E} \qquad (4.39)$$

gdzie α jest współczynnikiem polaryzowalności atomu.

Cząsteczki spolaryzowane o samoistnym momencie dipolowym $\vec{p}_e$ (H_2O, NH_3, HCl, CH_3Cl)

Rodzaje polaryzacj

Polaryzacja skierowana: pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego cząsteczki dielektryka dążą do zajęcia takiego położenia, aby kierunek wektorów ich momentów dipolowych $\vec{p}_e$ był zgodny z kierunkiem wektora $\vec{E}$.

Polaryzacja elektronowa: cząsteczki niespolaryzowane uzyskują w polu elektrycznym momenty dipolowe indukowane w wyniku odkształcenia orbit elektronowych.

Polaryzacja jonowa (NaCl, CsCl): rozsunięcie jonów pod wpływem pola elektrycznego.

Wskaźnik ilościowy polaryzacji – **wektor polaryzacji**

$$\vec{P}_e = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{ei} \qquad (4.40)$$

N oznacza liczbę dipoli zawartych w objętości V dielektryka, a $\vec{p}_{ei}$ moment elektryczny i-tego dipola.

W przypadku dielektryka jednorodnego o cząsteczkach niespolaryzowanych

$$\vec{P}_e = N_o \vec{p}_e \qquad (4.41)$$

gdzie N_o oznacza liczbę cząsteczek w jednostce objętości. Stosując wzór (4.39) otrzymujemy

$$\vec{P}_e = N_o e_o a \vec{E} = e_o c \vec{E} \qquad (4.42)$$

Współczynnik $c_e = N_o a$ – podatność dielektryczna substancji.

Twierdzenie Gaussa w przypadku obecności dielektryków. Wektor indukcji elektrycznej

Wartość liczbowa $\vec{E}$ jest zawsze odwrotnie proporcjonalna do stałej dielektrycznej ε ośrodka. Z tego względu wprowadzono wielkość $\vec{D}$ niezależną od stałej dielektrycznej danej substancji

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_o \vec{E} \tag{4.43}$$

$\vec{D}$ nazywamy wektorem indukcji elektrycznej i mierzymy w C/m^2:
$\vec{D}$ charakteryzuje zatem to pole elektryczne, które wytwarzają w danej substancji same tylko ładunki swobodne. Ładunki związane powstające w dielektryku wywołują zmianę rozkładu w przestrzeni ładunków swobodnych wytwarzających pole.

Strumień indukcji elektrycznej

$$d\Phi_D = \vec{D}_j \cdot d\vec{S}_j$$

Całkowity strumień

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{swob} \tag{4.45}$$

gdzie zgodnie z definicją wektora indukcji elektrycznej uwzględniono tylko ładunki swobodne.

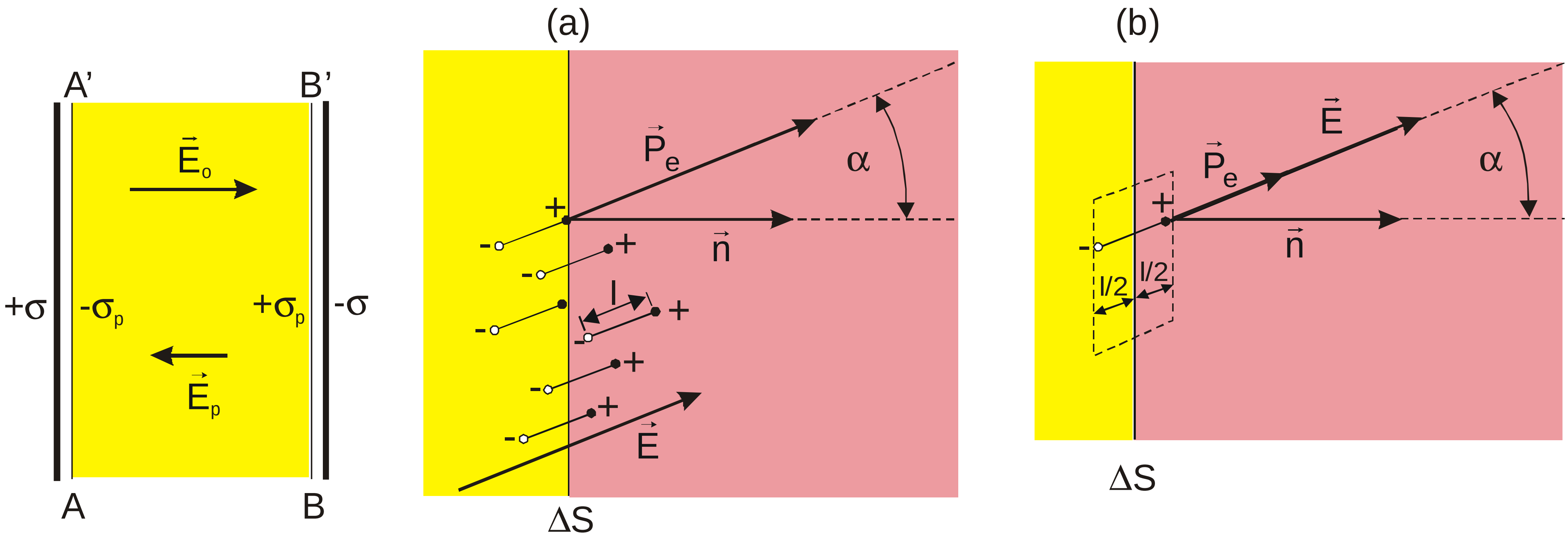
W próżni $D = e_o E$, a zatem równanie (4.45) przybiera postać

$$\int_S e_o \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_{swob} \qquad (4.46)$$

Pole w dowolnym środowisku różni się od pola w próżni tym, że wytwarzają je ładunki zarówno swobodne, jak i związane. W ogólnym przypadku

$$\int_S e_o \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_{swob} + \sum q_{zwią} \qquad (4.47)$$

Ładunki swobodne wytwarzają zewnętrzne pole elektryczne, natomiast ładunki związane wytwarzają pole wewnętrzne spolaryzowanego dielektryka.



Rys. 4.13. Powstawanie ładunku związanego.

Pole elektryczne $\vec{E}_p$ ładunków związanych jest skierowane przeciwnie względem pola zewnętrznego $\vec{E}_o$, wytworzonego przez ładunki swobodne. Natężenie pola wypadkowego

$$\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$$

Znajdziemy teraz sumę ładunków związanych, które powstały w wyniku polaryzacji dielektryka, objętego zamkniętą powierzchnią *S*.

Suma algebraiczna wszystkich ładunków dipoli całkowicie objętych powierzchnią, równa się zeru. Przy obliczaniu

$$\sum q_{zwią}$$

uwzględnia się zatem tylko te dipole, które przecinają powierzchnię S. Warunek ten spełniają wszystkie dipole, których środki leżą wewnątrz objętości $lDScos\alpha$.

Liczba dipoli przeciętych przez element DS wynosi $N_o lDScos a$.

Całkowity ładunek związany $Dq_{zwi\,ą}$, powierzchni ΔS

$$D q_{zwią} = -N_o ql \cos a D S = -N_o p_e \cos a D S$$

Iloczyn $N_o p_e$ równy jest modułowi wektora polaryzacji. A zatem

$$D q_{zwią} = -\vec{P}_e \cos a D S = -\vec{P}_e \cdot \vec{n} D S = -\vec{P}_e \cdot d\vec{S} \qquad (4.48)$$

Sumy ładunków związanych, znajdujących się wewnątrz zamkniętej powierzchni S

$$\sum q_{zwią} = -\int_S \vec{P}_e \cdot d\vec{S} \qquad (4.49)$$

Twierdzenie Gaussa

$$\int_S e_o \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_{swob} - \int_S \vec{P}_e \cdot d\vec{S}$$

stąd

$$\int_S \left(e_o \vec{E} + \vec{P}_e\right) d\vec{S} = \sum q_{swob} \tag{4.50}$$

Wstawiając tu $\sum q_{swob}$ z równania (4.45) otrzymujemy

$$\int_S \left(e_o \vec{E} + \vec{P}_e\right) d\vec{S} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Przeto

$$\vec{D} = e_o \vec{E} + \vec{P}_e \tag{4.51}$$

Uwzględniając (4.42) mamy

$$\vec{D} = e_o \vec{E} + e_o c_e \vec{E} = e_o \left(1 + c_e\right) \vec{E} \tag{4.52}$$

Z drugiej strony, w myśl definicji (4.43), wektor $\vec{D}$ równy jest

$$\vec{D} = e_o e_r \vec{E}$$

Zatem

$$e_r = 1 + c_e \tag{4.53}$$

Stała dielektryczna równa się podatności dielektrycznej zwiększonej o 1. Dla próżni $e_r = 1$, a $c_e = 0$.