PRAWA ZACHOWANIA

Prawa zachowania – najbardziej fundamentalne prawa:

- **”zewnętrzne”: prawo zachowania pędu, prawo zachowania momentu pędu, prawo zachowania energii;**
- **”wewnętrzne”: prawa zachowania np. całkowitej liczby nukleonów w reakcji jądrowej, zachowanie liczby leptonowej, barionowej**

Zachowanie pędu

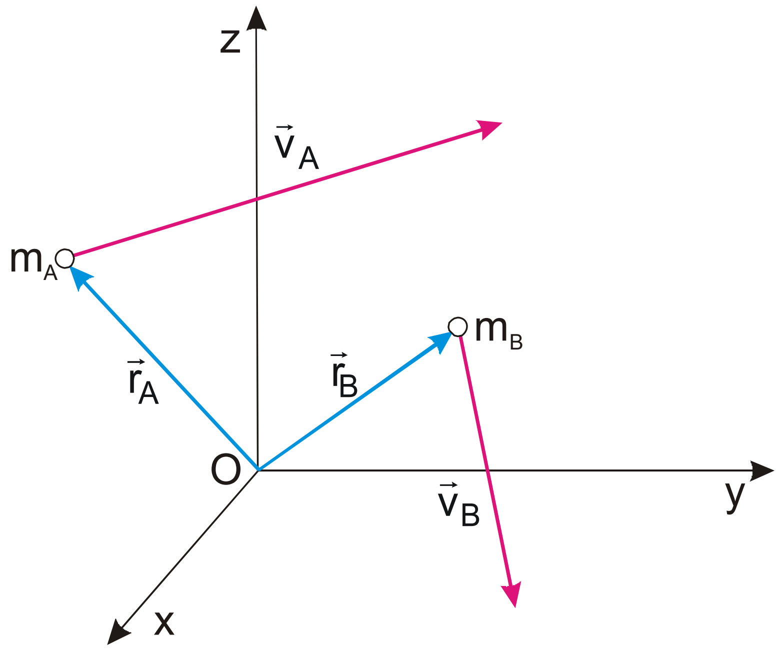
Pojęciem nierozłącznie związanym z pojęciem siły jest pojęcie masy bezwładnej (inercjalnej). **Masa bezwładna jest miarą oporu jaki stawia przyśpieszane ciało**.

Pęd cząstki:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Równanie to można zapisać w postaci:

$$\vec{p} = \vec{i}mv_x + \vec{j}mv_y + \vec{k}mv_z$$



Zasada zachowania pędu dla dwóch izolowanych cząstek

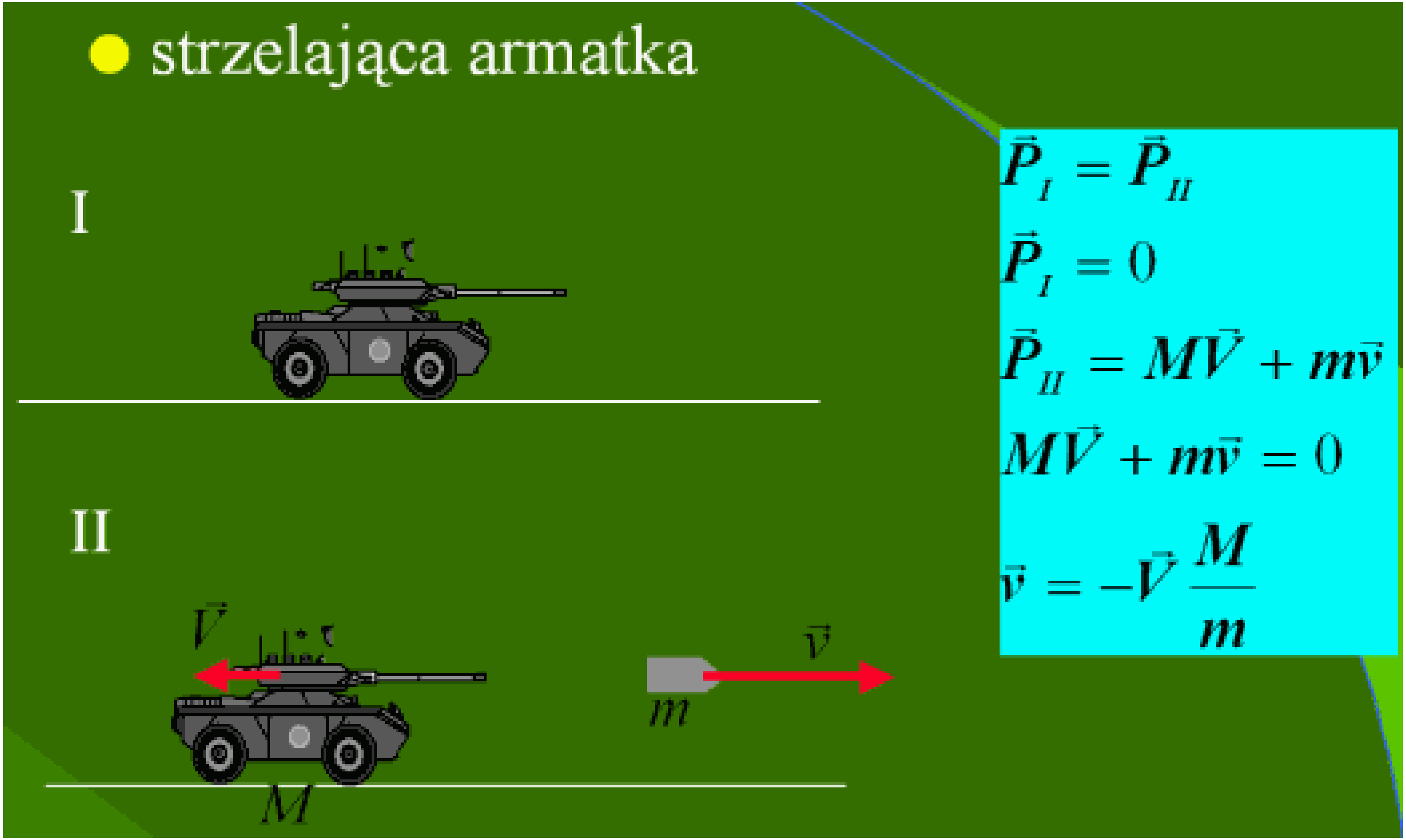
$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = const$$

Całkowity pęd izolowanego układu cząstek pozostaje stały.

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = const$$

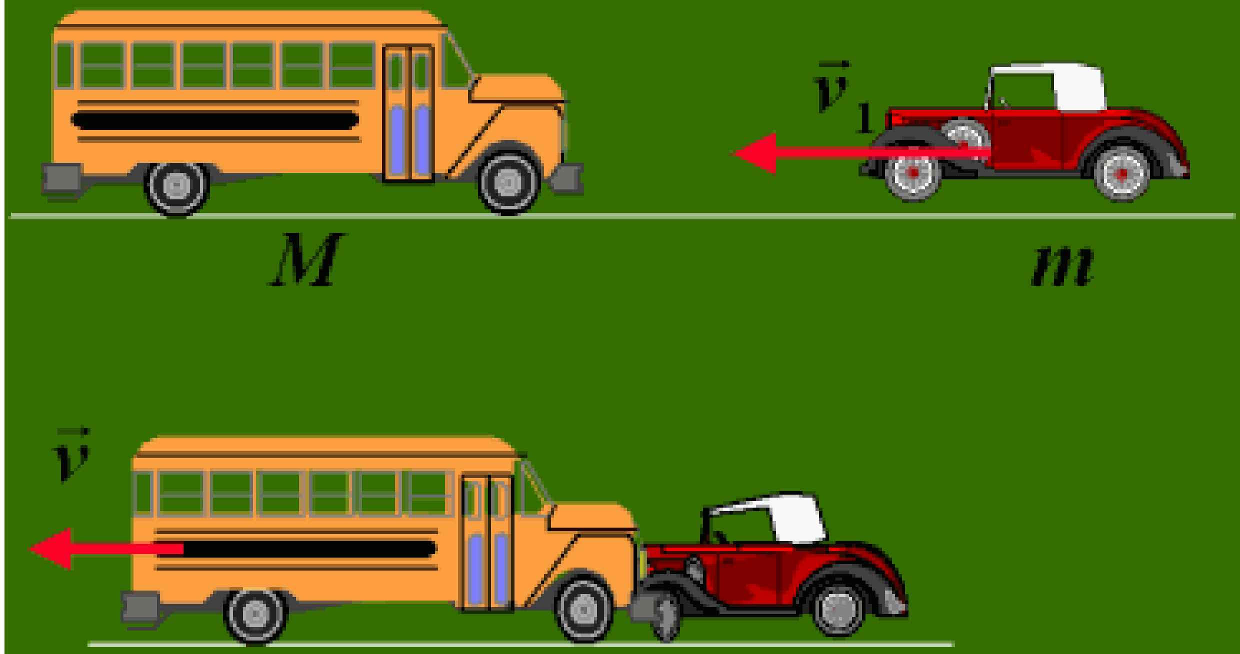
Dla układu złożonego z wielu cząstek mamy:

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = const$$



http://oen.dydaktyka.agh.edu.pl/dydaktyka/fizyka/a_fizyka/04_pracaienergia/sld021.htm

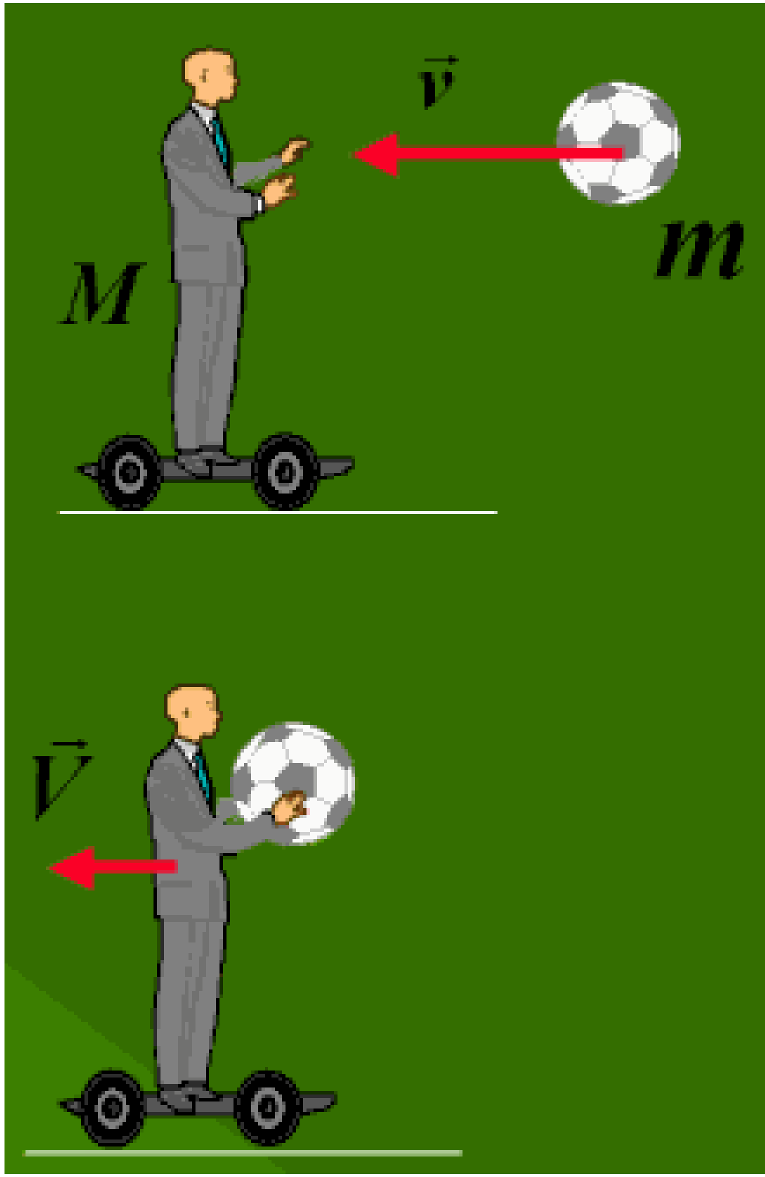
- zderzenie samochodów



$$\vec{P}_I = \vec{P}_{II}$$
$$\vec{P}_I = m_1\vec{v}_1$$
$$\vec{P}_{II} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$
$$m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 - \frac{m_1}{2} v_1^2 = \ldots$$

http://oen.dydaktyka.agh.edu.pl/dydaktyka/fizyka/a_fizyka/04_pracaienergia/sld022.htm



$$\vec{P}_I = \vec{P}_{II}$$

$$\vec{P}_I = m\vec{v}$$

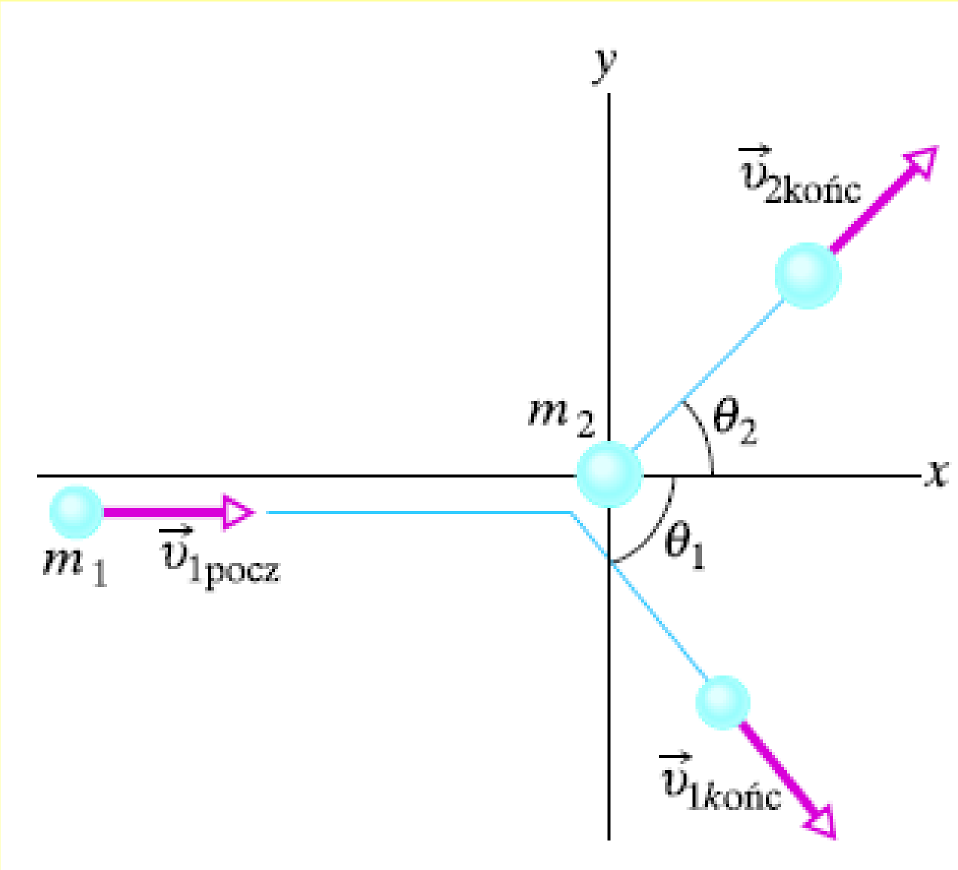
$$\vec{P}_{II} = (m+M)\vec{V}$$

$$m\vec{v} = (m+M)\vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{v}\,\frac{m}{m+M}$$

http://oen.dydaktyka.agh.edu.pl/dydaktyka/fizyka/a_fizyka/04_pracaienergia/sld023.htm

Zderzenie sprężyste niecentralne



Całkowity pęd

$$\vec{p}_{1pocz} + \vec{p}_{2pocz} = \vec{p}_{1koń} + \vec{p}_{2koń}$$

i energia

$$E_{1pocz} + E_{2pocz} = E_{1koń} + E_{2koń}$$

muszą być zachowane.

Dla składowych pędu mamy równania

$$m_1 v_{1pocz} = m_1 v_{1koń} \cos\theta_1 + m_2 v_{2koń} \cos\theta_2$$

$$0 = -m_1 v_{1koń} \sin\theta_1 + m_2 v_{2koń} \sin\theta_2$$

zaś dla energii

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1pocz}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1koń}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2koń}^2$$

Zachowanie momentu pędu

Moment pędu (kręt) cząstki o pędzie $\vec{p}$ i znajdującej się w punkcie określonym wektorem wodzącym $\vec{r}$ jest zdefiniowanym wzorem:

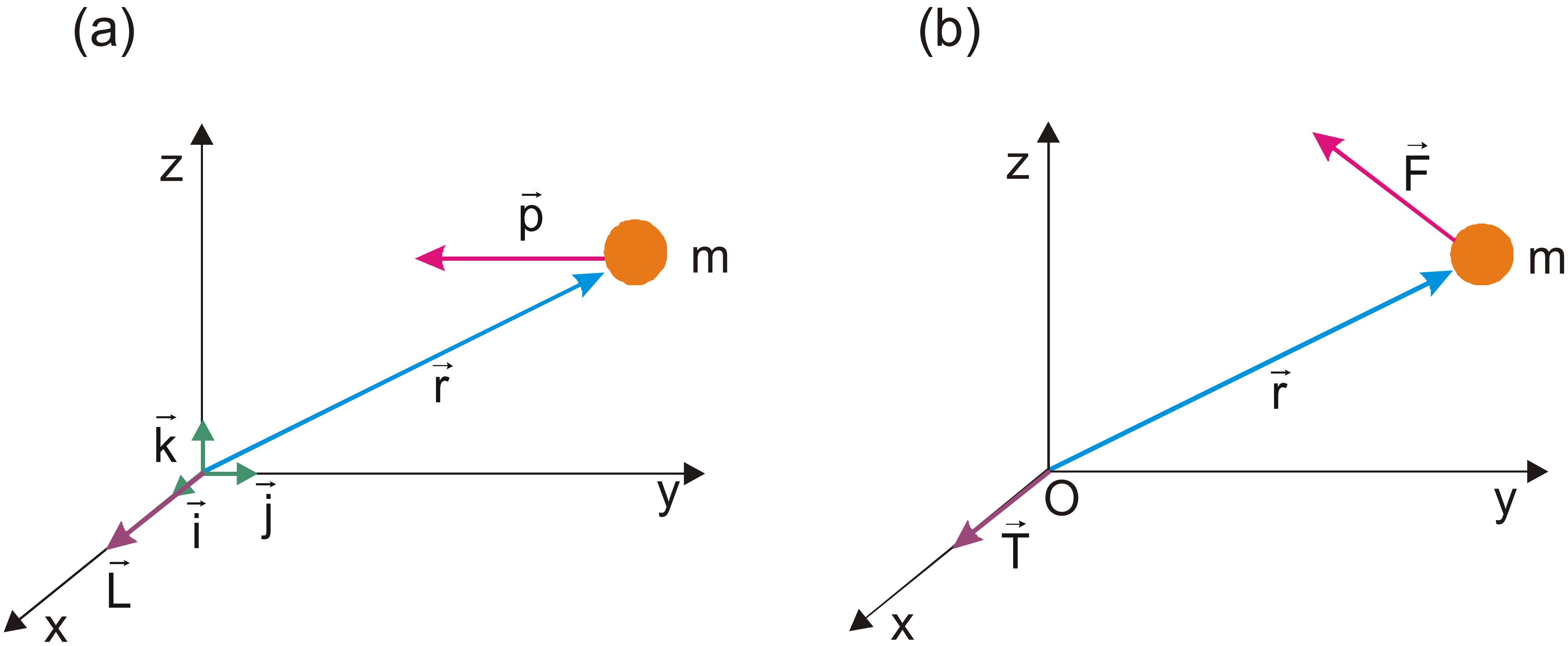
$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wektor momentu pędu możemy wyrazić za pomocą wektorów jednostkowych i składowych pędu, jako

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(yp_z - zp_y\right) + \vec{j}\left(zp_x - xp_z\right) + \vec{k}\left(xp_y - yp_x\right)$$

Siła jest przyczyną ruchu postępowego.

Moment siły (inaczej moment obrotowy), zwykle oznaczany symbolem $\vec{T}$, **jest przyczyną ruchu obrotowego**.



(a) Cząstka o masie *m* i pędzie $\vec{p}$ w kierunku –*y* będzie miała moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

(b) Cząstka o masie *m*, na którą działa siła $\vec{F}$ (w płaszczyźnie *yz*) ma moment obrotowy względem początku układu równy $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment siły

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Różniczkując moment pędu względem czasu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Ponieważ $d\vec{r}/dt = \vec{v},\ (d\vec{r}/dt) \times m\vec{v} = 0$ oraz $\vec{F} = (d/dt)(m\vec{v})$, więc

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{T}$$

Pochodna momentu pędu względem czasu *t* jest równa momentowi siły $\vec{T}$ działającemu na tę cząstkę.

Ruch planet

- Siły przyciągania grawitacyjnego skierowane wzdłuż promienia toru ciała
- $\vec{r}$ i $\vec{F}$ są zgodnie skierowane, więc $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ i z wyrażenia (2.10) otrzymujemy, że moment pędu $\vec{L}$ = *const*

Dla układu wielu ciał i sił

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^{n} \vec{T}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\right)$$

Wypadkowy moment siły układu izolowanego jest zerowy (momenty sił pochodzące od sił wewnętrznych działających pomiędzy dowolną parą cząstek, znoszą się wzajemnie)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \vec{L}\right) = 0$$

i dlatego

$$\sum \vec{L} = const$$

Jest to prawo zachowania momentu pędu: ***jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ jest równy zeru, to całkowity moment pędu tego układu jest stały***.

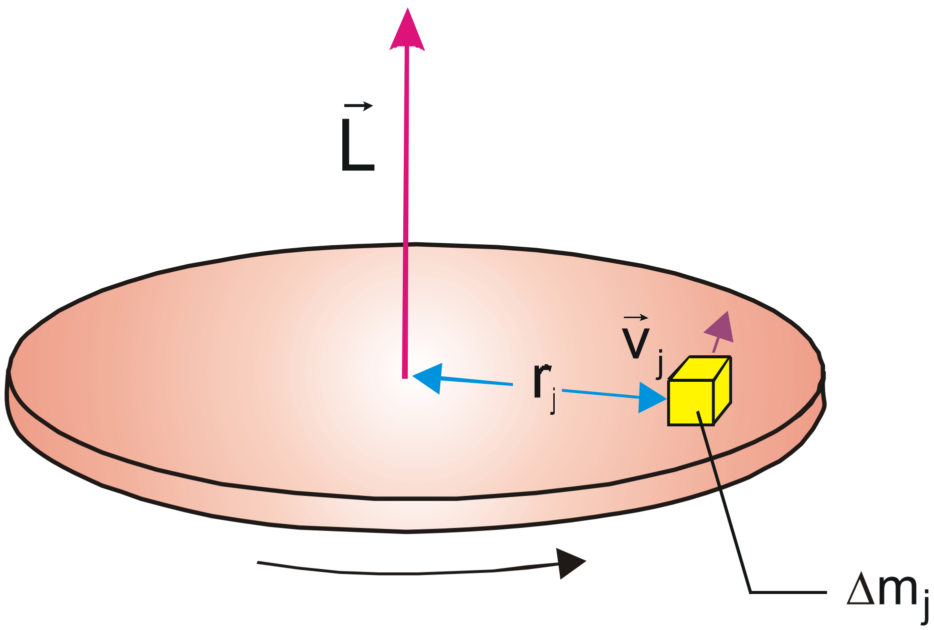
Obracający się dysk

Rozważmy ciało stałe obracające się z prędkością kątową ω wokół przytwierdzonej osi przechodzącej przez środek masy ciała. Jeżeli element masy Δm_j położony jest w odległości r_j od osi obrotu, to jego prędkość $v_j = r_j\omega$, a moment pędu ciała jest sumą

$$L = \sum r_j \Delta m_j v_j = \sum r_j \Delta m_j (r_j \omega) = \left(\sum r_j^2 \Delta m_j\right)\omega$$

Wielkość w nawiasie nazywamy **momentem bezwładności**

$$I = \sum r_j^2 \Delta m_j$$



Obracający się dysk

W przypadku ciągłego rozkładu masy

$$I = \int r^2 dm$$

Zatem:

$$L = I\omega$$

Ponieważ $T = dL/dt$, możemy napisać:

$$T = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

gdzie α oznacza przyśpieszenie kątowe.

W układzie środka masy energia kinetyczna

$$K = \frac{1}{2}\sum \Delta m_j v_j^2 = \frac{1}{2}\sum \Delta m_j (r_j\omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_j r_j^2\right)\omega^2$$

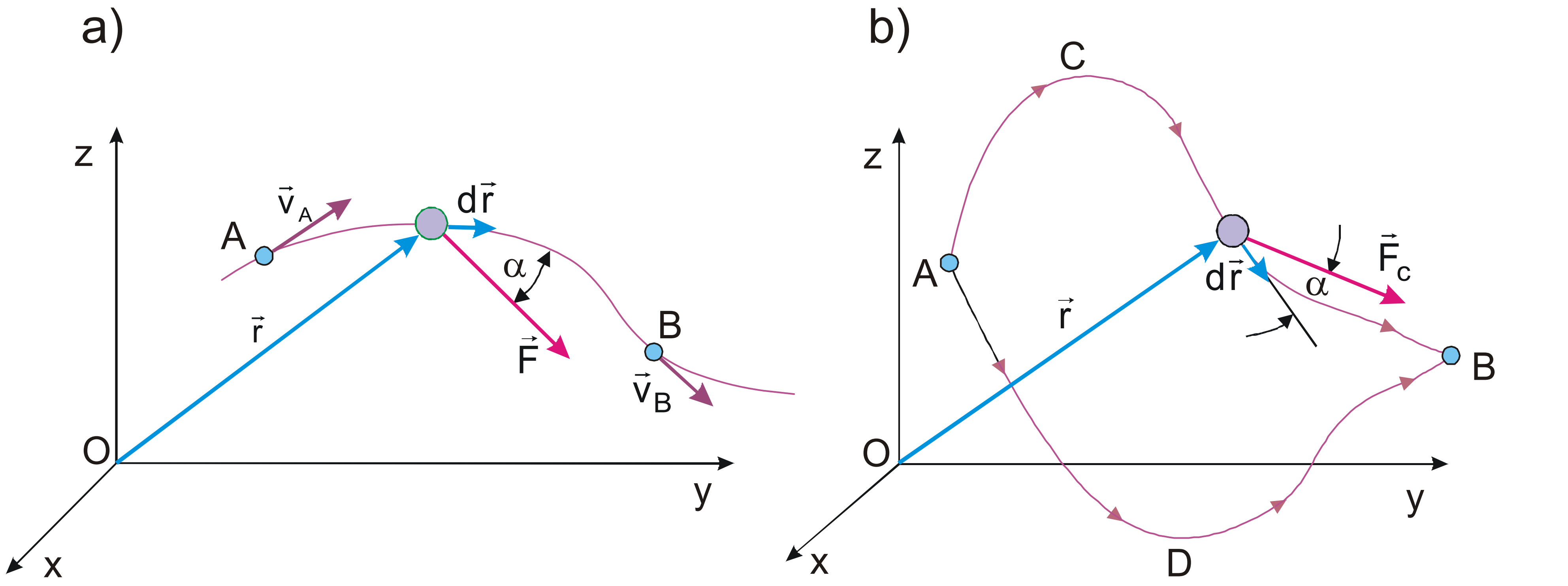
Tak więc

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

czyli

$$K = \frac{1}{2}\frac{(I\omega)^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}$$

Zachowanie energii



(a) Praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ przy przesunięciu cząstki na odległość $d\vec{r}$ jest równa $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (b) W przypadku siły zachowawczej $\vec{F}_c$ praca $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$ jest niezależna od toru łączącego punkty A i B

Różniczkowa praca siły *F* jest zdefiniowana jako:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Całkowita praca siły *F* wzdłuż toru AB

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F\cos\alpha dr$$

Jeżeli $\vec{F}$ jest wypadkową wszystkich sił działających na cząstkę, to

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int_A^B m\vec{v} d\vec{v}$$

ponieważ $d\vec{r} / dt = \vec{v}$. Po scałkowaniu

$$W_{AB} = \int_{v_A}^{v_B} mv \quad dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A$$

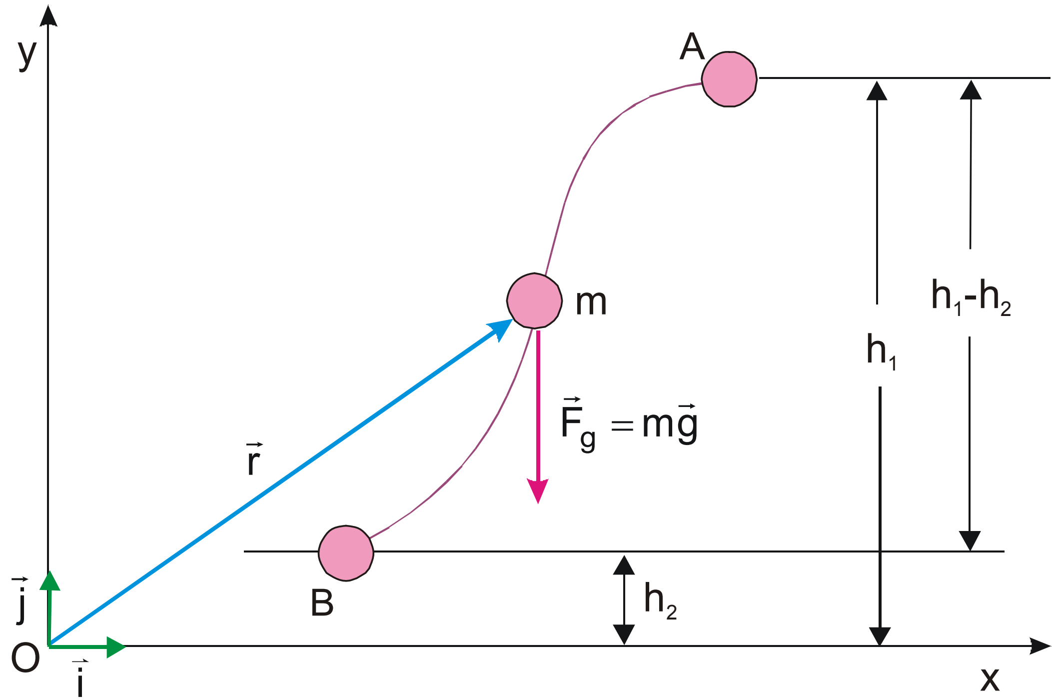
Wielkość $K = (1/2)mv^2$ nazywamy energią kinetyczną. Zasada równoważności pracy i energii mówi, że ***wypadkowa praca wykonana przez wszystkie siły działające na cząstkę równa jest odpowiedniej zmianie energii kinetycznej cząstki***.

O sile $\vec{F}_c$ mówimy że jest siłą zachowawczą, jeżeli

$$W_{AB} = \int_{ACB} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{ADB} F_c \cdot d\vec{r} = const$$

Jeżeli praca wykonana przez siłę $\vec{F}_c$ przemieszczająca cząstkę z punktu A do B jest niezależna od toru łączącego punkty A i B, to siła $\vec{F}_c$ jest siłą zachowawczą.

Przykład



Praca wykonana przez zachowawczą siłę grawitacyjną jest niezależna od drogi między punktami A i B.

Ponieważ $\vec{F}_g = -\vec{j}mg$, więc praca wykonana przez siłę grawitacyjną $\vec{F}_g$ jest równa

$$W_{AB} = \int_{h_1}^{h_2} \left(-\vec{j}mg\right)\cdot\left(\vec{i}dx + \vec{j}dy\right) = \int_{h_1}^{h_2} -mgdy = mg\left(h_1 - h_2\right) = mgh$$

Ponieważ praca wykonana przez siłę grawitacyjną jest niezależna od tego po jakim torze porusza się cząstka między punktami A i B, więc jest to siła zachowawcza.

Energię potencjalną definiujemy jako pracę wykonaną przez siłę zachowawczą

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = U_A - U_B$$

Skalarna funkcja położenia *U(x,y,z)* jest funkcją energii potencjalnej związaną z siłą zachowawczą $\vec{F}_c$. Wielkości U_A i U_B są wartościami funkcji *U(x,y,z)* wyznaczonymi w punktach końcowych toru. Zwykle B wybiera się w nieskończoności i przyjmuje, że U_B = 0. Wtedy energia potencjalna w dowolnym punkcie A wynosi

$$U_A = U_{AB} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^A \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

Energia potencjalna w dowolnym punkcie jest zdefiniowana jako praca wykonana przez równą, lecz przeciwnie skierowaną siłę, potrzebną do przemieszczenia cząstki z nieskończoności do danego punktu położenia.

Włączając zarówno siły zachowawcze jak i niezachowawcze

$$W_{AB}(zachowawcze) + W_{AB}(niezachowawcze) = K_B - K_A$$

Ponieważ $W_{AB}(zachowawcze) = U_A - U_B$, więc:

$$W_{AB}(niezachowawcze) = (K_B - K_A) - (U_A - U_B)$$

lub

$$W_{AB}(niezachowawcze) = (K_B + U_B) - (K_A + U_A)$$

Jeżeli wszystkie siły są zachowawcze

$$K_A + U_A = K_B + U_B = const$$

Jest to prawo zachowania energii mechanicznej: ***jeżeli wszystkie siły działające na cząstkę są zachowawcze, to całkowita energia cząstki w każdym jej położeniu jest wielkością stałą zwaną całkowitą energią mechaniczną*.**

Jeżeli uwzględnimy wszystkie siły, to praca wykonana przez siły niezachowawcze pojawi się zawsze w postaci jakiejś formy energii. Jeżeli np. siła niezachowawcza jest siłą tarcia, to energia powstająca w wyniku jej działania ma postać energii wewnętrznej.

Zasada zachowania energii: ***energia układu izolowanego może przekształcać się z jednej postaci w inną, jednak energia całkowita w jej różnorodnych formach nie może być ani stworzona z niczego, ani też unicestwiona*.**