

Fizyka ćwiczenia laboratoryjne

JOLANTA RUTKOWSKA, TOMASZ KOSTRZYŃSKI, KONRAD ZUBKO

SKRYPT WAT, WARSZAWA 2008

www.wtc.wat.edu.pl

Teoria zjawisk fizycznych została pogrupowana w następujące działy (numery ćwiczeń):

- [Mechanika](#) (2, 3, 4, 5, 33, 36, 39, 40, 41, 42)
- [Drgania i Fale](#) (4, 5, 6, 16, 21, 24, 30, 37)
- [Elektryczność i magnetyzm](#) (13, 14, 15, 16, 21, 22, 24, 26, 27, 37, 38, 39)
- [Optyka](#) (27, 28, 29, 31, 32, 43, 44)
- [Jądro, atom, ciało stałe](#) (17, 18, 19, 20, 23, 25, 28, 31, 32, 34, 35)
- [Ciecze i gazy](#) (2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 30)

INFORMACJE PRZYDATNE W DANYM ĆWICZENIU MOGĄ ZNAJDOWAĆ SIĘ W RÓŻNYCH DZIAŁACH.

DRGANIA I FALE

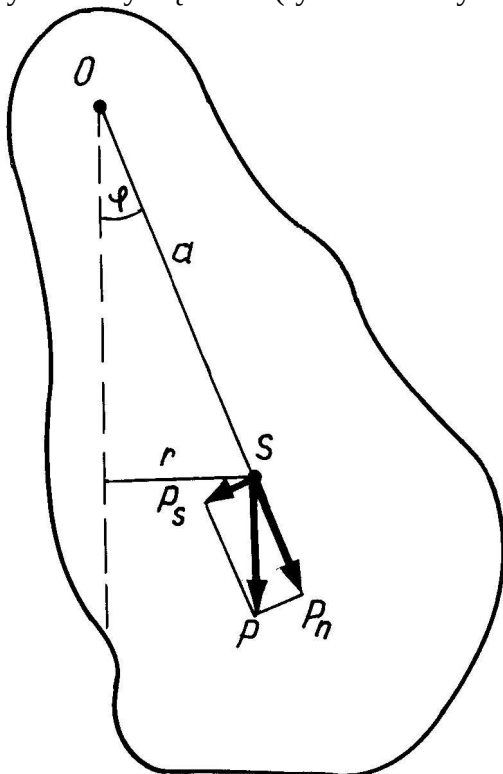
Spis treści

I. Drgania wahadeł fizycznych.....	2
II. Drgania sprzężonych wahadeł matematycznych.....	4
III. Drgania tłumione.....	8
IV. Drgania wymuszone i rezonans.....	10
V. Drgania relaksacyjne.....	14
VI. Fale, dźwięk.....	17
VII. Wyznaczanie drgań tłumionych cewki galwanometru.....	19
VIII. Wyznaczanie parametrów drgań tłumionych	22
IX. Wyznaczanie warunków rezonansu.....	24
X. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego.....	27
XI. Wyznaczanie prędkości dźwięku.....	29

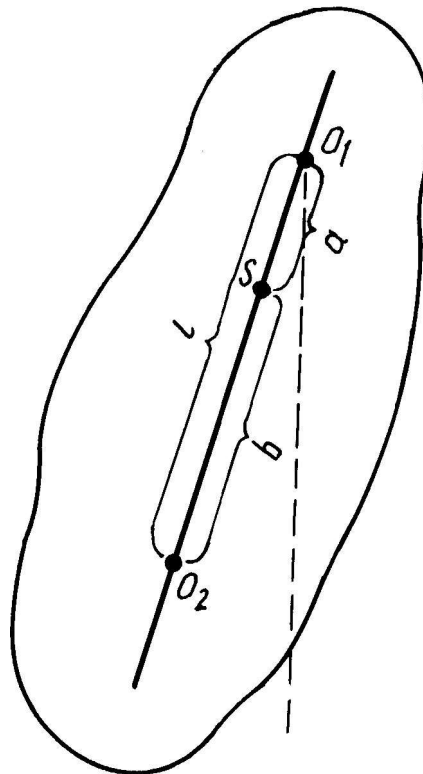
I. Drgania wahadeł fizycznych

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczeń nr 4, 5 oraz innych.

Wahadłem fizycznym nazywamy ciało sztywne wahające się wokół poziomej osi obrotu O pod wpływem siły ciężkości (rys. I.1 oraz rys I.2).



Rys. I.1. Wahadło fizyczne.



Rys. I.2. Dwuosiowe wahadło fizyczne (rewersyjne).

Okres drgań wahadła fizycznego opisuje teoretycznie zależność:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g a}} \quad (\text{I.1})$$

gdzie: a – odległość między osią zawieszenia i środkiem ciężkości,
 I – moment bezwładności wahadła,
 g – przyspieszenie grawitacyjne,
 m – masa wahadła,
 T – okres drgań wahadła.

Dwie ostatnie wielkości można łatwo wyznaczyć z pomiarów bezpośrednich. Wyznaczenie odległości między osią zawieszenia i środkiem ciężkości bezpośrednio jest możliwe, ale kłopotliwe. W pomiarach bezpośrednich nie jest możliwe wyznaczenie momentu bezwładności wahadła oraz przyspieszenia grawitacyjnego. Stosując wahadło rewersyjne możemy wyznaczyć jedną z tych wielkości.

Wahadło rewersyjne to wahadło fizyczne o dwóch osiach obrotu (O_1 , O_2) umieszczonych po przeciwnych stronach środka ciężkości S (rys. I.2) tak, aby okres drgań był taki sam dla obu zawieszonych wahadła. .

Jeżeli punkt O_1 (rys. I.2) jest punktem zawieszenia, to okres wahań wynosi:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{m g a}} \quad (I.2)$$

gdzie: I_1 – moment bezwładności wahadła względem osi O_1

Analogicznie dla drugiej osi obrotu okres wahań jest równy:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{m g b}} \quad (I.3)$$

gdzie: I_2 – moment bezwładności wahadła względem osi O_2 , b – odległość między drugą osią zawieszenia a środkiem ciężkości.

Na podstawie twierdzenia Steinera o momentach bezwładności wiemy:

$$I_1 = I_S + m a^2 \quad (I.4)$$

$$I_2 = I_S + m b^2 \quad (I.5)$$

gdzie I_S jest momentem bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez środek ciężkości.

Okresy T_1 i T_2 są równe, więc $\frac{I_1}{a} = \frac{I_2}{b}$, czyli $\frac{I_S + m a^2}{a} = \frac{I_S + m b^2}{b}$, stąd otrzymujemy równość:

$$(b - a)(I_S - m a b) = 0 \quad (I.6)$$

Przypadek, gdy $b = a$ nic nie mówi o wzajemnym położeniu osi O_1 , O_2 i może zajść, gdy mamy ciało sztywne symetryczne. Natomiast z równania $I_S - m a b = 0$ otrzymujemy:

$$I_S = m a b \quad (I.7)$$

Po podstawieniu (I.4), (I.5) i (I.7) do (I.2) otrzymujemy zależność:

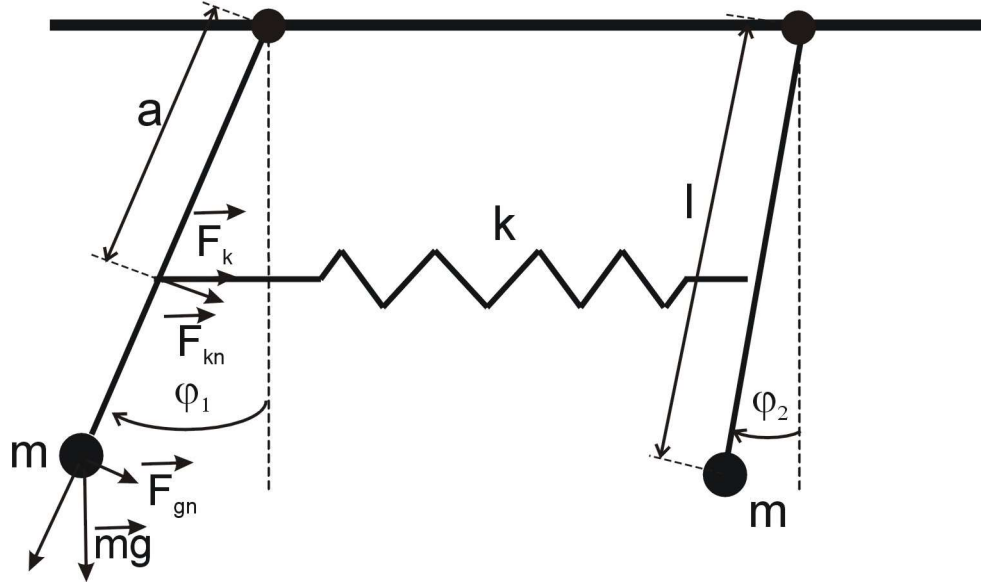
$$T = T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_S + m a^2}{m g a}} = 2\pi \sqrt{\frac{m a (b + a)}{m g a}} = 2\pi \sqrt{\frac{(b + a)}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{zr}}{g}} \quad (I.8)$$

Wielkość l_{zr} nazywamy długością zredukowaną wahadła rewersyjnego i jak widać z powyższego wyprowadzenia jest ona równa $a + b$, czyli odległości między osiami obrotu wahadła; którą można łatwo zmierzyć liniałem. Pozwala ona analizować drgania wahadła fizycznego jako wahadła matematycznego.

II. Drgania sprzężonych wahań matematycznych

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczenia nr 5 oraz innych.

Rozpatrzmy układ o dwóch stopniach swobody na przykładzie wahań sprzężonych, złożony z dwóch jednakowych wahań matematycznych o masie m i długości l , połączonych nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k w odległości a osi obrotu wahań (rys. II.1).



Rys. II.1. Dwa identyczne wahadła, gdzie masa m zawieszona na nieważkim pręcie o długości l i sprzężone za pomocą sprężyny o stałej k w odległości a od miejsca zawieszenia.

Ruch układu o dwóch stopniach swobody opiszemy współzrędnymi φ_1, φ_2 , czyli kątami wychYLENIA obu wahań od położenia równowagi. Przy założeniu małych drgań (kąty odchylenia od pionu są małe) możemy przyjąć, że $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$. Ruch każdego wahań wywołany jest normalną składową siły ciężkości $F_{gn} = mg \sin \varphi \approx mg \varphi$ i normalną składową siły sprężystości sprężyny $F_{kn} = k \Delta x \cos \varphi \approx k \Delta x$, gdzie $\Delta x = a(\varphi_1 - \varphi_2)$ jest zmianą długości sprężyny. Obrót każdego wahań wywołany jest sumą momentów dwóch powyższych sił $M = F_{gn}l + F_{kn}a$. Korzystając z faktu, że kierunek działania siły ciężkości jest przeciwny do wychYLENIA wahań, drugą zasadę dynamiki Newtona $I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M$ (gdzie $I = ml^2$ – moment bezwładności wahań matematycznego) dla każdego wahań można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} ml^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -mgl\varphi_1 - aka(\varphi_1 - \varphi_2) \\ ml^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -mgl\varphi_2 + aka(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

lub po uporządkowaniu:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi_1 - \frac{a^2 k}{l^2 m} (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi_2 + \frac{a^2 k}{l^2 m} (\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Otrzymaliśmy układ dwóch równań różniczkowych liniowych i jednorodnych, ale zależnych, gdyż w każdym z nich występują obie zmienne φ_1 i φ_2 . Dokonując transformacji układu współrzędnych można te równania sprowadzić do układu równań niezależnych. Dodając i odejmując stronami od siebie oba te równania otrzymujemy nowy układ równań niezależnych od siebie:

$$\begin{cases} \frac{d^2 (\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l} (\varphi_1 + \varphi_2) \\ \frac{d^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + 2 \frac{a^2 k}{l^2 m} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Nowe zmienne $x_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ i $x_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ nazywamy współrzędnymi normalnymi a drgania odbywające się w tym układzie drganiami normalnymi lub własnymi.

Zgodnie z ogólną postacią drgań harmoniczných możemy zapisać:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega_1^2 x_1 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega_2^2 x_2 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

$$\text{gdzie: } \omega_1^2 = \frac{g}{l}; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2 \frac{ka^2}{ml^2} \quad (\text{II.5})$$

nazywają się częstościami własnymi drgań normalnych. Z drugiej relacji (II.5) można na drodze eksperymentalnej wyznaczać stałą sprężystości sprężyny k . Funkcja $\omega_2^2 = f(a^2)$ jest linią prostą. W równaniu tej prostej $y = Ax + B$ wyraz wolny B jest równy kwadratowi częstotliwości pierwszego drgania normalnego a współczynnik nachylenia A zależy od stałej sprężystości k .

Przyjmując rozwiązania równań (II.4) w postaci drgań harmoniczných:

$$x_1(t) = 2A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \quad (\text{II.6})$$

$$x_2(t) = 2A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \quad (\text{II.7})$$

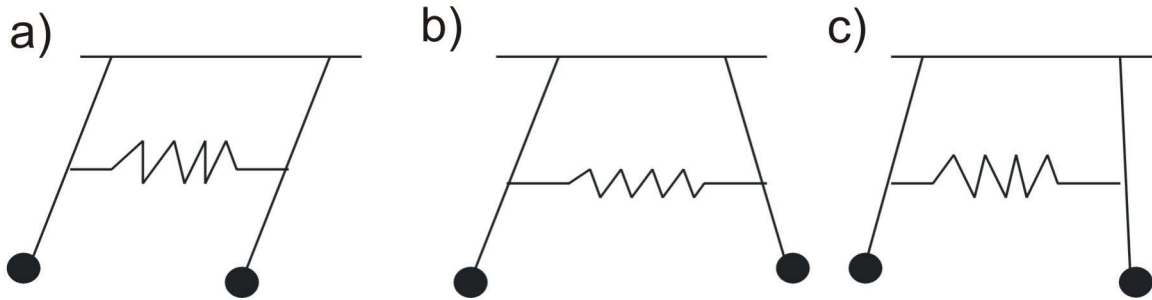
możemy powrócić do naszych pierwotnych zmiennych (katów φ_1 i φ_2).

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \quad (\text{II.8})$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \quad (\text{II.9})$$

Otrzymaliśmy ważny wynik mówiący, że drgania oscylatora o dwóch stopniach swobody są superpozycją dwóch drgań normalnych (x_1 , x_2) o różnych częstościach własnych (ω_1 , ω_2), zachodzących jednocześnie.

Przedyskutujemy otrzymane wyniki dla wahadeł sprzężonych (rys. II.2).



Rys. II.2. Postacie ruchów dwóch sprzężonych wahadeł:
a) drgań normalnych zgodnych w fazie; b) drgań normalnych o przeciwnych fazach;
c) zapoczątkowanie zjawiska dudnienia

Jeżeli $A_2 = 0$, to $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1)$ - oba wahadła drgają z tą samą częstotliwością ω_1 w **zgodnych fazach**. Przypadek ten występuje, gdy oba wahadła początkowo wychylimy o ten sam kąt w tę samą stronę (oba w lewo lub oba w prawo). Wówczas sprężyna łącząca wahadła nie ulega rozciąganiu i na oba działają tylko siły grawitacyjne (rys. II.2a). Częstotliwość ω_1 nie zależy od wielkości sprzężenia (położenia sprężyny a).

Jeżeli $A_1 = 0$, to $\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)$ - oba wahadła drgają z tą samą częstotliwością ω_2 w **przeciwnych fazach**. Drugą postać drgań normalnych otrzymujemy odchylając z pozycji spoczynkowej jednocześnie oba wahadła o ten sam kąt, ale w przeciwne strony (jedno w prawo, a drugie w lewo) i puszczając. Wówczas sprężyna łącząca wahadła jest raz kurczona, raz rozciągana (patrz rys. II.2b). Występujące wówczas siły sprężystości powodują, że częstotliwość drgań obu jest większa, niż w pierwszym przypadku drgania normalnego i wynosi ω_2 . Częstotliwość ta rośnie ze wzrostem sprzężenia.

Dowolna kombinacja dwu powyższych przypadków (ich superpozycja czyli złożenie) daje postać ogólną ruchu dwóch sprzężonych wahadeł co zapisaaliśmy równaniami II.8 i II.9.

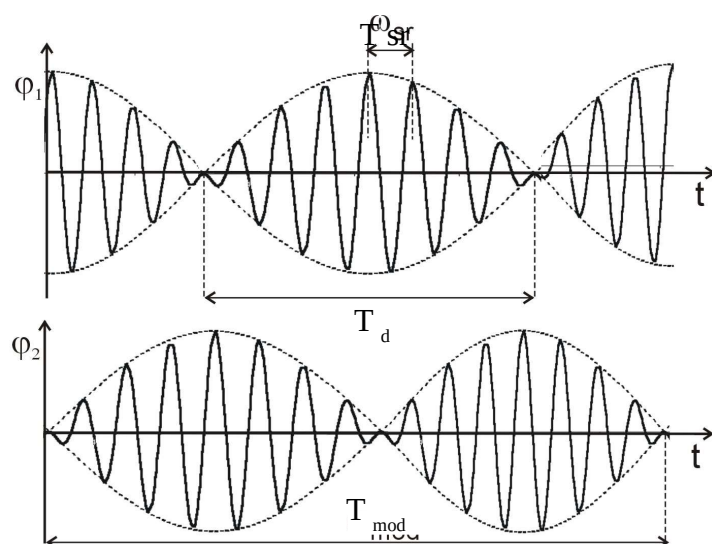
Szczególną postacią możliwych zachowań rozpatrywanego układu są **dudnienia**. Powstają one gdy odchylimy z pozycji spoczynkowej tylko jedno z wahadeł o pewien kąt (patrz rys. II.2c), po czym puścimy je. Odpowiada to sytuacji gdy $A_1 = A_2 = A$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Równania ruchu wahadeł (II.8) (II.9) dla dudnień przyjmują wówczas postać:

$$\varphi_1(t) = A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) = A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t) \quad (\text{II.10})$$

$$\varphi_2(t) = A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) = A \sin(\omega_{\text{mod}} t) \sin(\omega_{\text{sr}} t) \quad (\text{II.11})$$

gdzie: $\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, $\omega_{\text{sr}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Każde z wahadeł wykonuje drgania z częstotliwością ω_{sr} równą średniej arytmetycznej częstotliwości drgań normalnych i amplitudą zmieniającą się z częstotliwością modulacji ω_{mod} . Przebieg wahań obu wahadeł przedstawia rys. II.3.



Rys. II.3. Drgania dwóch jednakowych wahadeł sprzężonych (dudnienia).

Ponieważ oba sprzężone wahadła są identyczne, energia zawarta w pierwszym (wychylonym na początku) wahadle będzie poprzez sprężynę przekazywana do drugiego, aż do sytuacji gdy się ono zatrzyma, a z amplitudą początkową będzie poruszać się tylko wahadło drugie. Pełen okres dudnień T_d zakończy się, gdy ponownie drugie wahadło zatrzyma się. Wahadła wymieniają się energiami z częstotliwością dudnień dwa razy większą od częstotliwości modulacji:

$$\omega_d = \omega_2 - \omega_1 \qquad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \qquad (\text{II.12})$$

Częstotliwość ta rośnie ze wzrostem sprzężenia – odległością od punktu zamocowania sprężyny do osi obrotu wahadeł.

III. Drgania tłumione

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczenia nr 37 oraz innych.

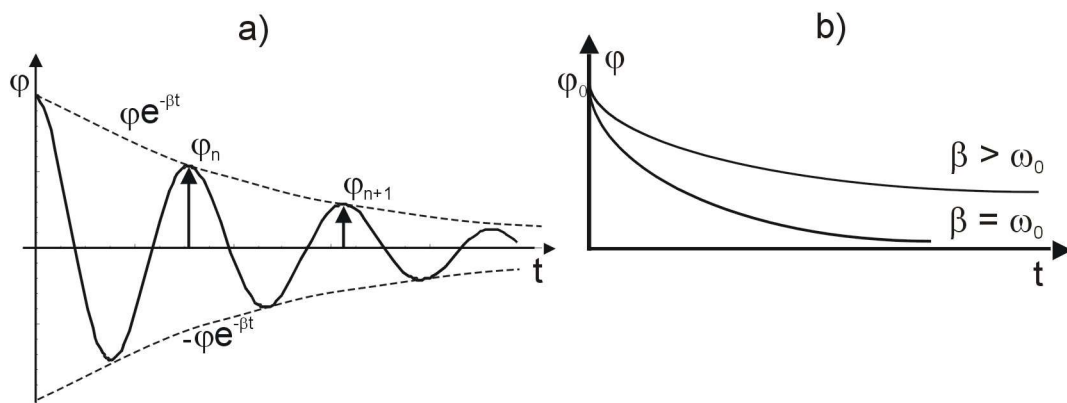
Równanie (III.1) jest znanym równaniem różniczkowym ruchu harmonicznego tłumionego:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_0\varphi(t) = 0 \quad (\text{III.1})$$

gdzie φ – pewna wielkość fizyczna podlegająca drganiom.

Taką postać równania otrzymalibyśmy analizując ruch wahadła lub ciężarka zawieszonego na sprężynie z tłumikiem, ruch cewki galwanometru, wielkość prądu płynącego w obwodzie elektrycznym RLC.

Wykonywany ruch zależy od wartości współczynnika tłumienia β .



Rys. III.1. Wykresy drgań: a) drgania słabo tłumione, b) silnie tłumione – ruch aperiodyczny.

1. Jeżeli $\beta < \omega_0$, czyli $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$ występuje ruch harmoniczny o malejącej amplitudzie $\varphi_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}$ (rys. III.1a):

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \delta) \quad (\text{III.2})$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ jest częstością drgań tłumionych, a $T = \frac{2\pi}{\omega}$ jego okresem.

Stałe φ_0 , δ mogą być określone z warunków początkowych. Wyrażenie $\varphi_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}$ spełnia rolę amplitudy drgań, która w przeciwieństwie do ruchu harmonicznego prostego nietłumionego nie jest stała w czasie, lecz maleje wykładniczo (eksponentalnie) z upływem czasu. Częstotliwość drgań tłumionych jest mniejsza niż częstość drgań własnych. Wielkością opisującą szybkość zmian amplitudy drgań tłumionych jest tzw. logarytmiczny dekrement tłumienia – Λ , definiowany jako logarytm naturalny stosunku amplitud w chwilach czasu t oraz $t+T$ (T – okres drgań tłumionych):

$$\Lambda = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \ln \frac{\varphi_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}}{\varphi_0 \cdot e^{-\beta \cdot (t+T)}} = \beta \cdot T \quad (\text{III.3})$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia charakteryzuje tłumiony obwód drgający, jest wielkością stałą w czasie i określa, jak szybko zmienia się amplituda drgań po czasie równym okresowi drgań tłumionych.

2. Jeżeli siły oporu są na tyle duże, że $\omega_o^2 - \beta^2 \leq 0$, to ruch ma charakter aperiodyczny, tzn. wychylenie z położenia równowagi maleje asymptotycznie, ale nigdy go nie osiągając (rys. III.1b).

IV. Drgania wymuszone i rezonans

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczenia nr 24 oraz innych.

Równanie (III.1) jest znanym równaniem różniczkowym ruchu harmonicznego tłumionego:

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dU(t)}{dt} + \omega_o U(t) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

gdzie U – pewna wielkość fizyczna podlegająca drganiom.

Aby mimo tłumienia utrzymać w układzie drgania harmoniczne niegasnące należy wprowadzić odpowiednio zmienne wymuszenie harmoniczne:

$$e(t) = U_o \cos \Omega \cdot t \quad (\text{IV.2})$$

gdzie Ω – jest częstotścią wymuszenia.

Z otrzymuje się wówczas:

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dU(t)}{dt} + \omega_o U(t) = U_o \cos \Omega \cdot t \quad (\text{IV.3})$$

Jest to równanie różniczkowe drgań wymuszonych. Rozwiązaniem są drgania harmoniczne o częstotści równej częstotści siły wymuszającej Ω . Drgania wymuszone są przesunięte w fazie względem wymuszenia o kąt ϕ będący fazą początkową drgania wymuszonego. Amplituda tych drgań jest ściśle określona i zależy od częstotści wymuszenia oraz od amplitudy wymuszenia. Zatem rozwiązanie równania (IV.3) jest w postaci:

$$e(t) = A \cos(\Omega \cdot t + \phi) \quad (\text{IV.4})$$

gdzie:

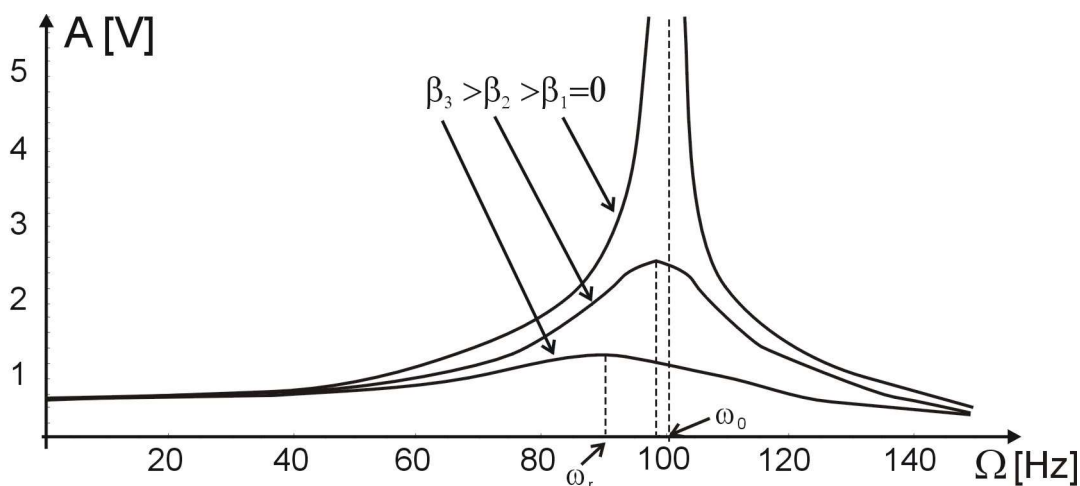
$$A = \frac{U_o}{L \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (\text{IV.5})$$

$$\phi = \arctg \left(- \frac{2\beta\Omega}{\omega_o^2 - \Omega^2} \right) \quad (\text{IV.6})$$

Aby przekonać się, że funkcja przedstawiona w (IV.4) jest rozwiązaniem równania (IV.3) należy obliczyć jej pierwszą i drugą pochodną i wstawić do równania (IV.3), aby sprawdzić otrzymanie tożsamości.

Zjawisko rezonansu, które poniżej zostanie zdefiniowane, związane jest z wymuszonymi drganiami układów drgających np. mechanicznych lub elektrycznych. Pojęcie wymuszenia drgań oznacza, że układ drgający nie został wytrącony z równowagi i pozostawiony sam sobie, lecz przez cały czas działa na niego siła. W rozważaniach na temat rezonansu badane jest zachowanie się układu poddanego działaniu siły harmoniczej, a szczególnie wpływ częstotści siły wymuszającej na to zachowanie.

Jak wynika z analizy amplitudy drgań wymuszonych (IV.5), przy odpowiednim dobraniu częstotści wymuszenia nawet przy niewielkiej amplitudzie siły wymuszającej można uzyskać bardzo dużą wartość amplitudy drgań wymuszonych. Takie zjawisko nazywamy rezonansem. Na rysunku IV.1 przedstawiono zależność amplitudy A od częstotści wymuszenia Ω dla różnych wartości współczynnika tłumienia, przy czym $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$.



Rys. IV.1. Amplituda drgań wymuszonych w funkcji częstotliwości.

Wartość częstotliwości wymuszenia dla której amplituda drgań wymuszonych osiąga maksimum (zaznaczona na wykresie linią przerywaną) silnie zależy od wartości współczynnika tłumienia β i wyraża się następującym wyrażeniem:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} \quad (\text{IV.7})$$

Im mniejsze β , tym ostrzejsza jest krzywa rezonansowa, a częstota rezonansu wzrasta.

Q (dobroć układu) jest jednym z parametrów charakteryzujących obwody rezonansowe. Dla obwodu szeregowego wartość dobroci układu jest równa stosunkowi amplitudy wielkości badanej w rezonansie do amplitudy siły wymuszającej. Zatem dla $Q \gg 1$ charakterystykę częstotliwościową w pobliżu rezonansu opierając się na wyrażeniach można zapisać w postaci:

$$U_C = \frac{U_o}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + (2x)^2}} = \frac{U_o}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4\left(\frac{f - f_r}{f_r}\right)^2}} \quad (\text{IV.8})$$

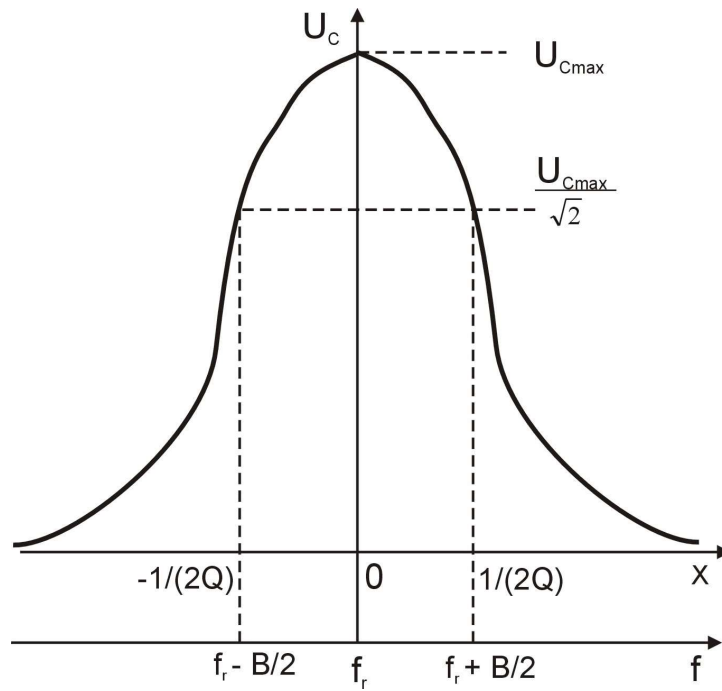
Kolejnym parametrem charakteryzującym obwód rezonansowy jest **pasmo częstotliwości – B**:

$$B = \frac{f_r}{Q} = \frac{\Omega_r}{2\pi Q} \quad (\text{IV.9})$$

określone jako zakres częstotliwości, dla których zachodzi warunek (rysunek IV.2):

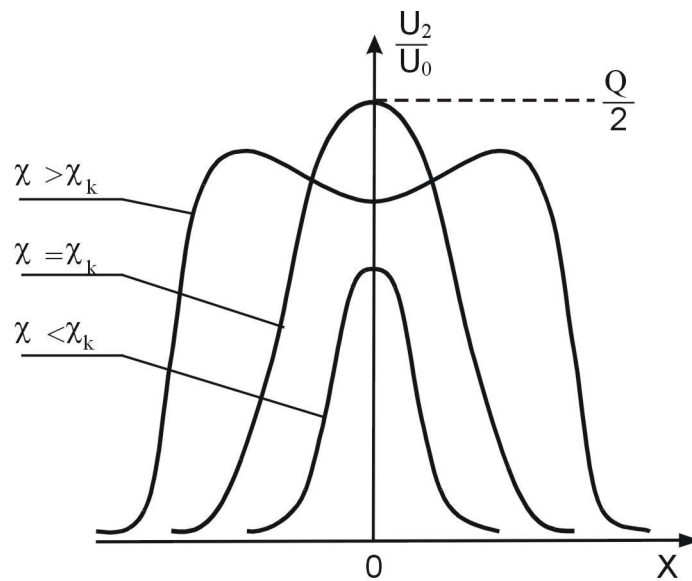
$$\left(\frac{U_C}{U_o}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}} Q \quad (\text{IV.10})$$

Jednym z podstawowych zastosowań obwodów rezonansowych jest ich wykorzystanie jako filtry. Właściwości filtracyjne obwodu rezonansowego polegają na znacznym wzroście amplitudy wielkości wyjściowej dla częstotliwości wymuszenia leżących w zakresie pasma częstotliwości B . Niestety, pojedynczy układ rezonansowy charakteryzuje się zbyt wolnym spadkiem wielkości wyjściowej na krawędziach pasma B , co zilustrowano na rysunku IV.2.



Rys. IV.2. Przykładowa krzywa rezonansowa.

Znacznie lepsze charakterystyki w tym względzie mają sprzężone obwody rezonansowe, w których drgania istniejące w jednym obwodzie wpływają na zachowanie się drugiego obwodu.



Rys. IV.3. Krzywe rezonansowe dla różnych wartości sprzężeń.

W zależności od wielkości tzw. parametru sprzężenia χ zdefiniowanego jako:

$$\chi = \frac{C_s}{C} \quad (IV.11)$$

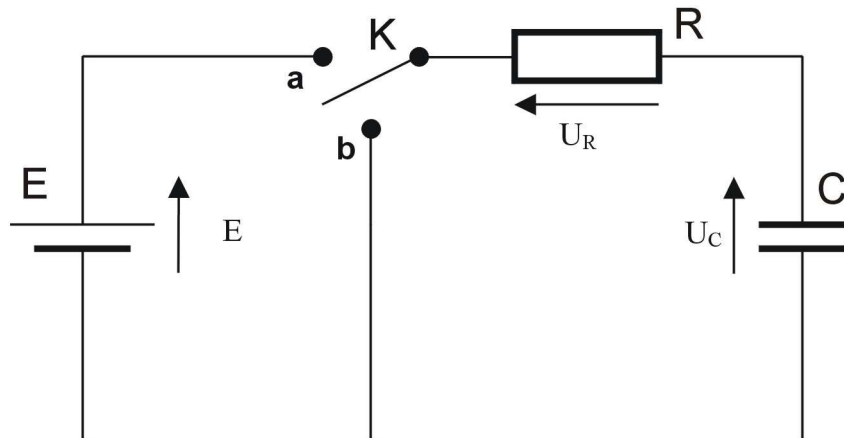
wyróżniamy następujące przypadki:

- jeżeli $\chi < 1/Q$ – sprzężenie podkrytyczne, na wykresie krzywej rezonansowej występuje jeden punkt ekstremalny dla $x = 0$ $\left(\frac{U_2}{U_0} \Big|_{x=0} < \frac{Q}{2} \right)$
- dla $\chi = \chi_{kr} = 1/Q$ – sprzężenie krytyczne, jeden punkt ekstremalny na krzywej rezonansowej $\left(\frac{U_2}{U_0} \Big|_{x=0} = \frac{Q}{2} \right)$
- dla $\chi > 1/Q$ – sprzężenie nadkrytyczne, trzy punkty ekstremalne na krzywej rezonansowej.

V. Drgania relaksacyjne

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczenia nr 21 oraz innych.

Drganiami relaksacyjnymi nazywamy drgania w których wzrosty i spadki wielkości fizycznej w czasie zachodzą w sposób wykładniczy. Nie są to zatem drgania harmoniczne. Zazwyczaj do ich wytwarzania wykorzystuje się proces ładowania i rozładowania kondensatora poprzez rezystor. Dla rozpatrzenia tego procesu poddano analizie obwód RC przedstawiony na rysunku V.1.



Rys. V.1. Obwód RC.

Po przełączeniu klucza K do pozycji **a** nastąpi ładowanie kondensatora C przez rezystor R. W celu obliczenia zmiany w czasie ładunku Q zgromadzonego na kondensatorze i natężenia prądu I płynącego przez obwód należy skorzystać z drugiego prawa Kirchhoffa dla rozpatrywanego oczka:

$$E - U_R - U_C = 0 \quad (\text{V.1})$$

stąd:

$$E - IR - \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{V.2})$$

Uwzględniając, że $I = \frac{dQ}{dt}$ uzyskuje się równanie różniczkowe:

$$E = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (\text{V.3})$$

Należy znaleźć funkcję $Q(t)$ spełniającą powyższe równanie. Równanie V.3 można rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych czasu t i ładunku Q .

$$-dt = \frac{R}{\frac{Q}{C} - E} dQ \quad (\text{V.4})$$

Po scałkowaniu uzyskuje się:

$$-t = RC \ln \left(\frac{Q}{C} - E \right) + B_1 \quad (\text{V.5})$$

stąd

$$Q(t) = C \left(B_2 \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] + E \right) \quad (\text{V.6})$$

gdzie B_1 oraz B_2 są stałymi całkowania i spełniony jest związek $B_2 = \exp(-B_1)$.

Aby określić stałą całkowania należy wykorzystać warunki początkowe ładowania kondensatora. Ładunek na kondensatorze w chwili początkowej jest zerowy tzn. $Q(t=0) = 0$. Stąd otrzymuje się

$$Q(t) = CE \left(1 - \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] \right) \quad (\text{V.7})$$

Natężenie prądu płynącego w obwodzie wynosi:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] \quad (\text{V.8})$$

a napięcie na ładowanym kondensatorze odpowiednio:

$$U(t) = \frac{Q}{C} = E \left(1 - \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] \right) \quad (\text{V.9})$$

Wykładnik t/RC w równaniach (IV.7), (IV.8), (IV.9) musi być bezwymiarowy, stąd wielkość RC ma wymiar czasu i nazywana jest stałą czasową obwodu. Jest ona równa czasowi, w jakim ładunek na kondensatorze powiększa się o czynnik $(1 - \exp(-1))$, czyli o około 63% swojej wartości w stanie równowagi. Prąd płynący w obwodzie spada w tym czasie do $1/e$ swej wartości początkowej.

Po naładowaniu kondensatora klucz K zostaje przełączony do pozycji **b** (rys. IV.1), wówczas zachodzi rozładowanie kondensatora przez rezystancję R . W obwodzie brak siły elektromotorycznej ($E = 0$) i równanie (IV.3) dla obwodu przyjmuje postać:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{V.10})$$

Zapisując je w formie: $\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$ i całkując obustronnie uzyskuje się:

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + B_3 \quad (\text{V.11})$$

skąd

$$Q(t) = B_4 \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] \quad (\text{V.12})$$

gdzie B_3 i B_4 – stałe całkowania i zachodzi związek $B_4 = \exp(B_3)$.

Stałą całkowania znajduje się z warunków początkowych rozładowania kondensatora, tzn. dla $t = 0$ ładunek $Q(t=0) = E \cdot C$. Stąd $B_4 = CE$, a zmiany w czasie ładunku na kondensatorze $Q(t)$ i natężenia prądu płynącego w obwodzie $I(t)$ podczas rozładowania są równe odpowiednio:

$$Q(t) = CE \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] \quad (\text{V.13})$$

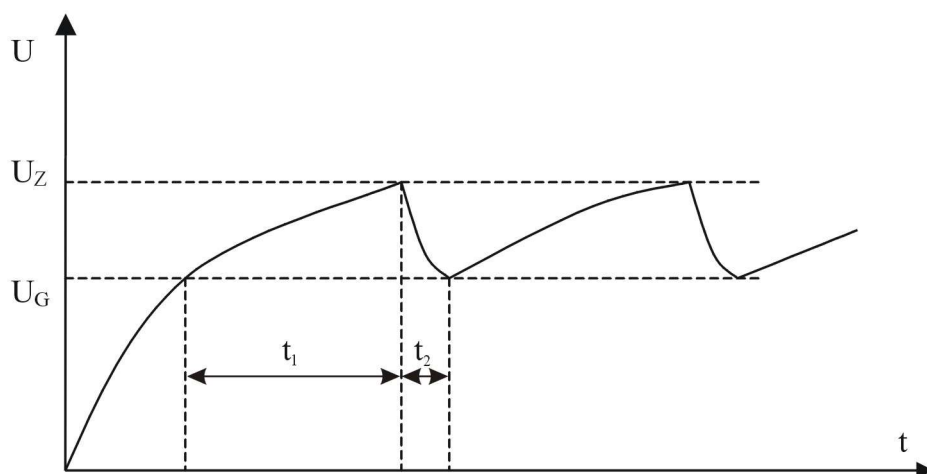
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{E}{R} \exp \left[-\frac{t}{RC} \right] \quad (\text{V.14})$$

Napięcie na rozładowywanym kondensatorze maleje w czasie zgodnie z zależnością:

$$U(t) = \frac{Q}{C} = E \exp\left[-\frac{t}{RC}\right] \quad (\text{V.15})$$

W czasie $t = RC$ ładunek na kondensatorze zmniejsza się do $1/e$ (czyli około 37%) wartości ładunku początkowego. Minus w równaniu (V.14) wskazuje, że podczas rozładowania prąd w obwodzie RC płynie w kierunku przeciwnym niż przy ładowaniu kondensatora (porównaj z równaniem (V.8)).

Cyklicznie przełączając klucz K w omówionym obwodzie RC (rys. V.1) można otrzymać drgania polegające na przemiennym wzroście i spadku napięcia na kondensatorze C związanych z jego kolejno następującym po sobie ładowaniem i rozładowaniem (rys. V.2)



Rys. V.2. Przykładowy wykres drgań relaksacyjnych.

VI. Fale, dźwięk

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczeń nr 6, 30 oraz innych.

W ośrodkach sprężystych wytrącenie pewnego obszaru z położenia równowagi powoduje drgania wokół tego położenia. Dla drgania harmonicznego wychylenie z położenia równowagi zmienia się harmonicznym w czasie z częstotliwością kątową ω :

$$A(t) = A_o \cos(\omega \cdot t + \varphi_o) \quad (\text{VI.1})$$

gdzie: A_o – amplituda drgań, czyli największe wychylenie,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T - \text{okres drgań},$$

φ_o – faza początkowa.

Wskutek sprężystości ośrodka zaburzenie to przenosi się do coraz dalszych obszarów z prędkością v zależną od właściwości danego ośrodka. Zjawisko to nazywamy falą mechaniczną.

W punkcie oddalonym od źródła zaburzenia o x_o drgania pojawiają się z opóźnieniem $t_o = \frac{x_o}{v}$ (np. na jeziorze w chwili $t = 0$ rzuciliśmy kamień na odległość x_o od brzegu. Fala pojawi się przy brzegu dopiero po czasie t_o tzn. w chwili $t = t_o$). Drganie w punkcie x_o opisywane jest równaniem:

$$A(x_o, t) = A_o \cos \omega(t - t_o) = A_o \cos \omega \left(t - \frac{x_o}{v} \right) \quad (\text{VI.2})$$

Zapis $A(x_o, t)$ oznacza, że wychylenie A dotyczy konkretnego punktu x_o . Ogólnie możemy zapisać dla wszystkich punktów x drgającego ośrodka:

$$A(x, t) = A_o \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (\text{VI.3})$$

Równanie to opisuje falę rozchodzącą się w kierunku dodatniej osi x . W przypadku rozchodzenia się fali w kierunku przeciwnym, należy x zastąpić przez $-x$ i wówczas:

$$A(x, t) = A_o \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (\text{VI.4})$$

Długością fali λ nazywamy najmniejszą odległość między punktami drgającymi w jednakowych fazach. Jest ona równa drodze jaką określa fala przebędzie z prędkością v w czasie T :

$$\lambda = v \cdot T \quad (\text{VI.5})$$

stąd:

$$v = \lambda \cdot f \quad (\text{VI.6})$$

gdzie $f = \frac{1}{T}$ – częstotliwość propagujących się drgań.

Jest to wzór słuszny dla każdego typu fali.

Powierzchnię utworzoną przez punkty, do których doszło w danej chwili zaburzenie nazywamy czołem fali. Fale mogą być **płaskie** (w przypadku, gdy fala rozchodzi się w jednym kierunku), **kuliste** (gdy źródło wysyła energię drgania, tak samo we wszystkich kierunkach) oraz inne w przypadkach pośrednich.

W zależności od kierunku drgań cząsteczek ośrodka względem kierunku rozchodzenia się fali, fale mogą być **podłużne** - cząstki drgają równolegle lub **poprzeczne** - cząstki drgają prostopadle do kierunku propagacji (czyli rozchodzenia się) fali. Fale poprzeczne powstają w ośrodkach charakteryzujących się sprężystością postaci (sztywnością). Dla występowania fal podłużnych

wystarczający jest warunek sprężystości objętości. W cieczech i gazach mogą rozchodzić się tylko fale podłużne. W ciałach stałych mogą występować również fale poprzeczne.

Do bardzo rozpowszechnionych procesów makroskopowych należą ruchy określone wspólną nazwą fal dźwiękowych lub po prostu dźwięków. Dźwięk jest makroskopową falą powstającą w wyniku uporządkowanych małych drgań substancji. Makroskopowość fali oznacza to, że jej długość λ przewyższa znacznie charakterystyczne liniowe rozmiary mikroskopowej struktury ośrodka. A zatem, dla dźwięku w gazie $\lambda \gg \lambda_s$, gdzie λ_s oznacza średnią drogę swobodną cząstek gazu. W warunkach normalnych λ_s jest rzędu 10^{-7} m, wobec czego $\lambda \gg 10^{-7}$ m. W przypadku cieczy i ciał stałych musi być spełniony warunek $\lambda \gg a$, gdzie a oznacza średnią odległość między cząsteczkami ośrodka. Odległość ta jest rzędu 10^{-10} m, a więc w przypadku takich ośrodków musi być spełniony warunek $\lambda \gg 10^{-10}$ m.

Ograniczenia długości fali od strony małych wartości pociągają za sobą ograniczenia częstości od strony dużych wartości. W gazach, w warunkach normalnych, prędkość dźwięku zmienia się w granicach od 10^2 do 10^3 m/s (wyjątkiem jest wodór, w którym prędkość dźwięku jest większa $v > 10^3$ m/s). W cieczech i ciałach stałych prędkość dźwięku jest prawie o rząd wielkości większa niż w gazach. Wychodząc z ogólnej właściwości fal $v = \lambda \cdot f$ otrzymujemy następujący warunek na częstość drgań dźwiękowych w gazach w warunkach normalnych:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \ll 10^9 \text{ m} \quad (\text{VI.7})$$

Regularna struktura (uporządkowanie) fali dźwiękowej wynika z tego, że dźwięk jest wzbudzany drganiami mechanicznymi. Na przykład fala dźwiękowa dochodząca od głośnika jest wytwarzana drganiami jego membrany. Uporządkowanie cechujące fale dźwiękowe odróżnia je od ruchów bezładnych, takich jak cieplne drgania cząstek kryształu. Ponieważ drgania dźwiękowe są małe, towarzyszące przechodzeniu fali dźwiękowej odchylenia makroskopowych parametrów ośrodka od wartości równowagowych są niewielkie. Np. różnice ciśnień w gazie, powodowane przejściem fali dźwiękowej są mniejsze niż ciśnienie w gazie nie zaburzonym przechodzeniem takiej fali.

Dźwiękiem w węższym sensie nazywamy takie drgania ośrodka, których częstość należy do zakresu odbieranego przez ludzkie ucho, czyli do zakresu od 16 do $2 \cdot 10^4$ Hz. Drgania o częstościach mniejszych niż 16 Hz nazywamy infradźwiękami, a o częstości powyżej $2 \cdot 10^4$ Hz, zwanych ultradźwiękami. Dział fizyki poświęcony badaniu zjawisk dźwiękowych nosi nazwę akustyki i w związku z tym fale dźwiękowe nazywa się także falami akustycznymi.

Dzięki makroskopowemu charakterowi ruchu w polu fali dźwiękowej można nie uwzględniać mikroskopowej budowy ośrodka, lecz zakładać jego ciągłą budowę ciągłą. W przypadku fali akustycznej rozchodzącej się w dowolnym ośrodku wielkością wykonującą ruch drgający jest każda składowa dostatecznie małego przemieszczenia $\xi(r, t)$ nieskończenie małego elementu objętości ΔV ośrodka względem położenia równowagi.

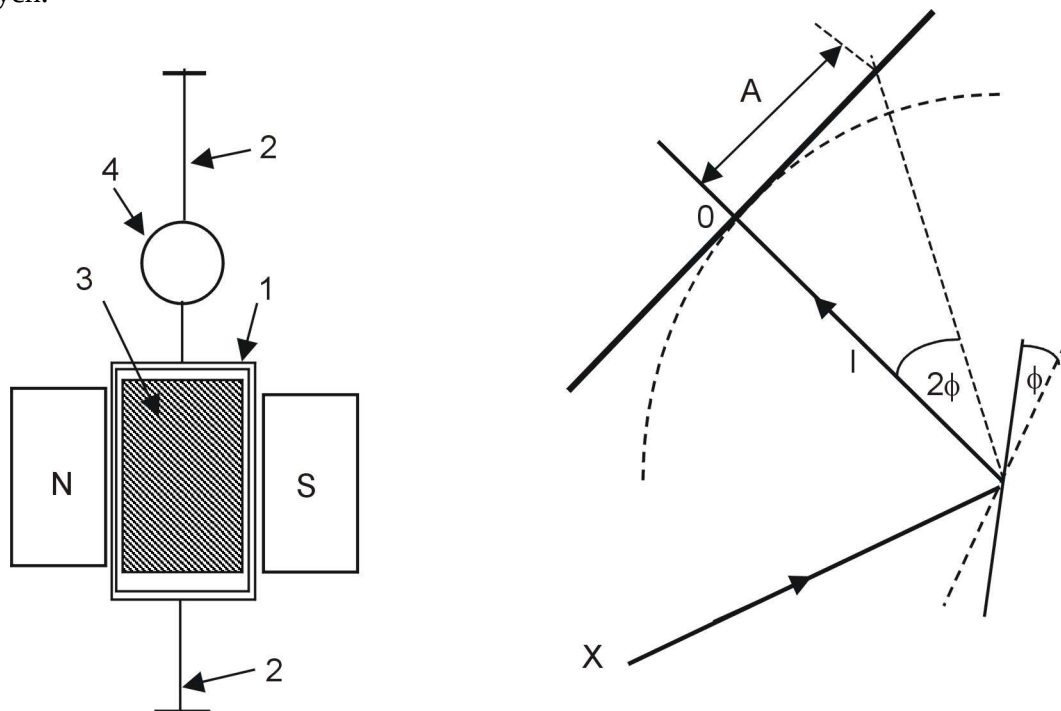
W fizyce zjawisk dźwiękowych rozważa się następujące pytania:

- Jaka jest zależność prędkości dźwięku od właściwości ośrodka?
- Od jakich wielkości fizycznych zależą zjawiska akustyczne?

VII. Wyznaczanie drgań tłumionych cewki galwanometru

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczeń nr 16, 37 oraz innych.

Analizujemy drgania układu, jakim jest cewka galwanometru zwierciadłowego. Na rysunku VII.1 pokazane zostały tylko podstawowe elementy potrzebne do zrozumienia powstawania drgań tłumionych.



Rys. VII.1. Schemat galwanometru zwierciadłowego i schemat do odczytu wychyleń ramki galwanometru.

Cewka pomiarowa (1) o dużej liczbie zwojów z cienkiego drutu zawieszona jest na sprężystej nici metalowej (2) i może wykonywać drgania skrętne w szczeliny wytworzonej między nabiegunnikami trwałego magnesu a rdzeniem wykonanym z magnetycznie miękkiego żelaza (3). Dzięki rdzeniowi pole magnetyczne w szczeliny jest radialne i w przybliżeniu ma prawie w każdym punkcie jednakowe natężenie. Do nici przytwierdzone jest lustro (4). Jeżeli skierujemy na nie wiązkę światła, to na umocowanym naprzeciw ekranie (skali) można obserwować ruch plamki świetlnej. Zwiększając odległość pomiędzy lustrem a zwierciadłem można dla małych skręceń sprężystej nici otrzymać dostatecznie duże wychylenie plamki świetlnej na skali. Schemat działania układu odczytowego przedstawia rysunek III.1b. Zgodnie z prawem odbicia światła skręceniu lusterka o kąt φ odpowiada wychylenie plamki o 2φ .

W czasie ruchu obrotowego na cewkę działa moment związany ze skręceniem nici sprężystej (czasem sprężyny spiralnej), jest to tzw. moment siły kierującej. Przyjmując liniową zależność wielkości tego momentu od kąta skręcenia, co jest praktycznie realizowane przy dostatecznie małych kątach skręcenia, otrzymuje się zależność:

$$M_k = -D_k \cdot \varphi \quad (\text{VII.1})$$

gdzie D_k – oznacza współczynnik proporcjonalności zwany momentem kierującym, uwzględniający właściwości sprężystej nici, na której zawieszona jest cewka.

Znak minus w zależności (VII.1) uwzględnia fakt, że moment siły kierującej ma zwrot przeciwny do kąta wychylenia cewki, który zależy od wielkości natężenia prądu przez nią przepływającego.

Na przewody cewki umieszczone w polu magnetycznym działa siła F . Siła ta jest prostopadła do płaszczyzny ramki i ze względu na rdzeń, dzięki któremu pole magnetyczne jest radialne, niezależna od kąta φ . Moment sił działający na cewkę, spowodowany przepływem przez nią prądu, ma więc postać

$$M = 2 \cdot F \cdot \frac{b}{2} \quad (\text{VII.2})$$

gdzie: $S = a \cdot b$ - przekrój ramki, b – szerokość cewki.

Z równości momentu siły kierującej wyrażonego wzorem (VII.1) i momentu skręcającego ze wzoru (VII.2) można wyznaczyć kąt wychylenia cewki φ pod wpływem przepływającego przez nią prądu I . Wychylenie to jest proporcjonalne do wielkości natężenia tego prądu.

Jeżeli w pewnej chwili obwód zasilający cewkę galvanometru zostanie przerwany, zniknie moment skręcający, a moment siły kierującej zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ciał w ruchu obrotowym nada cewce przyspieszenie kątowe:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_k}{J} \quad (\text{VII.3})$$

gdzie: J – moment bezwładności cewki względem osi obrotu, $\varepsilon = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$ – przyspieszenie kątowe.

Korzystając z równań (VII.1) i (VII.3) otrzymuje się w tym przypadku równanie opisujące kąt wychylenia cewki w następującej postaci:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_o^2\varphi(t) = 0 \quad (\text{VII.4})$$

gdzie $\omega_o = \sqrt{\frac{J}{D_k}}$ – częstość kątowa.

Równanie (VII.4) jest to równanie drgań harmonicznym. Jego rozwiązanie ma postać:

$$\varphi(t) = \varphi_o \cdot \sin(\omega_o t + \delta) \quad (\text{VII.5})$$

gdzie: φ_o – amplituda drgań, δ – faza początkowa

W przypadku, gdy obwód cewki po odłączeniu go od źródła prądu zostanie zwarty przez opór $R_z > 0$, powstaje moment, który „tłumi” ruch cewki. Cewka podlega teraz działaniu dwóch momentów kierującego M_k i tłumiącego M_H , zgodnie z drugą zasadą dynamiki przyspieszenie kątowe cewki można wyrazić jako:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_k + \vec{M}_H}{J} \quad (\text{VII.6})$$

co prowadzi do zależności:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_o^2\varphi(t) = 0 \quad (\text{VII.7})$$

gdzie β – współczynnik tłumienia zależny od parametrów obwodu elektrycznego, $\omega_o = \sqrt{\frac{J}{D_k}}$.

Rozwiązanie równania (VII.7) ma postać:

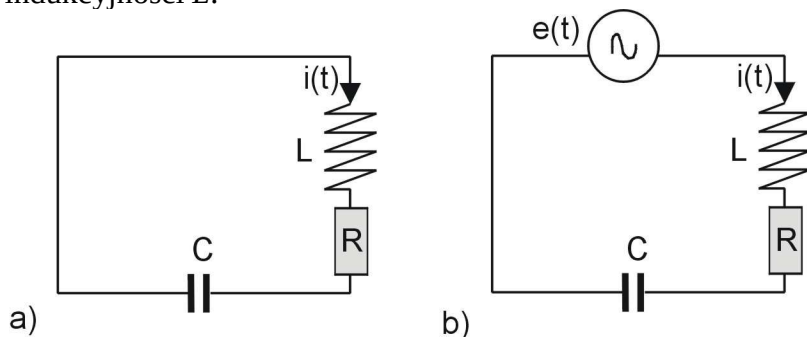
$$\varphi(t) = \varphi_o \cdot e^{-\beta \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \delta) \quad (\text{VII.8})$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ jest częstością drgań tłumionych jeśli $\beta < \omega_o$.

VIII. Wyznaczanie parametrów drgań tłumionych

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczeń nr 21, 37 oraz innych.

Ze względu na łatwość technicznej realizacji w ćwiczeniu badany jest elektryczny układ rezonansowy. Rozważmy układ elektryczny bez wymuszenia (rys. VIII.1a) zbudowany z rezystancji R , pojemności C i indukcyjności L .



Rys. VIII.1 Układ rezonansowy RLC; a – bez wymuszenia, b – z wymuszeniem.

W pewnym momencie na kondensatorze C został zgromadzony ładunek q , a prąd płynący w obwodzie jest równy zeru. Następuje rozładowanie kondensatora i zaczyna płynąć prąd określony zależnością:

$$i = \frac{dq(t)}{dt} \quad (\text{VIII.1})$$

Energia pola elektrycznego E_C zgromadzona w kondensatorze zależy od zgromadzonego w nim ładunku:

$$E_C = \frac{q^2}{2C} \quad (\text{VIII.2})$$

Wraz z rozładowaniem kondensatora energia ta maleje, wzrasta natomiast energia pola magnetycznego E_L gromadzona w cewce o indukcyjności L :

$$E_L = \frac{L \cdot i^2}{2} \quad (\text{VIII.3})$$

W rezultacie pole elektryczne maleje, pole magnetyczne wzrasta, a energia zawarta w polu elektrycznym kondensatora zamienia się na energię pola magnetycznego cewki. W procesie tym przez opornik R przepływa prąd $i(t)$ wydzielając na nim ciepło Joule'a. Następuje więc zamiana części energii na ciepło w ilości:

$$E_J = \frac{R \cdot i^2}{2} \quad (\text{VIII.4})$$

Jeden pełny cykl zaczynający się np. od chwili podłączenia do obwodu RLC naładowanego kondensatora zawiera rozładowanie kondensatora, naładowanie ładunkiem o przeciwnym znaku, ponowne rozładowanie i naładowanie do pierwotnego stanu. Jeśli $R \neq 0$ nastąpi strata energii cieplnej i układ nie wróci do pierwotnego stanu. Cykl zamknie się w momencie uzyskania maksymalnej wartości ładunku na kondensatorze, ale mniejszej od początkowej. Dla $R = 0$ układ jest bezstratny i istnieje pełna analogia opisu zjawiska do drgań swobodnych wahadła matematycznego.

Aby opisać zmiany prądu $i(t)$ w obwodzie RLC zostanie zastosowane II prawo Kirchhoffa, które mówi, że suma spadków napięć w oczku obwodu elektrycznego jest równa zero.

Z prawa Ohma wiemy, że spadek napięcia na oporniku R jest równy:

$$U_R(t) = i(t) \cdot R \quad (\text{VIII.5})$$

Napięcie na kondensatorze wyraża się zależnością:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (\text{VIII.6})$$

Zgodnie z prawem Faraday'a w cewce pod wpływem zmiennego w czasie prądu $i(t)$ indukuje się siła elektromotoryczna U_L :

$$U_L = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{VIII.7})$$

Dla obwodu z rys. VIII.1a korzystając z II prawa Kirchhoffa $U_L(t) = U_R(t) + U_C(t)$ otrzymuje się:

$$-L \frac{di(t)}{dt} = i(t) \cdot R + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt \quad (\text{VIII.8})$$

Po uwzględnieniu zależności (24.1) równanie (24.8) przyjmie postać:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{VIII.9})$$

Wprowadzając oznaczenia:

- współczynnik tłumienia: $\beta = \frac{R}{2L}$
- częstotliwość drgań swobodnych zwana częstością własną: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

uzyskuje się równanie różniczkowe analogiczne do równania drgań tłumionych:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{VIII.10})$$

Wielkością zmieniającą się w czasie jest ładunek zgromadzony na okładkach kondensatora. Rozwiązanie powyższego równania pokazuje charakter tych zmian:

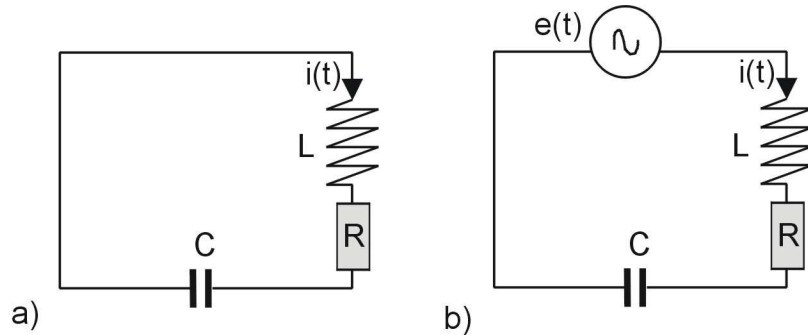
$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{VIII.11})$$

gdzie: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – częstość (pulsacja) drgań tłumionych.

IX. Wyznaczanie warunków rezonansu

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczenia nr 24 oraz innych.

Ze względu na łatwość technicznej realizacji w ćwiczeniu badany jest elektryczny układ rezonansowy.



Rys. IX.1. Układ rezonansowy RLC; a – bez wymuszenia, b – z wymuszeniem.

Aby mimo tłumienia utrzymać w układzie drgania harmoniczne niegasnące należy wprowadzić odpowiednio zmienne wymuszenie w postaci harmonicznie zmiennego w czasie źródła napięcia (rys. IX.1b):

$$e(t) = U_o \cos \Omega \cdot t \quad (\text{IX.1})$$

gdzie Ω – jest częstotścią wymuszenia.

Z II prawa Kirchhoffa otrzymuje się wówczas:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U_o \cos \Omega \cdot t \quad (\text{IX.2})$$

po przekształceniu:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_o}{L} \cos \Omega \cdot t \quad (\text{IX.2})$$

Jest to równanie różniczkowe drgań wymuszonych o rozwiązaniu w postaci:

$$q(t) = A \cos(\Omega \cdot t + \phi) \quad (\text{IX.3})$$

gdzie:

$$A = \frac{U_o}{L \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (\text{IX.4})$$

$$\phi = \arctg \left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) \quad (\text{IX.5})$$

Jak wynika z analizy amplitudy drgań wymuszonych (IX.4), przy odpowiednim dobraniu częstotliwości wymuszenia nawet przy niewielkiej amplitudzie siły wymuszającej można uzyskać bardzo dużą wartość amplitudy drgań wymuszonych. Takie zjawisko nazywamy rezonansem. Wartość częstotliwości wymuszenia dla której amplituda drgań wymuszonych osiąga maksimum silnie zależy od wartości współczynnika tłumienia β i wyraża się następującym wyrażeniem:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (\text{IX.6})$$

Im mniejsze β , tym ostrzejsza jest krzywa rezonansowa, a częstota rezonansu wzrasta. Wykorzystujac zaleznosci wyzej wymienione zaleznosci mozna otrzymac wyrazenia na wartosci napiecia U_C oraz U_L , odpowiadajace spadkom napiecia na kondensatorze C i cewce indukcyjnej L . Przeprowadzajac eksperyment zazwyczaj dokonuje sie pomiaru wartosci napiecia U_C . Przyjmujac, ze uklad rezonansowy ma male straty (tzn. $4\beta^2 \ll 1$) dla czestosci bliskich rezonansu U_C jest postaci:

$$U_C = \frac{U_o}{\sqrt{\Omega_r^4 R^2 C^2 + (2x)^2}} \quad (\text{IX.7})$$

gdzie:

- $\Omega_r = 2\pi \cdot f_r$ – czestota rezonansu dla danego β ,
- $x = \frac{\Omega - \Omega_r}{\Omega_r} = \frac{f - f_r}{f_r}$ – wzgledne odchylenie czestotliwosci wymuszajacej f od czestotliwosci rezonansowej f_r .

Dla $\Omega = \Omega_r$ wartosc $x = 0$, zatem dobroc ukkladu wynosi:

$$\frac{U_C}{U_o} = \frac{1}{\Omega_r^2 RC} = Q \quad (\text{IX.8})$$

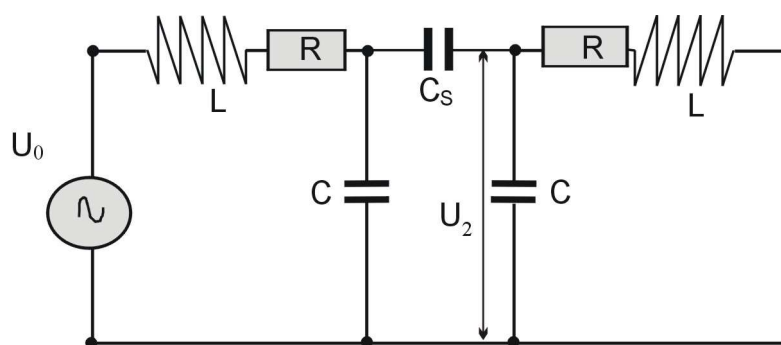
Dla obwodu szeregowego wartosc dobroci ukkladu jest rowna stosunkowi amplitudy napiecia na elementach C oraz L w rezonansie do amplitudy siły wymuszajacej. Zatem dla $Q \gg 1$ charakterystyce czestotliwosciowa w pobliżu rezonansu mozna zapisac w postaci:

$$U_C = \frac{U_o}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + (2x)^2}} = \frac{U_o}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4\left(\frac{f - f_r}{f_r}\right)^2}} \quad (\text{IX.9})$$

wtedy pasmo czestotliwosci B zapisujemy:

$$B = \frac{f_r}{Q} = \frac{\Omega_r}{2\pi Q} \quad (\text{IX.10})$$

Jednym z podstawowych zastosowan obwodow rezonansowych jest ich wykorzystanie jako filtry. Wlasciwosci filtracyjne obwodu rezonansowego polegaja na znacznym wzroscie amplitudy napiecia wyjsciowego dla czestotliwosci napiecia wymuszajacego lezacych w zakresie pasma czestotliwosci B . Pojedynczy uklad rezonansowy charakteryzuje sie zbyt wolnym spadkiem napiecia wyjsciowego na krawedziach pasma B . Znacznie lepsze charakterystyki w tym wzgledzie maja sprzeczne obwody rezonansowe, w ktorych drgania istniejace w jednym obwodzie wplywaja na zachowanie sie drugiego obwodu. W zaleznosci od rodzaju elementu sprzegajacego wyrozniamy rozne typy sprzeczni.



Rys. IX.2. Dwa układy rezonansowe sprzężone pojemnościowo.

Schemat układu obwodów rezonansowych sprzężonych pojemnościowo przedstawiono jest na rysunku IX.2. Są to dwa układy rezonansowe, o tych samych elementach R, L, C , sprzężone kondensatorem C_s . W zależności od wielkości tzw. parametru sprzężenia χ zdefiniowanego jako:

$$\chi = \frac{C_s}{C} \quad (\text{IX.11})$$

wyróżniamy następujące przypadki sprzężenia: podkrytycznego, krytycznego oraz nadkrytycznego.

X. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczenia nr 4 oraz innych.

Okres wahań wahadła rewersyjnego zawieszonego na osi O_1 jest równy okresowi wahań tego wahadła zawieszonego w punkcie O_2 odległym od punktu O_1 o długość zredukowaną. Na tej podstawie rysuje się idea prostego i dokładnego pomiaru przyspieszenia ziemskiego poprzez pomiar odległości między osiami oraz okresu. Dla wahadła rewersyjnego zachodzi zależność:

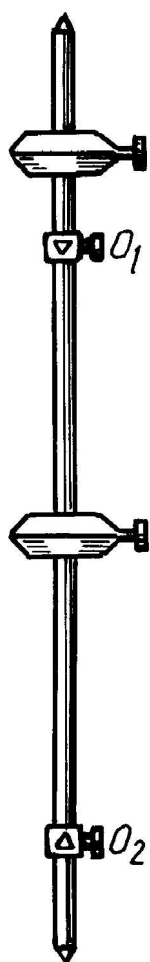
$$I_S = m a b \quad (X.1)$$

gdzie: m – masa wahadła,

a – odległość między pierwszą osią zawieszenia a środkiem ciężkości.

b – odległość między drugą osią zawieszenia a środkiem ciężkości.

Jak jednak praktycznie znaleźć osie, dla których jest słuszny warunek (X.1) mając bryłę o zadanym już kształcie, a więc o z góry ustalonym położeniu środka masy oraz momencie bezwładności i masie? Praktycznie przesuwanie osi obrotu jest bardzo trudne. Znacznie łatwiej postąpić odwrotnie, tzn. zamocować na stałe obie osie, zmieniać zaś położenie środka masy, a wraz z nim I_S , aż do spełnienia warunku równości okresów drgań przy obu zawieszeniach $T_1 = T_2$ (rys. X.1).



Rys. X.1. Laboratoryjny model wahadła fizycznego.

Na pręcie mającym na stałe zainstalowane dwie osie obrotu umieszczamy (między osiami) ciężarek nałożony wcześniej na pręt. Przesuwając ciężarek wzdłuż pręta i mierząc okresy względem obu osi poszukujemy położenia, w którym $T_1 = T_2$. Aby doświadczalnie wykluczyć sytuację, w której $b = a$ wprowadza się dużą asymetrię wstępną wahadła zwykle poprzez dodatkowe jeden lub dwa przesuwalne ciężarki umieszczone poza osiami.

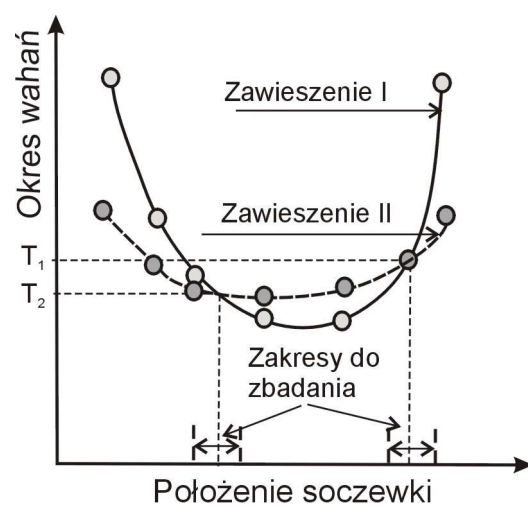
Sprawdzymy jeszcze, czy dla takiego wahadła na pewno będzie istniało między osiami położenie ciężarka, przy którym zajdzie oczekiwana sytuacja, czyli związek (X.1). Możemy go zapisać w postaci:

$$a(l_{zr} - a) = \frac{I_S}{m} \quad (X.2)$$

gdzie $l_{zr} = a + b$ nazywamy długością zredukowaną wahadła rewersyjnego.

Przesunięcie ciężarka zmienia niewiadomą " a " w równaniu, ale również wpływa na wartość I_S . Ponieważ lewa strona równania (X.2) ma postać równania drugiego stopnia, ogólnie można spodziewać się dwóch rozwiązań dla a , czyli dwóch różnych wartości położenia soczewki, przy których spełnienie warunku (X.1) umożliwia obliczenie przyspieszenia ziemskiego (rys. X.2). To jednak, czy takie rozwiązania będą istniały zależy od konkretnych wartości I_S .

Należy zaznaczyć, że pomiary należy wykonywać przy małych amplitudach wychyleń wahadła (nie większych niż 10°).



Rys. X.2. Zależność okresu wahań od położenia soczewki wahadła.

XI. Wyznaczanie prędkości dźwięku

Opis użyteczny do zrozumienia ćwiczeń nr 6, 30 oraz innych.

Dźwięk (fala akustyczna) to fala podłużna, czyli rozchodzące się rozrzedzenia i zagęszczenia powietrza np. $A(t) = A_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Zmiana ciśnienia Δp ma również charakter harmoniczny. Falę akustyczną można zatem traktować jak falę przemieszczeń (o amplitudzie A_0) lub jak falę zmian ciśnień o amplitudzie $p_0 = \rho \omega V A_0$ (gdzie ρ gęstość gazu):

$$\Delta p(x, t) = p_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (\text{XI.1})$$

Ponieważ przemieszczenia przesunięte są w stosunku do ciśnień o $\pi/2$, maksymalnemu ciśnieniu odpowiada zerowe przemieszczenie i odwrotnie maksymalnemu przemieszczeniu – zerowe ciśnienie. Z tego też względu gdy jedna z funkcji opisana jest funkcją sinus druga opisana jest funkcją cosinus.

Jedną z metod pomiaru prędkości dźwięku polega na wytworzeniu w słupie powietrza (w rurze) fali stojącej. Powstaje ona w wyniku interferencji (nałożenia się) dwóch identycznych fal, ale rozchodzących się w przeciwnych kierunkach i o przesuniętych względem siebie fazach o kąt π . W określonym punkcie x rury wychylenie cząsteczek gazu od położenia równowagi można określić z równania:

$$A(x, t) = A_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + A_0 \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \pi \right] = A_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) - A_0 \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (\text{XI.2})$$

Po jego przekształceniu otrzymujemy:

$$A(x, t) = 2 A_0 \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \quad (\text{XI.3})$$

Czynnik $\sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right)$ wskazuje na to, że cząsteczka gazu w punkcie x drga z częstotliwością spotykających się fal. Ich amplituda zależy od położenia punktu x i określona jest przez czynnik $2 A_0 \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right)$. Taki stan gazu w rurze nazywamy falą stojącą. W stanie tym można wyróżnić takie

płaszczyzny prostopadłe do osi rury, w których cząsteczki mają zerową amplitudę drgań (są to tzw. węzły fali stojącej) oraz płaszczyzny, w których amplituda drgań jest równa $2 A_0$ (są to tzw. strzałki). Mierzając ciśnienie w tych płaszczyznach otrzymalibyśmy odpowiednio maksymalne i minimalne ciśnienie. Falę stojącą jest łatwo otrzymać poprzez nałożenie danej fali na jej odbicie, gdyż fala odbijając się (np. od gładkiej ścianki) oprócz kierunku zmienia fazę drgań na przeciwną (tzn. o kąt π). W tak wytworzonej sytuacji cały ośrodek (powietrze w rurze) jest pobudzany do drgania przez dwie specyficzne fale. Udział w drganiu bierze cały ośrodek. Nie ma tu jednak zjawiska rozchodzenia się zaburzenia. Nie jest to zatem fala w sensie zgodnym z definicją fali, lecz szczególny stan drgania ośrodka.

Położenie strzałek można wyznaczyć z warunku $\sin \left(\frac{2\pi x_s}{\lambda} \right) = 1$:

$$x_{S_n} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{XI.4})$$

Odległość między kolejnymi strzałkami oblicza się z różnicy sąsiednich położzeń:

$$x_{S_{n+1}} - x_{S_n} = \frac{\lambda}{2} \quad (\text{XI.5})$$

i równa ona jest połowie długości interferujących ze sobą fal.

Odległość między kolejnymi węzłami można wyznaczyć badając warunek $\sin\left(\frac{2\pi x_W}{\lambda}\right) = 0$:

$$x_{W_n} = 2n \frac{\lambda}{4} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{XI.6})$$

$$x_{W_{n+1}} - x_{W_n} = \frac{\lambda}{2} \quad (\text{XI.7})$$

Z powyższych zależności łatwo pokazać, że odległość pomiędzy sąsiednimi węzłami i strzałkami równa jest jednej czwartej długości fali.