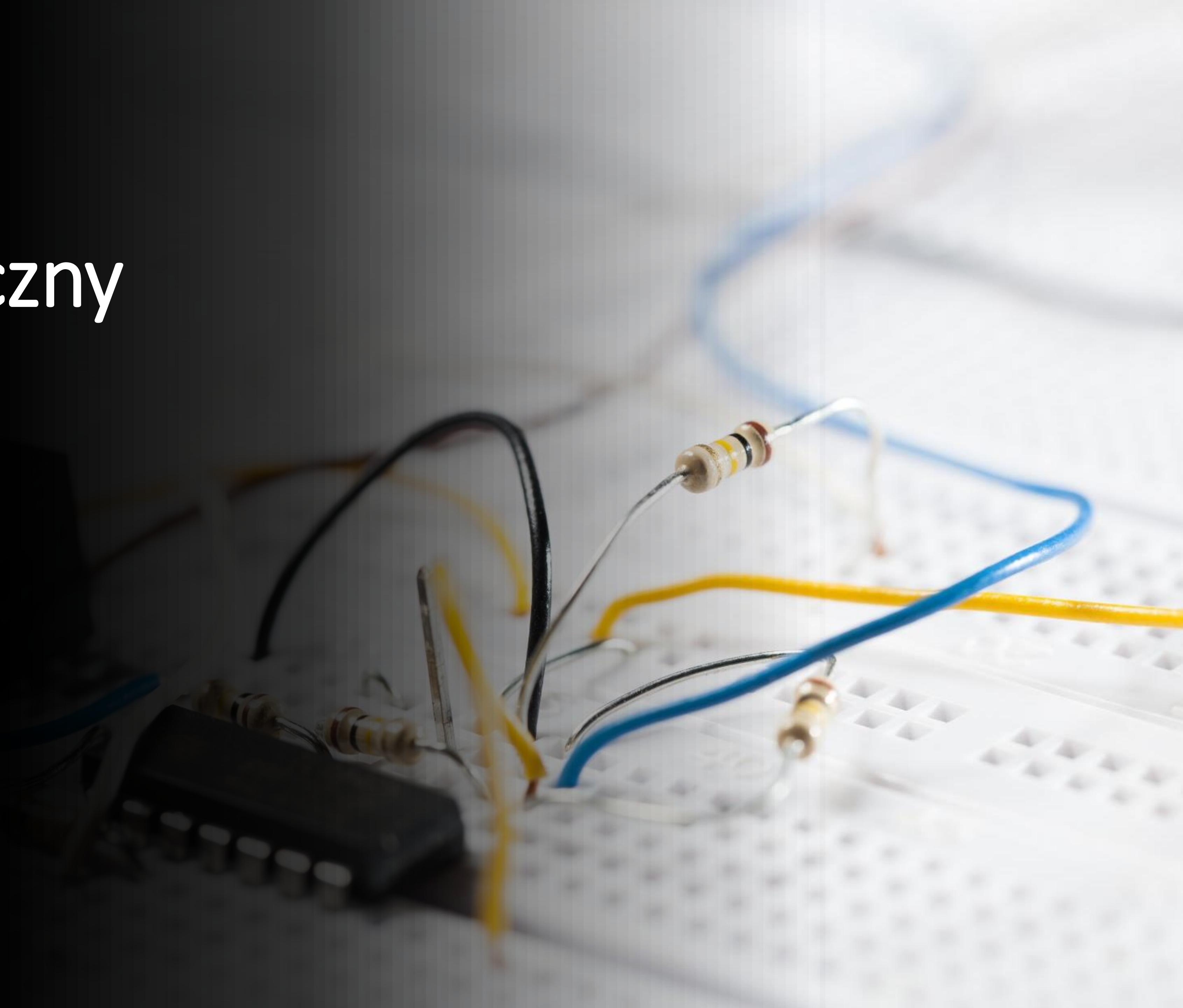
9. Prąd elektryczny

9.1. Natężenie prądu. Prawo Ohma

9.2. Prawa Kirchhoffa



9.1. Natężenie prądu. Prawo Ohma

Natężenie prądu elektrycznego

Przez przepływ prądu elektrycznego rozumiemy **ruch ładunków elektrycznych**. Czynnikiem wywołującym ten ruch jest istnienie napięcia, czyli różnicy potencjałów.

Zgodnie z tradycją, za kierunki prądu w obwodzie zewnętrznym przyjmuje się kierunek od potencjału wyższego – dodatniego, do niższego – ujemnego, czyli za **umowny kierunek prądu przyjmuje się kierunek ruchu ładunków dodatnich**.

Aby mógł płynąć prąd musimy mieć swobodne ładunki. W czasie przepływu prądu przez przewodniki metalowe mamy do czynienia z ruchem swobodnych elektronów, a więc nośników prądu poruszających się od potencjału niższego do wyższego, czyli w kierunku przeciwnym do umownie przyjętego. W elektrolitach wchodzących w skład zewnętrznej części obwodu mamy do czynienia z ruchem jonów dodatnich (tzw. kationów) do elektrody ujemnej (katody) i jonów ujemnych (tzw. anionów) do elektrody dodatniej (anody). W tym przypadku mówimy o prądzie jonowym. W półprzewodnikach może występować przewodnictwo elektronowe oraz dziurowe. W gazach występuje zarówno przewodnictwo jonowe, jak i elektronowe.

Przez natężenie prądu elektrycznego (zwanego też krótko prądem elektrycznym) rozumiemy stosunek ładunku przepływającego przez poprzeczny przekrój przewodnika do czasu przepływu. W przypadku prądu stałego, tj. prądu płynącego w jednym kierunku, gdy jego natężenie jest stałe w czasie

$$\boldsymbol{I = \frac{Q}{t}}.$$

Jednostką natężenia prądu elektrycznego jest amper [A]. Jest to jedna z podstawowych jednostek układu SI.

Przypominamy, że z tej zależności bierze się definicja kulomba: 1 kulomb jest to ładunek elektryczny przenoszony przez prąd o natężeniu 1 ampera w czasie 1 sekundy czyli:

$$\boldsymbol{[C] = [A] \cdot [s]}.$$

Prawo Ohma

Prawo Ohma, sformułowane w roku 1827 w oparciu o doświadczenia, mówi o prostej proporcjonalności prądu ***I*** płynącego przez przewodnik do napięcia ***U*** przyłożonego na jego końcach.

$$\boldsymbol{I = \frac{U}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R}} \qquad \text{a więc} \qquad \boldsymbol{R = \frac{U}{I}}$$

gdzie ***R*** oznacza współczynnik proporcjonalności zwany oporem elektrycznym przewodnika.
Równanie ostatnie przedstawia matematyczny zapis prawa Ohma.

Prawo Ohma mówi, że stosunek napięcia *U* między dwoma punktami przewodnika do natężenia *I* przepływającego przezeń prądu jest wielkością stałą zwana oporem elektrycznym (*R*) i nie zależy ani od napięcia *U*, ani od natężenia I prądu.

Opór elektryczny *R* (zwany też rezystancją) wyrażany jest w omach [Ω].

Opór przewodnika *R* równa się 1 omowi, jeżeli niezmienne napięcie *U* równe 1 woltowi istniejące na końcach przewodnika wywołuje w nim prąd *I* o natężeniu 1 ampera:

$$[\Omega] = \frac{[V]}{[A]}.$$

W praktyce najczęściej stosujemy:

kiloom	kΩ = 10^3 Ω	miliom	mΩ= 10^{-3} Ω
megaom	MΩ = 10^6 Ω	mikroom	$\mu\Omega$ = 10^{-6} Ω

Odwrotność oporu elektrycznego przewodnika nosi nazwę **przewodności elektrycznej (**lub **konduktancji)**.
Jednostką przewodności jest **simens** [S].

$$[S] = \frac{[A]}{[V]}.$$

Opór właściwy i przewodnictwo właściwe

Opór danego przewodnika zależy od jego wymiarów i jest on wprost proporcjonalny do jego długości $\boldsymbol{l}$ i odwrotnie proporcjonalny do przekroju poprzecznego $\boldsymbol{S}$ przewodnika

$$\boldsymbol{R = \rho \frac{l}{S}}$$

Współczynnik ρ nosi nazwę **oporu właściwego**; charakteryzuje on elektryczne własności materiału.
Ze wzoru wynika, że jednostką oporu właściwego jest $[\Omega \cdot \mathrm{m}]$.

Ze względu na opór właściwy ciała dzieli się umownie na następujące grupy:

- metale, będące bardzo dobrymi przewodnikami (opór właściwy ρ rzędu $10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$),
- półprzewodniki (ρ rzędu $10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$),
- elektrolity (ρ rzędu $10^{-1}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$) oraz
- izolatory (ρ rzędu $10^{10}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$).

Odwrotność oporu właściwego przewodnika nosi nazwę **przewodności elektrycznej właściwej** (lub **konduktywności**):

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Jednostką konduktywności jest **siemens na metr** [S/m].

Prawo Ohma jest ściśle słuszne tylko wtedy, jeśli dany przewodnik znajduje się w stałej temperaturze. Ponieważ przepływający prąd wydziela w przewodniku ciepło, temperatura jego wzrasta i opór zmienia się. O fakcie tym należy pamiętać stosując prawo Ohma.

Zależność oporu od temperatury dla przewodnika wyraża się w przybliżeniu wzorem:

$$\boldsymbol{R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]}$$

gdzie $\boldsymbol{R_0}$ – opór w temperaturze odniesienia $\boldsymbol{T_0}$ (zwykle 273 K), zaś α – tzw. temperaturowy współczynnik oporu.

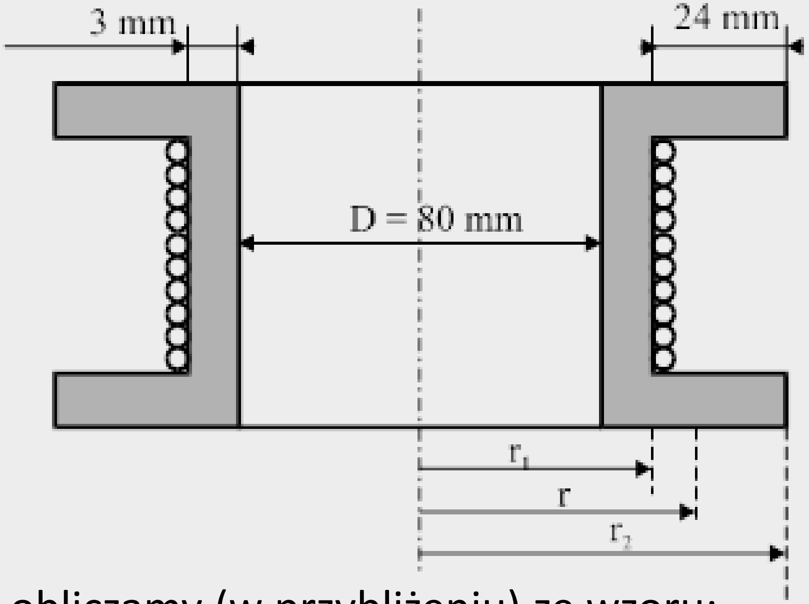
Temperaturowe współczynniki oporu elektrycznego

Rodzaj materiału	α [1/K]	Rodzaj materiału	α [1/K]
Srebro	$3{,}6\cdot10^{-3}$	Manganin	$0{,}01\cdot10^{-3}$
Miedź	$3{,}9\cdot10^{-3}$	Konstantan	$0{,}005\cdot10^{-3}$
Glin	$4{,}0\cdot10^{-3}$	Rtęć	$0{,}9\cdot10^{-3}$
Cynk	$3{,}8\cdot10^{-3}$	Wolfram	$4{,}1\cdot10^{-3}$
Żelazo	$4{,}5\cdot10^{-3}$	Węgiel	$0{,}8\cdot10^{-3}$

Prawo Ohma stosuje się do wszystkich ciał jednorodnych i izotropowych przy niewielkich napięciach i natężeniach prądu.

Przykład 9.1.

Oblicz opór elektryczny cewki, składającej się z n = 900 zwojów izolowanego drutu miedzianego o średnicy d = 1 mm (w izolacji 1,2 mm) w temperaturze t = 60 ^{o}C. Wymiary cewki przedstawione są na rysunku.



Rozwiązanie:

Wychodzimy ze wzoru:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

gdzie: R – opór cewki w temperaturze pokojowej (t = 20^{o}C),

$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$ - opór właściwy miedzi,

l – długość nawiniętego na cewkę drutu miedzianego,

$S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$ – pole przekroju poprzecznego drutu.

Z powodu braku danych co do długości cewki, długość l nawiniętego na cewkę drutu obliczamy (w przybliżeniu) ze wzoru:

$$l = n \cdot l'$$

gdzie: l' – to średnia długość jednego zwoju, $l' = 2\pi r$, a r – to średnia wartość promienia zwoju, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$

Z rysunku wynika, że $r_1 = 40 + 3 = 43\ \mathrm{mm} = 0.043\ \mathrm{m}$

$$r_2 = 40 + 3 + 24 = 67\ \mathrm{mm} = 0.067\ \mathrm{m}$$

Stąd

$$r = \frac{0{,}043 + 0{,}067}{2} = \frac{0{,}110}{2} = 0{,}055\ \mathrm{m}$$

zatem $\quad l = n \cdot 2\pi r \quad$ i

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \frac{4 \cdot n \cdot 2\pi r}{\pi d^2} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m} \cdot \frac{4 \cdot 900 \cdot 2 \cdot 0{,}055\ \mathrm{m}}{0.000001\ \mathrm{m}} = 6{,}73\ \Omega$$

Opór elektryczny cewki R_t w temperaturze t = 60°C obliczamy wg wzoru

$$R_t = R[1 + \alpha(T - T_o)]$$

gdzie: $\alpha = 3{,}9 \cdot 10^{-3} [1/K]$ - temperaturowy współczynnik oporu miedzi (patrz tabela)

$T_o = (273{,}16 + 20)[K]$ - temperatura pokojowa,

$T = (273{,}16 + 60)[K]$ - temperatura dla której wyznaczamy R_t.

$$R_t = 6{,}73\ \Omega \left[1 + 3{,}9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 40\ \mathrm{K}\right] = 7{,}78\ \Omega$$

<u>Odpowiedź:</u>

Opór elektryczny cewki, który w temperaturze pokojowej (t = 20°C) wynosił R = 6,73 Ω, wzrósł do wartości R_t = 7,78 Ω w temperaturze t = 60°C.

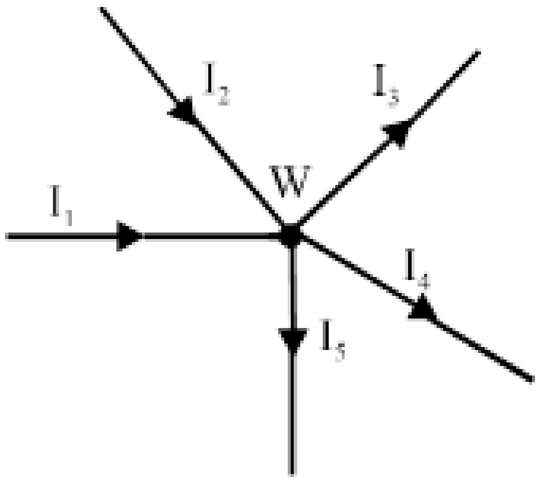
9.2. Prawa Kirchhoffa

Prawa Kirchhoffa zostały sformułowane w 1847 roku:

Pierwsze prawo Kirchhoffa mówi, że w dowolnym punkcie W obwodu (w węźle) suma natężeń prądów stałych wpływających do węzła i wypływających z tego węzła równa się zeru.

Natężenie prądów wpływających do węzła uważamy za dodatnie, natężenie prądów wypływających za ujemne. Innymi słowy, w żadnym punkcie obwodu ładunki się nie gromadzą, nigdzie też nie giną, ani nie powstają (zasada zachowania ładunku). Ile ładunków do węzła dopływa, tyle w tym samym czasie z niego odpływa:

$$\sum_{i=1}^{n} I = 0$$



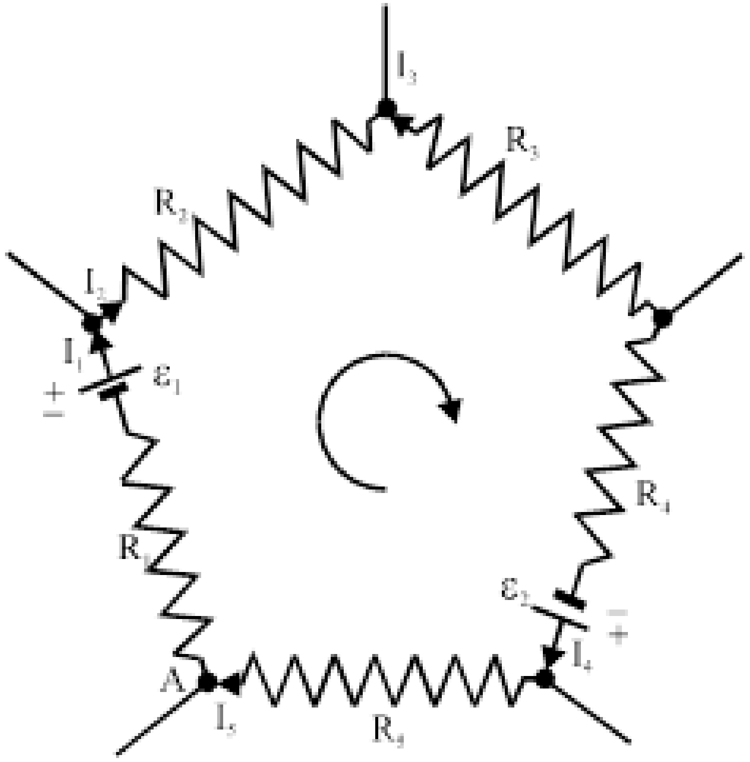
Pierwsze prawo Kirchhoffa dla węzła W przedstawionego na rysunku ma postać:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

Drugie prawo Kirchhoffa mówi, że w dowolnej wydzielonej zamkniętej części obwodu elektrycznego, w tzw. oczku, suma algebraiczna sił elektromotorycznych i napięć elektrycznych na wszystkich elementach oczka równa się zeru.

Bierzemy tu pod uwagę wszystkie czynne siły elektromotoryczne (SEM) $\mathcal{E}$, jak również wszystkie istniejące w tej części obwodu spadki napięć ***IR***.

$$\sum U = \sum \varepsilon + \sum IR$$



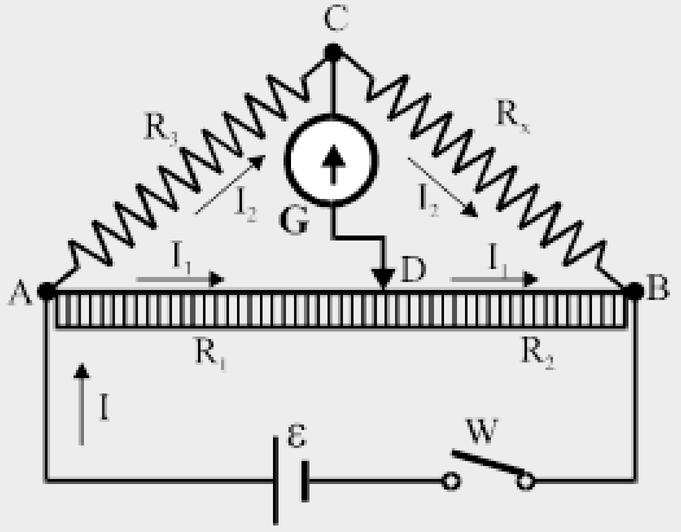
Drugie prawo Kirchhoffa dla tego oczka ma postać

$$I_1R_1 + I_1 R_{1w} - E_1 + I_2R_2 - I_3R_3 + I_4R_4 + I_4R_{w2} - E_2 + I_5R_5 = 0$$

Przy zastosowaniu wzoru $\sum \boldsymbol{U} = \sum \boldsymbol{\varepsilon} + \sum \boldsymbol{IR}$ trzeba pamiętać o regule znaków, przypisującej znaki plus lub minus iloczynom IR oraz siłom elektromotorycznym źródeł prądu. Dowolny węzeł oczka (np. punkt A na rysunku) przyjmujemy za punkt początkowy obiegu i w środku oczka zaznaczamy wybrany dowolnie kierunek obiegu, np. zgodnie z ruchem wskazówki zegara. Na tych odcinkach oczka, gdzie kierunek prądu jest zgodny z wybranym kierunkiem obiegu, iloczyn ***IR*** traktujemy jako dodatnie (np. $+I_1R_1$, lecz $-I_3R_3$). Siłom elektromotorycznym przypisujemy znak plus, gdy kierunek od bieguna dodatniego do ujemnego jest zgodny z wybranym kierunkiem obiegu. A zatem w odniesieniu do obwodu z rysunku wartościom ε_1 i ε_2 przypisujemy znak (–).

Przykład 9.2.

Wyprowadzić warunek równowagi mostka Wheatstone'a (przyrządu do pomiaru nieznanego oporu R_x), którego schemat przedstawiono na rysunku.



Rozwiązanie:

Obwód mostka składa się ze źródła napięcia ε, reochordu AB czyli drutu oporowego o stałym przekroju *S* rozciągniętego na tle podziałki liniowej (linijki) od A do B, opornika wzorcowego R_3, opornika o oporze badanym R_x, galwanometru G, suwaka na reochordzie D, klucza W oraz przewodów łączących.

Przy włączonym kluczu W, na drucie oporowym AB (na reochordzie) można znaleźć taki punkt D, w którym potencjał $V_D = V_C$. Doświadczalnie znajdujemy położenie tego punktu przesuwając ruchomy suwak wzdłuż reochordu do takiego położenia, aby wskazówka galwanometru G włączonego między punktami C i D nie odchylała się od zera.

Takie zachowanie wskazówki galwanometru świadczy o tym, że między punktami C i D nie ma różnicy potencjałów (czyli $V_D = V_C$ a więc prąd między tymi punktami nie płynie).

W punktach A i B mamy węzły obwodu. W węźle A prąd *I* płynący od źródła dzieli się na prąd I_1 płynący przez drut reochordu AB, i prąd I_2 płynący przez oporniki R_3 i R_x.

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchoffa mamy:

$$I = I_1 + I_2$$

Stosując drugie prawo Kirchoffa odpowiednio dla oczka ACD i DCB otrzymujemy:

$$I_2R_3 = I_1R_1$$
$$I_2R_x = I_1R_2$$

Stąd (dzieląc stronami powyższe równania):

$$\frac{R_3}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}$$

Pamiętając o pierwszym prawie Ohma możemy zapisać:

$$R_1 = \rho\frac{l_1}{S} \qquad \text{i} \qquad R_2 = \rho\frac{l_2}{S}$$

więc

$$\boldsymbol{R_x = R_3 \cdot \frac{l_2}{l_1}}$$

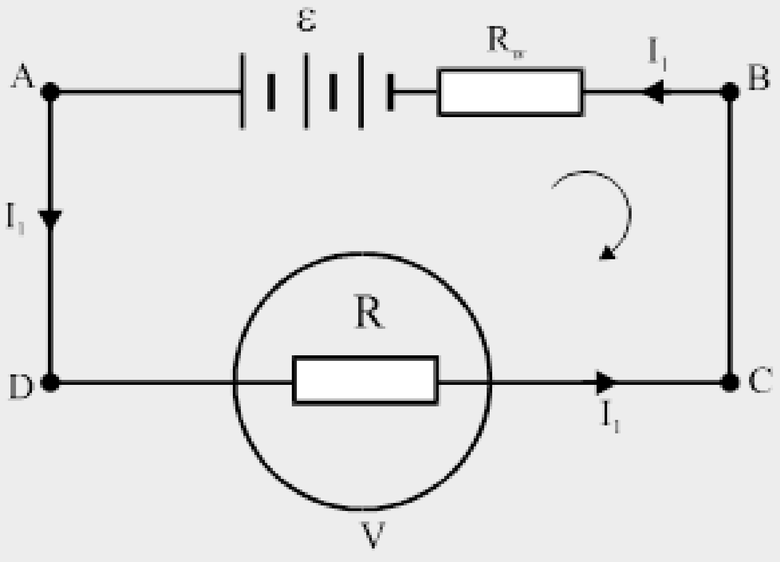
gdzie l_1 i l_2 są odległościami AD i DB drutu oporowego, odczytanymi bezpośrednio na skali podziałki liniowej reochordu.

Jak widzimy pomiar oporu metodą mostka Wheatstone'a jest pomiarem względnym, wymaga bowiem znajomości oporu wzorcowego R_3. W zasadzie mierząc długości l_1 i l_2 otrzymujemy dane potrzebne do ustalenia stosunku R_x do R_3.

Odpowiedź: Warunek równowagi mostka zachodzi dla takiego ustawienia suwaka na reochordzie, że $\frac{R_3}{R_x} = \frac{l_1}{l_2}$.

Przykład. 9.3.

Bateria akumulatorów o oporności wewnętrznej $R_w = 0{,}5\,\Omega$ ma siłę elektromotoryczną ε = 220 V. Oblicz napięcie U_1 na zaciskach baterii mierzone woltomierzem o oporności R = 5000 Ω oraz napięcie U_2 (mierzone tym samym woltomierzem) przy poborze z baterii prądu o natężeniu I = 24 A.



Rozwiązanie:

Natężenie prądu I_1 płynącego przez woltomierz obliczamy z drugiego prawa Kirchoffa dla oczka ABCD.

$$I_1 R_w + I_1 R = \varepsilon; \qquad I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_W}$$

Stąd napięcie U_1 na zaciskach A i B baterii:

$$U_1 = I_1 R_1 = \varepsilon - I_1 R_w$$

$$U_1 = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{R_1 + R_w} \cdot R_w = \varepsilon\left(1 - \frac{R_w}{R_1 + R_w}\right)$$

$$U_1 = 220V\left(1 - \frac{0{,}5\,\Omega}{5000\,\Omega + 0{,}5\,\Omega}\right) = 220 \cdot 0{,}9999\,V \approx 220\,V.$$

Widzimy, że napięcie U_1 mierzone przez woltomierz będzie tym bliższe wartości siły elektromotorycznej ε bateri im większy będzie opór wewnętrzny R woltomierza.

Po włączeniu obciążenia zewnętrznego pobierającego prąd o natężeniu I =24 A napięcie U_2 na zaciskach AB wyniesie:

$$U_2 = \varepsilon - IR_w$$

$$U_2 = 220V - 24\,A \cdot 0{,}5\,\Omega = 220\,V - 12\,V = 208\,V$$

Odpowiedź: Przy obciążeniu baterii napięcie U_2 na jej biegunach jest znacznie mniejsze od siły elektromotorycznej ε.