

Przykłady do

„Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach”*



Tadeusz M. Molenda¹, Włodzimierz Natorf², Andrzej Majhofer³

¹Pracownia Dydaktyki Fizyki i Astronomii, Uniwersytet Szczeciński; ²IX Liceum Ogólnokształcące w Warszawie ³Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Pełny tekst Rekomendacji wraz z dyskusją dostępny jest na stronie *PTF*, zakładka *Edukacja*: www.PTF.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja

Rekomendację opracował zespół w składzie:

<i>Jan Grabski</i>	– Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska, Grabski@IF.PW.edu.pl
<i>Andrzej Majhofer</i>	– Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, Andrzej.Majhofer@FUW.edu.pl
<i>Tadeusz M. Molenda</i>	– Wydział Matematyczno-Fizyczny, Uniwersytet Szczeciński, Tadeusz.Molenda@USz.edu.pl
<i>Jan Mostowski</i>	– Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, Mosto@IFPAN.edu.pl
<i>Włodzimierz Natorf</i>	– IX Liceum Ogólnokształcące w Warszawie, Wl.Na.torf@wp.pl
<i>Andrzej Zięba</i>	– Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Andrzej.Zieba@FIS.AGH.edu.pl

* Opracowanie zostało przedstawione podczas 45. Zjazdu Fizyków Polskich PTF w Krakowie (13-18.09.2019) w postaci plakatu i w tej formie zostało zachowane.

Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach została przyjęta przez Zarząd Główny PTF uchwałą w dniu 16 czerwca 2018 r. jako zalecana przez Polskie Towarzystwo Fizyczne do stosowania w nauczaniu fizyki w szkołach (podstawowych, ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych).

Z preambuły:

Polskie Towarzystwo Fizyczne zwraca się do nauczycieli fizyki szkół wszystkich szczebli, autorów i recenzentów materiałów dydaktycznych, programów nauczania oraz innych osób mających bezpośredni czy pośredni wpływ na kształcenie w zakresie fizyki w polskich szkołach o zaakceptowanie i przestrzeganie w codziennej praktyce opisanych niżej zaleceń. Dotyczą one nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki niepewności wyniku pomiaru. Opracowanie tych zaleceń jest podyktowane troską o poziom nauczania fizyki w szkołach oraz chęcią uniknięcia elementów nadmiernie trudnych i przez to nieatrakcyjnych dla uczniów. Równie ważna jest potrzeba zapewnienia wszystkim uczniom elementarnego rozeznania i zasobu wiadomości w zakresie pomiaru i jego niepewności, będącego jednym z aspektów ogólnego wykształcenia, przydatnego w dalszym kształceniu i w życiu codziennym. Uczniom zaś zainteresowanym naukami przyrodniczymi i technicznymi należy zapewnić odpowiednie przygotowanie do uczestniczenia w zajęciach laboratoryjnych na wyższych uczelniach.

Co znajduje się w Rekomendacji

1. Wsparcie nauczania o analizie i prezentacji wyników pomiarów, w tym o niepewności pomiarowej.
2. Propozycja sformułowania szkolnego odpowiednika **Przewodnika GUM**¹:
 - z wyborem zagadnień odpowiednich dla danego poziomu nauczania;
 - sugestie dopuszczalnych skrótów i niezbędnych przybliżeń;
 - w korelacji z nauczaniem matematyki oraz informatyki;
 - z właściwym nazewnictwem;
 - z zachowaniem odniesień do współczesnej praktyki naukowej;
 - z przykładami stosowanych w szkolnictwie rozwiązań i interpretacji niezgodnych ze standardami przyjętymi w nauce i technice.
3. Próba osiągnięcia jednolitego stanowiska w sprawie maksymalnych wymagań wobec uczniów:
 - w podstawach programowych i programach nauczania;
 - w podręcznikach i innych materiałach dydaktycznych;
 - w sylabusach i arkuszach egzaminacyjnych.
4. Wskazanie kierunków i pomysłów dla kształcenia czynnych nauczycieli fizyki oraz studentów kierunków nauczycielskich.

¹ *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO, Switzerland 1993, 1995, online 1998, 2000: www.BIPM.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf
Wersja w języku polskim: https://gum.gov.pl/ftp/pdf/Guide_JCGM_100_polish_language.pdf

Propozycje ograniczeń

Tabela 1. Sytuacje eksperymentalne, z jakimi może spotkać się uczeń w szkole ujęte w postaci czterech zagadnień

Zagadnienie	Poziom		
	SP	PP	PR
Pojedynczy pomiar wielkości fizycznej: - rozdzielczość przyrządu, prezentacja wyniku - operowanie niepewnością pomiarową - dokładność przyrządu, niepewność graniczna	+	+	+
Seria pomiarów wielkości fizycznej: - średnia arytmetyczna, szacowanie jej niepewności - obliczanie niepewności standardowej, operowanie nią		+	+
Wielkość fizyczna mierzona pośrednio: - wyznaczanie wielkości - obliczanie jej niepewności	+	+	+
Zależność pomiędzy wielkościami fizycznymi: - tabela, analiza monotoniczności - wykres, dopasowanie funkcji liniowej - odcinki niepewności, zależności nieliniowe	+	+	+

SP – szkoła podstawowa; PP, PR – szkoła ponadpodstawowa (ponadgimnazjalna) o profilu podstawowym, rozszerzonym.

W tabeli przedstawiono zgrubny podział poruszanych zagadnień. W *Rekomendacji* zawarto szczegółowy wykaz i opis umiejętności, które należałoby uznać za maksymalne w obrębie każdego zagadnienia.

Rekomendacja i co dalej?

Polskie Towarzystwo Fizyczne zwraca się do nauczycieli fizyki, autorów i recenzentów materiałów dydaktycznych, programów nauczania oraz innych osób mających wpływ na kształcenie w zakresie fizyki w polskich szkołach o zapoznanie się z *Rekomendacją*.

Polskie Towarzystwo Fizyczne zachęca wszystkich zainteresowanych do zaakceptowania i stosowania w codziennej praktyce zaleceń opisanych w *Rekomendacji*.

Zalecenia dotyczące działań niepożądanych czy niewskazanych

Dotyczą one:

- zagadnień, których omawianie uznano za nadmiarowe w stosunku do możliwości percepcyjnych uczniów lub potrzeb nauczania fizyki na poszczególnych poziomach;
- nazewnictwa niezgodnego z przyjętymi w nauce i technice standardami;
- rozwiązań dydaktycznych, które w szkolnej praktyce, w podręcznikach i innych materiałach często bywają niewłaściwe czy wręcz zawierają błędy;
- metod postępowania niestosowanych we współczesnej nauce.

Czego nie ma w Rekomendacji?

Z wyboru nie umieszczono w niej:

- propozycji uzupełnienia jakiejkolwiek podstawy programowej;
- struktury charakterystycznej dla programu nauczania, z gradacją oczekiwań wobec uczniów (opisane zalecenia odpowiadają na ogół oczekiwaniom na najwyższą ocenę szkolną);
- zbioru wskazówek dydaktycznych z zakresu pracy laboratoryjnej w szkole.

Przykłady. Bezpośredni pomiar wielkości fizycznej.

P1. Wyznaczanie masy kulki i jej średnicy.

Przyrządy: stalowa kulka łożyskowa, waga cyfrowa o rozdzielczości 0,1 g, suwmiarka cyfrowa o rozdzielczości 0,01 mm (dokładność podana w instrukcji - 0,02 mm).

Wyniki pomiarów. Masa kulki – *m*, g: 35,8; 35,8. Średnica kulki – *D*, mm: 20,64; 20,64.

Z Rekomendacji dla: SP – „pomiar warto dwu- trzykrotnie powtórzyć jedynie w celu uniknięcia popełnienia pomyłki przy stosowaniu przyrządu lub odczycie jego wskazań”; PP – „kilkakrotne przeprowadzanie pojedynczego pomiaru w celu oceny czy rozdzielczość użytego przyrządu jest właściwą miarą niepewności.

Wynik pomiaru: masa kulki – *m* = 35,8 g, niepewność pomiaru masy kulki – Δ*m* = 0,1 g; zapis: *m* = (35,8 ± 0,1) g
średnica kulki – *D* = 20,64 mm, niepewność pomiaru średnicy kulki – Δ*D* = 0,01 mm; zapis: *D* = (20,64 ± 0,01) mm.

Poziom PR – pojawia się niepewność graniczna, jest ona utożsamiona z dokładnością pomiaru miernikami cyfrowymi: Δ*m* = 0,1 g Δ*D* = 0,02 mm; niepewność standardowa (zamienianie niepewności granicznej na standardową przy użyciu wzoru *u*(*x*) = Δ*x*/√3): *u*(*m*) = 0,06 g; *u*(*D*) = 0,012 mm. Zapis wyniku pomiaru: *m* = 35,80 g, *u*(*m*) = 0,06 g lub zaokrąglając wartość niepewności: *m* = 35,8 g, *u*(*m*) = 0,1 g
D = 20,640 mm, *u*(*D*) = 0,012 mm lub zaokrąglając wartość niepewności: *D* = 20,64 mm, *u*(*D*) = 0,01 mm.

P2. Wyznaczanie okresu *T* dla małych drgań wahadła prostego (matematycznego) o ustalonej długości *L* = 1,00 m (poziom PP i PR).

Przyrządy: wahadło matematyczne (metalowa kulka z nitką stabilnie zawieszona), smartfon z filmowaniem 25 klatek na sekundę, pionowy znacznik (np. kreska na ekranie) ustawiony za nitką i kulką wahadła w położeniu równowagi. Obiektów smartfona, nitka wahadła w położeniu równowagi i znacznik ustawione tak aby zniwelować paralaksę. Stoper z rozdzielczością (i dokładnością) 0,01 s, czas reakcji mierzącego 0,2 s,

Przypadek 2-1. Pomiar „jednokrotny” – zliczenie klatek filmu dla 10 wahanć. Wynik pomiaru: *t* = 19,96 s, Δ*t* = 0,04 s.

Powtórzenie pomiaru dla innej sekwencji filmu dało wynik 19,92 s, czyli różnica czasu mieści się w przedziale rozdzielczości czasu klatkowania. Dla wyznaczenia okresu wahadła przyjęto pierwszą z wartości. Zatem *T* = 1,996 s, Δ*T* = 0,004 s; zapis: *T* = (1,996 ± 0,004) s.
Poziom PR. Niepewność graniczną Δ*T* zastępujemy niepewnością standardową *u*(*T*). Zapis: *T* = 1,996 s, *u*(*T*) = 0,003 s.

Przypadek 2-2. Pomiar „wielokrotny” – 10 pomiarów czasu *t* dla 10 okresów *T* wahadła prostego.

Przyrządy: jak dla przypadku 1, przy czym smartfon jest użyty jako stoper o rozdzielczości (i dokładności) 0,01 s.

Tabela 2. Wyniki pomiarów czasu 10 okresów wahadła o długości 100 cm oraz wyniki obliczeń

Wielkość	Wynik pomiaru										<i>t</i> , s	<i>s_t</i> , s
<i>t</i> (= 10 <i>T</i>), s	19,96	20,15	19,62	20,31	19,81	20,46	20,37	19,73	19,68	20,28	20,037	0,099

$\bar{t}$ – średnia arytmetyczna,

$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})^2}$ – odchylenie standardowe średniej.

Z Rekomendacji dla PP: „przyjmowanie średniej arytmetycznej wyników w serii niezależnych pomiarów jako wynik pomiaru powtarzanego”, „szacowanie niepewności pomiaru w takich sytuacjach (a) na podstawie subiektywnej oceny typowej wartości odchylenia wyników pomiaru od średniej arytmetycznej lub, (b) o ile uczniowie są do tego przygotowani na lekcjach matematyki i informatyki na podstawie obliczonej wartości odchylenia standardowego”.

Poziom PP – (a): *T* = 2,004 s, Δ*T* = 0,030 s; zapis: *T* = (2,004 ± 0,030) s;
b): *T* = 2,0037 s, Δ*T* = *s_t* /10 = 0,0099 s; zapis: *T* = (2,0099 ± 0,0099) s lub *T* = (2,010 ± 0,010) s.
PR: *T* = 2,0037 s, *u*(*T*) = *s_t* /10 = 0,0099 s; zapis: *T* = 2,0037 s, *u*(*T*) = 0,0099 s lub *T* = 2,010 s, *u*(*T*) = 0,010 s (*u*(*T*) – niepewność standardowa wyniku pomiaru).

Uwaga: Zaokrągleń dokonujemy dopiero na końcu obliczeń zgodnie z regułami zaokrągleń. Wartość niepewności podajemy dla 2 cyfr znaczących a w szczególnych przypadkach podajemy jedną cyfrę znaczącą. Wartość wyniku pomiaru podajemy zaokrąglając zgodnie z zapisem niepewności pomiaru.

Niepewność pomiaru wielkości mierzonej pośrednio

(niepewność wielkości złożonej; prawo przenoszenia niepewności pomiarowej)

Algorytm obliczania niepewności $u(y)$ jest rozdzielony na dwa kroki.

1. Obliczanie *udziałów niepewności* $u_i(y)$ pochodzących od kolejnych zmiennych wejściowych. Wartości udziałów obliczane są elementarnym wzorem wykorzystującym różnice skończone.

Dla funkcji jednej zmiennej obliczenia zawierają tylko krok 1, udział niepewności wyrażony jest wzorem (wzór różnic skończonych):

$$u(y) = \frac{1}{2} |f(x + u(x)) - f(x - u(x))|.$$

Obliczenie udziałów niepewności dla funkcji dwóch zmiennych wyrażają wzory:

$$u_1(y) = \frac{1}{2} |f(x_1 + u(x_1), x_2) - f(x_1 - u(x_1), x_2)|,$$

$$u_2(y) = \frac{1}{2} |f(x_1, x_2 + u(x_2)) - f(x_1, x_2 - u(x_2))|.$$

2. Składanie udziałów w celu uzyskania niepewności złożonej jako sumy geometrycznej udziałów.

Dla funkcji dwóch zmiennych:

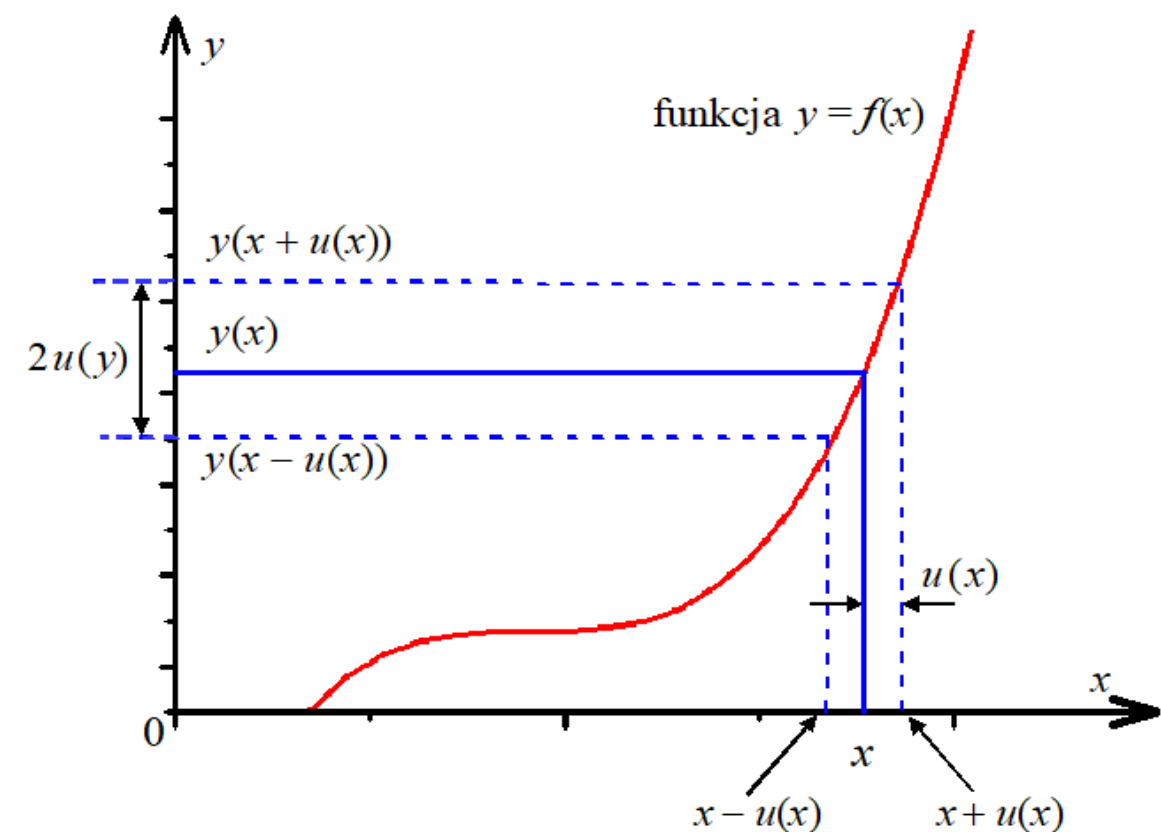
$$u(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y)}.$$

Komentarze. Wzory powyższe możemy prosto uogólnić na dowolną liczbę parametrów.

Przy obliczeniach numerycznych, stosowaniu arkusza kalkulacyjnego - wpisujemy formułę, na ogół korzystamy tylko ze wzoru podstawowego, nie dokonujemy jego przekształceń jeśli nie ma potrzeby. Zaokrągleń dokonujemy dopiero na końcu obliczeń zgodnie z regułami zaokrągleń. Wartość niepewności podajemy dla 2 cyfr znaczących a w szczególnych przypadkach podajemy jedną cyfrę znaczącą. Wartość wyniku pomiaru, po obliczeniach, podajemy zaokrąglając zgodnie z zapisem niepewności pomiaru.

W wielu (prosty) przypadkach funkcyjnych można skorzystać ze wzorów analitycznych, które stosunkowo łatwo jest wyprowadzić. Jako przykład, dla funkcji potęgowej $z = c x^\alpha y^\beta$ (c, α, β – stałe), korzystając do obliczeń z przybliżenia: $(1 \pm q)^a \approx 1 \pm aq$ dla $q = u(x_i)/x_i \ll 1$ (a – dowolna stała), otrzymamy $u_1(z) = |\alpha(u(x)/x)z|$, $u_2(z) = |\beta(u(y)/y)z|$, wówczas niepewność względna jest równa: $u_2(z)/|z| = \sqrt{(\alpha u(x)/x)^2 + (\beta u(y)/y)^2}$.

Przedstawiony algorytm obliczania niepewności pomiaru wielkości mierzonej pośrednio bazuje na podstawowych działaniach algebraicznych, jest zatem metodą elementarną.



Rys. 1. Ilustracja prawa przenoszenia niepewności na przykładzie funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$.

Przykład P3. Wyznaczanie gęstości kulki metalowej – na podstawie danych z przykładu P1. Poziom PP i PR.

Z definicji gęstość $d = m/V$. Objętość kulki o średnicy D wynosi: $V = (\pi/6)D^3$.

Z danych z przykładu P1: $m = 35,8$ g; $D = 2,064$ cm. Zatem objętość kulki $V = (3,1416/6) \cdot (2,064 \text{ cm})^3 = 4,604 \text{ cm}^3$.

Stąd gęstość $d = (35,8 \text{ g})/(4,604 \text{ cm}^3) = 7,776 \text{ g/cm}^3$.

Uwaga: Wartość π dla numerycznego obliczania powinna być pobrana z funkcji wbudowanej (np. w kalkulatorze), w przeciwnym przypadku liczba cyfr znaczących π powinna być co najmniej o jeden większa niż liczba cyfr znaczących wartości z największą ich liczbą.

Poziom PP – bazujemy na *Rekomendacji* dla SP: „szukana wielkość jest obliczana i przedstawiana zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących, wynikającej z dokładności pomiaru wielkości mierzonych bezpośrednio”.

Zatem z reguł zaokrąglania: $d = 7,78 \text{ g/cm}^3 = 7\,780 \text{ kg/m}^3$ (trzy cyfry znaczące, tj. tyle ile wynosi nie większa liczba cyfr znaczących dla wartości m i D).

Wartość ta jest zgodna z wartościami tablicowymi dla stali.

Poziom PR

Wartości z przykładu P1: $m = 35,80$ g, $u(m) = 0,06$ g; $D = 2,064$ cm, $u(D) = 0,001$ cm.

Dla wyznaczenia niepewności $u(d)$ postępujemy zgodnie z przytoczonym algorytmem dla funkcji dwóch zmiennych.

KROK 1. Obliczanie udziałów niepewności $u_m(d)$ i $u_D(d)$:

$$u_m(d) = \frac{1}{2} \left| \frac{m + u(m)}{V} - \frac{m - u(m)}{V} \right| = \frac{1}{2} \frac{2u(m)}{V} = \frac{u(m)}{V} = \frac{m}{V} \frac{u(m)}{m} = d \frac{u(m)}{m} = 0,0130 \text{ g/cm}^3,$$

$$u_D(d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi m}{6} \left| \frac{1}{(D + u(D))^3} - \frac{1}{(D - u(D))^3} \right| = 0,0031 \text{ g/cm}^3.$$

KROK 2. Składanie udziałów w celu uzyskania niepewności złożonej (suma geometryczna):

$$u(d) = \sqrt{u_m^2(d) + u_D^2(d)} = 0,0134 \text{ g/cm}^3.$$

Komentarze:

- W obliczeniach wskazane jest zachować w zapisie o jedną cyfrę więcej niż późniejsze zaokrąglenie.
- W całkowitej niepewności znacznie większy (ponad czterokrotnie) udział ma $u_m(d)$, co daje wskazówkę do ewentualnego użycia wagi o większej dokładności.

Wynik pomiaru i jego zapis: $d = 7\,776 \text{ kg/m}^3$, $u(d) = 13 \text{ kg/m}^3$. Niepewność względna wyniku: $u(d)/d = 0,17 \%$.

Uwaga: Wynik nie powinien być podany w postaci $d = (7\,776 \pm 13) \text{ kg/m}^3$ (zob. [2, 3]).

Przykład P4. Doświadczenie „wyznaczanie ciepła właściwego metalu”. Poziom PR.

Przyrządy: kubek do napoi gorących z przykrywką, termometr cyfrowy ostrzowy o rozdzielczości 0,1 °C, waga o rozdzielczości 0,1 g, woda, bryłka metalu (stal), czajnik, lodówka (lub substancja oziębiająca).

Dla otrzymania wzoru na ciepło właściwe metalu użytego w doświadczeniu, korzystamy z bilansu cieplnego. W stanie początkowym temperatura wody jest większa niż temperatura bryłki metalu. Kostka metalu została umieszczona w styropianowym kubku z wodą, przykrytym styropianową nakrywką z otworkiem, przez który wprowadzony został termometr. Po krótkim czasie, temperatury ciał zrównają się, osiągamy stan końcowy – równowagi termicznej. Energia wewnętrzna wody ulega zmniejszeniu o ΔE_w a kostki metalu zwiększa się o ΔE_m. Mamy przepływ energii na sposób ciepła – który oznaczamy przez Q_{w→m}. Zatem

ΔE_w = Q_{w→m} = c_wm_w(t_w - t_k), Q_{w→m} = ΔE_m = c_mm_m(t_k - t_m),

gdzie: c_m – ciepło właściwe metalu; c_w = 4 180 J/(kg · K) – ciepło właściwe wody; m_w – masa wody; m_m – masa bryłki metalu; t_m – temperatura początkowa metalu; t_w – temperatura początkowa wody; t_k – temperatura końcowa wody i metalu w kubku.

Zakładamy, że wymiana energii na sposób ciepła następuje tylko między wodą a bryłką metalu, pojemność cieplną kubka z nakrywką i termometru pomijamy. Zatem

c_m = c_w · $\frac{m_w}{m_m} \cdot \frac{t_w - t_k}{t_k - t_m}$

Niepewności (graniczne) związane z dokładnością przyrządów i daną tablicową: Δm = 0,1 g; Δt = 1,0 °C; Δc_w = 5 J/(kg · K).

Tabela 3. Wyniki pomiarów oraz wyniki obliczeń

Lp.	Wyniki pomiarów					Obliczone wartości		Udziały niepewności dla						niepewność	
	metal		woda					c _w	m _w	m _m	t _w	t _m	t _k	całkowita	względna
	m _m	t _m	m _w	t _w	t _k	c _m	c _m - c ₀ /c ₀	u ₁ (c _m)	u ₂ (c _m)	u ₃ (c _m)	u ₄ (c _m)	u ₅ (c _m)	u ₆ (c _m)	u(c _m)	u(c _m)/c _m
	g	°C	g	°C	°C	J/(kg · K)	%	J/(kg · K)						J/(kg · K)	%
1	216,2	5,8	30,1	65,4	38,5	478,7	6,4	0,3	0,1	0,1	10,3	8,5	18,7	23,0	4,8

Przyjęto wartość tablicową ciepła właściwego żelaza c₀ = 450 J/(kg · K).

Obliczeń dokonano w arkuszu kalkulacyjnym. Wybrane wzory dla obliczenia udziałów niepewności:

$$u_3(c_m) = c_w m_w \cdot \frac{t_w - t_k}{t_k - t_m} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m_m + u(m_m)} - \frac{1}{m_m - u(m_m)} \right| = c_m m_m \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m_m + u(m_m)} - \frac{1}{m_m - u(m_m)} \right|$$

$$u_6(c_m) = c_w \frac{m_w}{m_m} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{t_w - (t_k + u(t_k))}{t_k + u(t_k) - t_m} - \frac{t_w - (t_k - u(t_k))}{t_k - u(t_k) - t_m} \right|$$

Zapis wyniku pomiaru: c_m = 479 J/(kg · K), u(c_m) = 23 J/(kg · K), u(c_m)/c_m = 4,8 %.

Zgodnie z kryterium zgodności |x - x₀| < ku(x), k = 2 (zob. str. 9 *Rekomendacji*) otrzymany wynik jest zgodny z wartością tablicową:

|c_m - c₀| = 27,8 J/(kg · K) < 2 · 23,0 J/(kg · K).

Uwagi. Dla poziomu podstawowego (PP) „szukana wielkość jest obliczana i przedstawiana zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących, wynikającej z dokładności pomiaru wielkości mierzonych bezpośrednio”. W tym przypadku, jeśli bazujemy na rozdzielczości termometru, liczba cyfr znaczących wynosi 3.

Dla uproszczenia zapisu wielkości z indeksami – m, c, t, wygodne byłoby unikanie przynajmniej części indeksów. W tym przykładzie można by pominąć indeksy dla wielkości, które odnoszą się do metalu.

Przykład P5. Doświadczenie „prawo Ohma”. Poziom PR.

Przyrządy: przewodnik – drut oporowy, zasilacz regulowany prądu stałego lub zasilacz regulowany stabilizowany z opornicą suwakową, 2 uniwersalne cyfrowe mierniki elektryczne – DT-830B, przewody do połączeń.

Informacja: Dane z instrukcji dla multimetru DT-830B (był użyty w zawodach II st. LXVI Olimpiady Fizycznej):

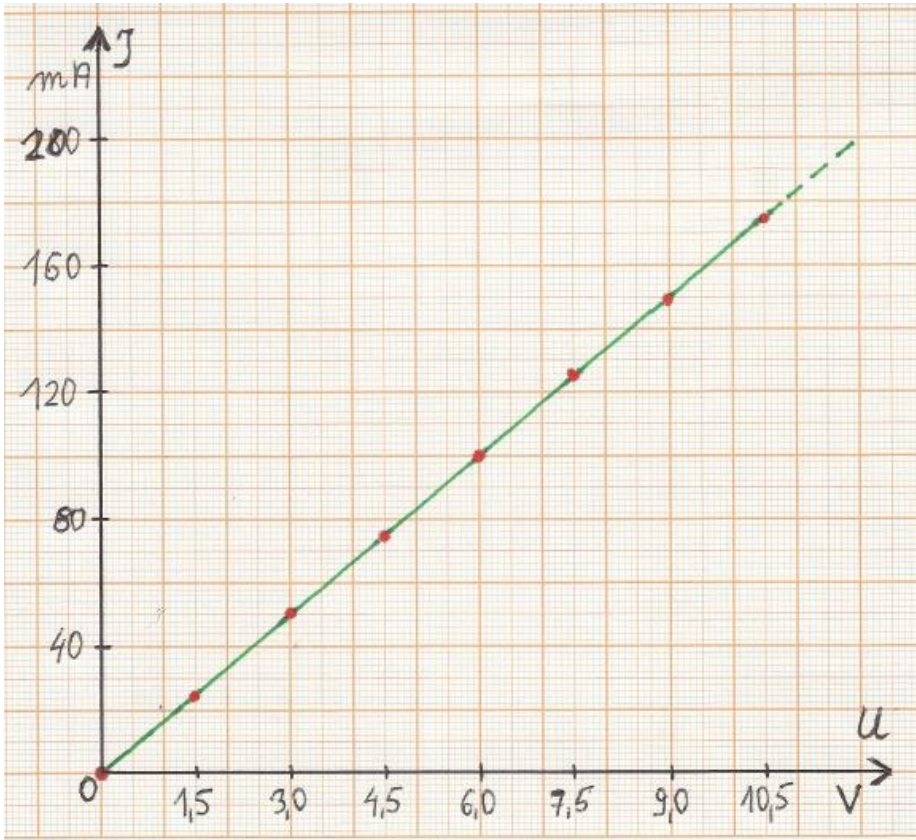
Napięcie DC (dla zakresów) – 200 mV / 2 V / 20 V / 200 V; dokładność: $\pm(0,5 \% W + 2)$,

Natężenie prądu stałego DC (dla zakresów) – 200 μ A / 2 mA / 20 mA: $\pm(1 \% W + 2)$; 200 mA: $\pm(1,2 \% W + 2)$;

gdzie w obliczeniu dokładności: W – wartość wskazania (odczytu) miernika; „2” oznacza, że należy powiększyć o 2 jednostki na ostatnim miejscu cyfry znaczącej.

Tabela 4. Wartości U-I z niepewnościami pomiarów

Wyniki pomiarów			Niepewność pomiaru			
			graniczna		standardowa	
Lp.	U	I	ΔU	ΔI	$u(U)$	$u(I)$
	V	mA	V	mA	V	mA
1.	0,00	0,0	0,02	0,2	0,01	0,1
2.	1,46	24,3	0,03	0,5	0,02	0,3
3.	3,00	50,3	0,04	0,8	0,02	0,5
4.	4,48	74,8	0,04	1,1	0,02	0,6
5.	6,03	100,4	0,05	1,4	0,03	0,8
6.	7,45	124,3	0,06	1,7	0,03	1,0
7.	8,91	148,8	0,06	2,0	0,04	1,1
8.	10,52	174,9	0,07	2,3	0,04	1,3



Rys. 2. Wykres zależności $I = f(U)$, wykonany odręcznie na papierze milimetrowym. Do punktów pomiarowych dopasowano prostą. Nie zaznaczono odcinków czy krzyżyków niepewności gdyż w przyjętej skali praktycznie nie są widoczne.

Na osi U: przyjęto skalę, na której 1 V odpowiada 10 mm, więc maksymalna długość odcinka $2 \cdot u(U) = 0,9$ mm.

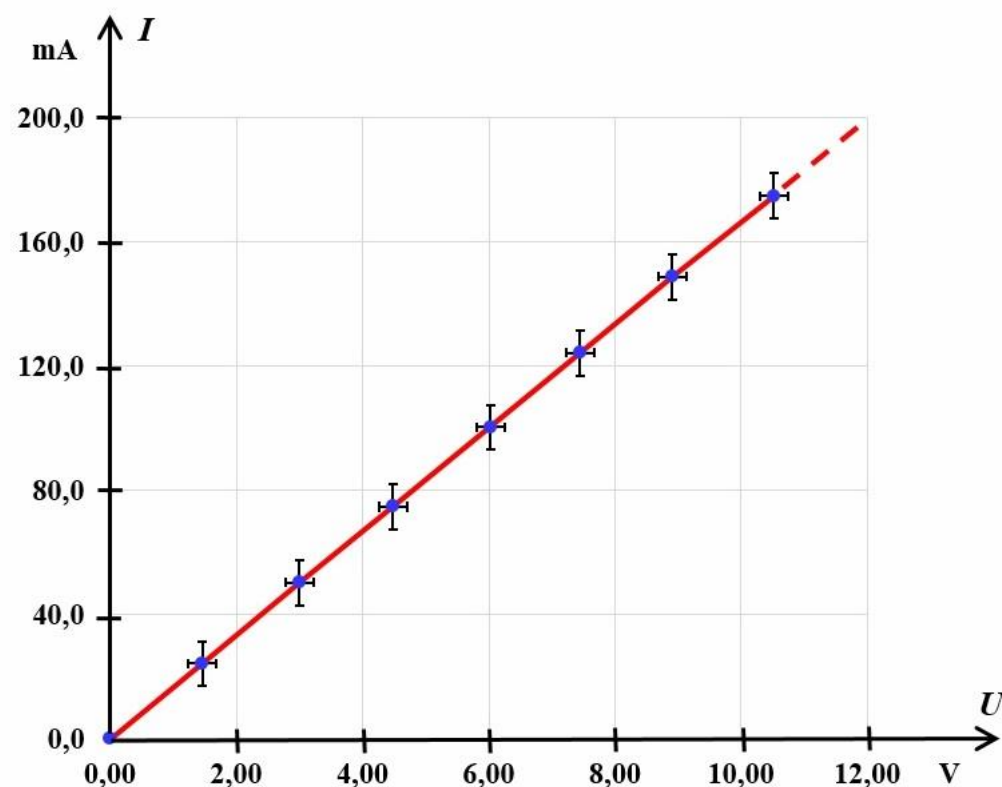
Na osi I: przyjęto skalę, na której 20 mA odpowiada 10 mm, więc maksymalna długość odcinka $2 \cdot u(I) = 1,3$ mm.

Z wykresu wyznaczono wartość odwrotności współczynnika nachylenia prostej: $U/I = 60,0 \Omega$. W tym przypadku, z wykresu nie szacujemy niepewności $R = U/I$.

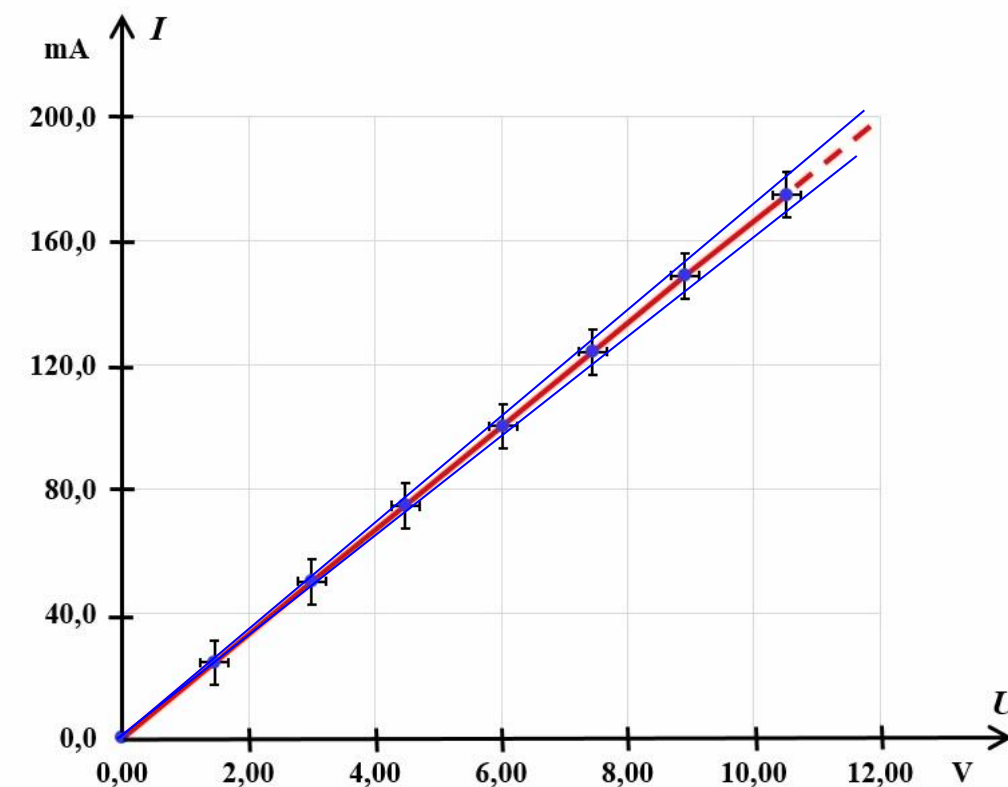
Poziom PR. Z zapisu w *Rekomendacji* dokonujemy „nanoszenie na wykres odcinków niepewności dla wybranej zmiennej jeśli są one wyraźnie większe od symbolu punktu na wykresie” oraz „szacowanie niepewności współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego dla dopasowanej prostej; szacowanie, na tej podstawie, niepewności pomiarowej parametrów badanej zależności” – **brak w naszym przypadku możliwości oszacowania niepewności współczynnika nachylenia.**

W przypadku gdyby do pomiarów użyto mierników analogowych (np. UM-Z2), wówczas dla zakresu napięć do 15 V: $\Delta U = 0,38$ V, zaś $u(U) = 0,22$ V; dla zakresu natężeń do 500 mA: $\Delta I = 12,5$ mA, zaś $u(I) = 7,2$ mA, odcinki niepewności byłyby wyraźnie widoczne.

Na rysunku 2., wykonanym na papierze milimetrowym, odcinek $2u(U)$ miałby długość ok. 4,7 mm, zaś odcinek $2u(I)$ miałby długość ok. 7,2 mm. Na rys. 3. przedstawiono wykres tej samej zależności, z naniesionymi odcinkami niepewności dla obu zmiennych. Pozwala to nanieść na wykres tzw. proste skrajne, przechodzące przez punkt (0; 0) oraz przez wszystkie odcinki niepewności. Ich nachylenia pozwalają oszacować niepewność współczynnika kierunkowego dopasowanej prostej oraz, na tej podstawie, oszacować niepewność oporu elektrycznego użytego przewodnika.



Rys. 3a. Wykres zależności $I = f(U)$, wykonany w arkuszu kalkulacyjnym.



Rys. 3b. Na wykres 3a. naniesiono odręcznie tzw. proste skrajne.

Literatura

1. Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach. www.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja
2. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO, Switzerland 1995, www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty, <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index>. Fundamentalny dokument zbiorowego autora - zespołu ośmiu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych, określający nazewnictwo, symbolikę i sposoby obliczania niepewności pomiaru. Polskie tłumaczenie (Główny Urząd Miar, 1999 r.): Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik. https://gum.gov.pl/ftp/pdf/Guide_JCGM_100_polish_language.pdf
3. A. Zięba: Prawo propagacji niepewności bez pochodnych. Foton 139, Zima 2017, str. 15-22 (dostępny online); Dwadzieścia lat konwencji GUM oceny niepewności pomiaru. II. Wybrane zagadnienia. Postępy Fizyki, zeszyt 1, 2017, str. 13-21: <http://pf.ptf.net.pl/PF-2017-1/docs/PF-2017-1.pdf>