7. Ruch drgający i falowy

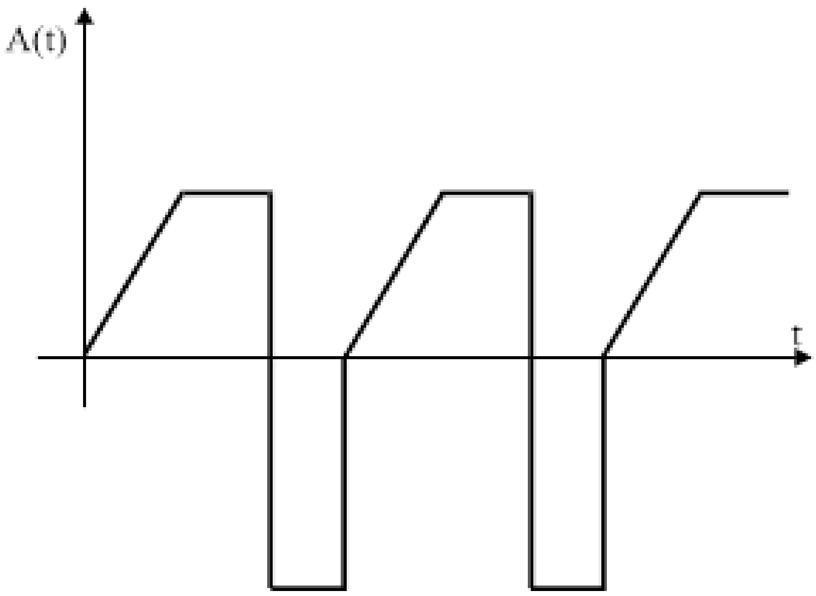
7.1. Ruch harmoniczny
7.2. Drgania wymuszone
7.3. Fale
7.4. Interferencja fal

Ruch drgający

Ruch w przyrodzie jest zjawiskiem powszechnym. Wszystkie obserwowane w przyrodzie ruchy dzielimy na dwie klasy:

- oscylacje (tzw. drgania) – gdy poruszający się obiekt pozostaje w pobliżu ustalonego miejsca – punktu równowagi. Przykłady takich drgań to: ciężarek na sprężynie, wahadło matematyczne, ruch elektronów w atomach, ruch fotonów między zwierciadłami lasera;
- fale – gdy obserwowane zjawisko (zaburzenie stanu materii lub pola) przemieszcza się w przestrzeni: np. fale morskie, fale akustyczne (przemieszczanie się zagęszczeń powietrza, ruch odkształcenia biegnącego wzdłuż napiętej liny).

Ruchem drgającym, lub wprost drganiami nazywamy dowolne zjawisko fizyczne (każdy ruch lub zmianę stanu) charakteryzujące się powtarzalnością w czasie wielkości fizycznej **A(t)** opisującej ten proces.



Ze względu na opisujący „drgający” parametr **A(t)** drgania możemy podzielić na:

- mechaniczne: zmieniają się współrzędne opisujące położenie ciała;
- elektryczne: zmienia się np. napięcie U(t) lub ładunek Q(t) na kondensatorze obwodu RLC;
- elektromagnetyczne: drgają pola elektryczne i magnetyczne. Zmieniają się wektory $\vec{E}(t)$ i $\vec{B}(t)$ opisujące te pola.

7.1. Ruch harmoniczny

Wśród szerokiej klasy drgań możemy wyróżnić **drgania harmoniczne**.

Drgania harmoniczne to takie drgania, w których wielkość charakteryzująca dany układ zmienia się z czasem sinusoidalnie lub cosinusoidalnie: $\boldsymbol{A(t) = A_o\, cos(\omega t + \varphi_o)}$.

Drgania harmoniczne charakteryzuje:

- **okresowość**; tzn. istnieje taki stały odstęp czasu T (zwany okresem drgań), że dla dowolnego czasu t zachodzi związek:

$$A(t) = A(t + T);$$

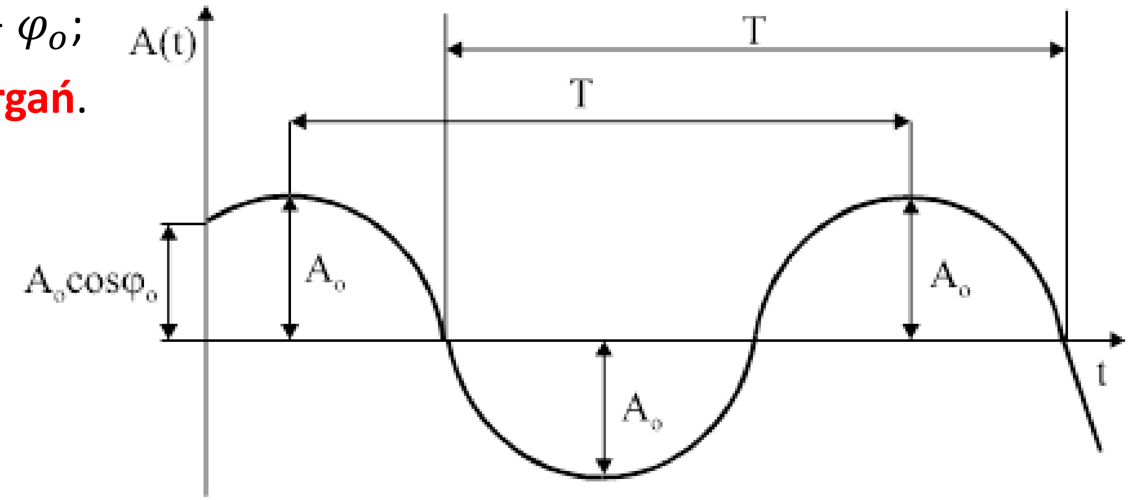
- **częstotliwość drgań** - wielkość określająca liczbę drgań w ciągu jednostki czasu $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (hercach - $1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$);
- **częstość kątowa** lub **pulsacja drgań** - $\omega = \frac{2\pi}{T}$;
- **faza drgań** - argument funkcji cosinus (lub sinus) $\varphi(t) = \omega t + \varphi_o$;
- stałość maksymalnego „wychylenia” A_o zwanego **amplitudą drgań**.

Inaczej ruch harmoniczny można zdefiniować jako taki ruch, w którym siła ***F(t)*** działająca na układ drgający jest wprost proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie do tego wychylenia skierowana:

$$\boldsymbol{F(t) = m \cdot a = -m\omega^2 A(t)}$$

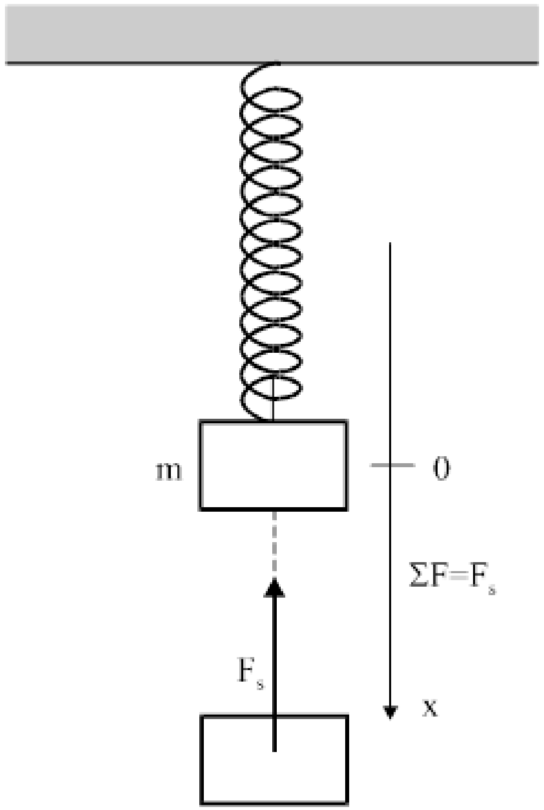
czyli

$$\boldsymbol{a = -\omega^2 A(t)}$$



Wykres przedstawia drgania harmoniczne z fazą początkową φ_o różną od zera, amplitudą A_o i okresem T

Drgania swobodne



Niech na sprężynie będzie zaczepiona masa ***m***, tak jak pokazano na rysunku.
Gdy wychylamy ciało o masie ***m*** z położenia równowagi o wartość ***x*** to na układ działa siła sprężystości $\boldsymbol{F_s}$:

$$\boldsymbol{F_s = -kx}.$$

Siła sprężystości $\boldsymbol{F_s}$ jest wprost proporcjonalna do wychylenia x i przeciwnie do niego skierowana. Współczynnik proporcjonalności ***k*** nazywany jest zwykle współczynnikiem sprężystości lub stałą siłową sprężyny. Współczynnik sprężystości $(|k| = F/x)$ mówi nam jaka siła jest potrzebna do wydłużenia sprężyny o jednostkę długości i ma wymiar [N/m].
Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$F = ma \quad \text{więc} \quad ma = -kx$$

Rozwiązaniem takiego równania jest funkcja typu

$$x(t) = A_o\, cos(\omega t + \varphi_o)$$

Jeżeli znamy stałą siłową k sprężyny i masę m ciała zawieszonego na tej sprężynie, to możemy obliczyć częstość kątową ω_o drgań własnych układu: $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

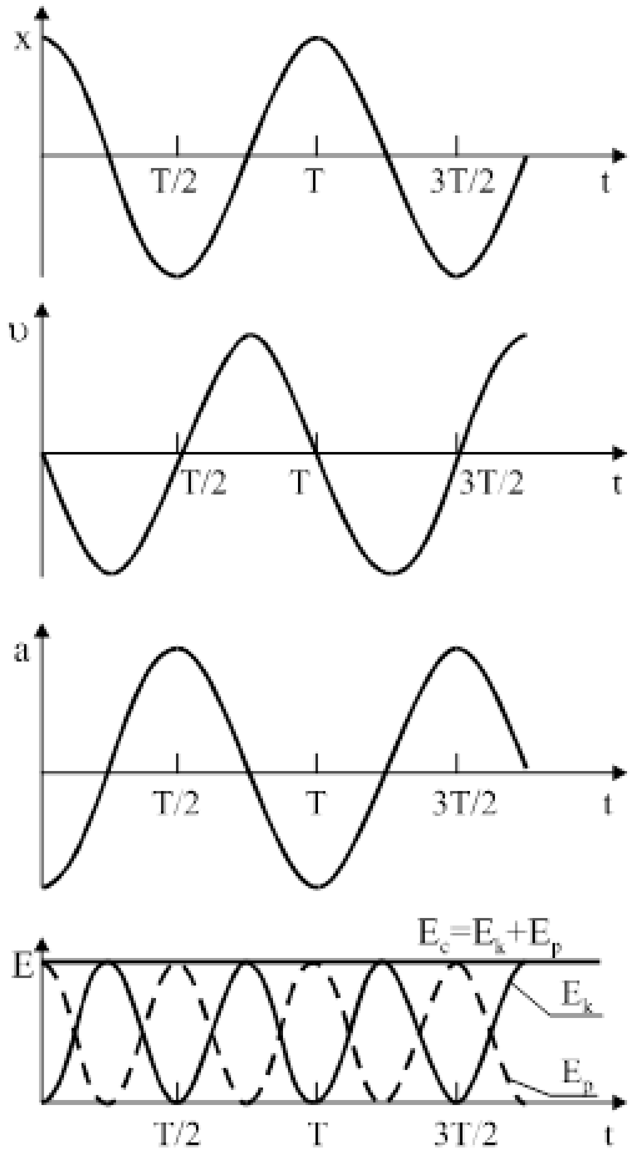
Drgania swobodne (własne) są zatem drganiami harmonicznymi opisanymi funkcją:

$$x(t) = A_o\, cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

Punkt materialny wykonujący drgania harmoniczne opisane powyższym równaniem nosi nazwę oscylatora harmonicznego nietłumionego. Amplituda A_o i faza początkowa φ_o drgań swobodnych zależą od sposobu pobudzania układu do drgań.

Energia drgań

W ruchu harmonicznym energia potencjalna i kinetyczna punktu wykonującego drganie zmieniają się w taki sposób, że ich suma pozostaje stała. Jest to zgodne z zasadą zachowania energii mechanicznej, gdyż w przypadku drgań swobodnych straty energii mechanicznej nie występują.



Na rysunku pokazano zależność x(t), v(t), a(t), E_k(t) i E_p(t) dla drgań swobodnych:

wychylenie $x(t) = A_o\cos(\omega_o t)$

prędkość $v(t) = -A_o\,\omega_o \sin(\omega_o t)$

przyspieszenie $a(t) = -A_o \omega_o{}^2 \cos(\omega_o t)$

energia kinetyczna $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_o{}^2 A_o{}^2 \sin^2(\omega_o t)$

energia potencjalna $E_p = \frac{1}{2}m\omega_o{}^2 A_o{}^2 \cos^2(\omega_o t)$

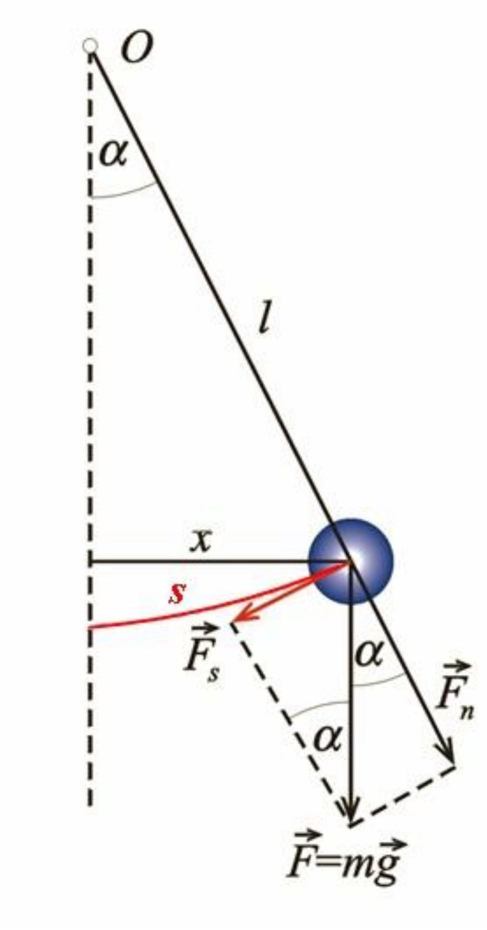
całkowita energia mechaniczna

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega_o{}^2 A_o{}^2[\sin^2(\omega_o t) + \cos^2(\omega_o t)] = \frac{1}{2}m\omega_o{}^2 A_o{}^2 = const.$$

bo $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Zwróćmy uwagę, że wykres v(t) jest przesunięty w stosunku do wykresu x(t) o $\pi/4$; to samo dotyczy wykresu a(t) w stosunku do wykresu v(t). Mówimy, że między prędkością a wychyleniem oraz między przyspieszeniem, a prędkością występuje przesunięcie fazowe równe $\pi/4$.

Wahadło matematyczne



Wahadło matematyczne jest to mały ciężarek zawieszony na cienkiej, nierozciągliwej nici o długości l. Ciężarek porusza się po łuku okręgu, wiec miarą jego wychylenia z położenia równowagi jest długość łuku s. Składowa siły ciężkości $\overrightarrow{F_s}$ jest skierowana wzdłuż tego łuku.
Dla małych kątów przyjmujemy, że wychylenie punktu liczone po łuku s jest równe długości x poziomego odcinka (przybliżenie to jest tym lepsze, im kąt wychylenia α jest mniejszy).
Czyli siłę F_s możemy zapisać jako:

$$F_s = mgsin\alpha = mg\frac{x}{l} \approx mg\frac{s}{l}$$

Widzimy, że siła ta jest skierowana „do środka” i jest proporcjonalna do wychylenia. Możemy więc zapisać $\quad F_s = -\frac{mg}{l}s$

Porównując tą zależność z $\;F = -kx\;$ widzimy, że: $\quad k = \frac{mg}{l}$

Dla drgań harmonicznych swobodnych: $\quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Czyli okres drgań wahadła matematycznego wynosi:

$$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Jak widać okres drgań wahadła matematycznego nie zależy ani od masy ani od amplitudy drgań (pamiętamy o założeniu małych wychyleń).
Za pomocą wahadła matematycznego możemy doświadczalnie wyznaczyć przyśpieszenie ziemskie g mierząc okres drgań wahadła: $\boldsymbol{g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}}$.

Przykład 7.1.

Rura o przekroju S = 0,3 cm^2 zgięta w kształcie litery U wypełniona jest słupem cieczy o masie m = 121 g i gęstości ρ = 13,6 g/cm^3. Ciecz wytrącono z położenia równowagi. Czy drgania będą harmoniczne? Od czego zależy okres T drgań?

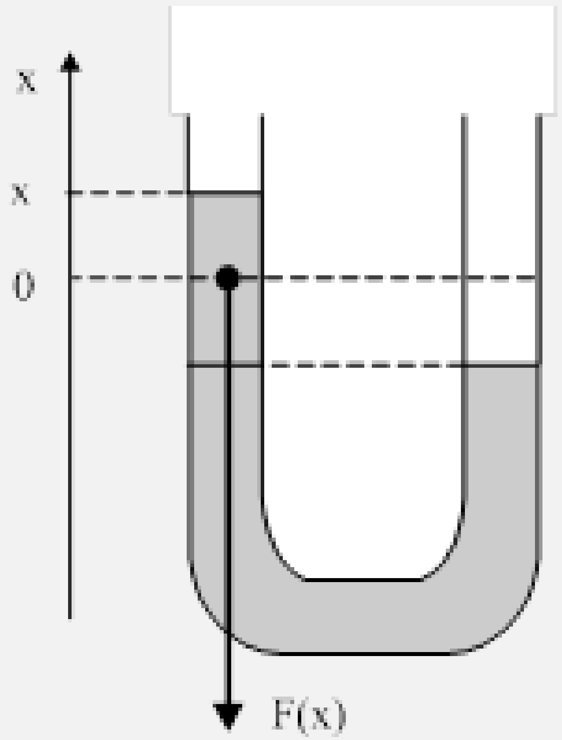
Rozwiązanie:

Gdy wytrącimy ciecz z równowagi o x to na całą masę m cieczy działa siła ciężaru nadmiaru słupa cieczy $F(x) = -2x \cdot S \cdot \rho \cdot g$ powodująca powrót cieczy do położenia równowagi. Stosując drugą zasadę dynamiki Newtona dla tego układu $m \cdot a = F(x)$ otrzymujemy:

$$m \cdot a = -2x \cdot S \cdot \rho \cdot g \qquad \text{czyli} \qquad a = -\frac{2 \cdot S \cdot \rho \cdot g}{m} \cdot x.$$

Widzimy, że równanie ruchu drgań słupa cieczy w U-rurce jest równaniem ruchu drgań harmonicznych o ogólnej postaci $\quad a = -{\omega_o}^2 A$

Porównując otrzymujemy $\boldsymbol{\omega_o} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2S\rho g}}{\boldsymbol{m}}}$, $\qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}121\ kg}{2 \cdot (0{,}3 \cdot 10^{-4})m^2 (13{,}6 \cdot 10^3)\ kg/m^3 \cdot 9{,}81 m/s^2}} \cong 0{,}8\ s$$

Odpowiedź:

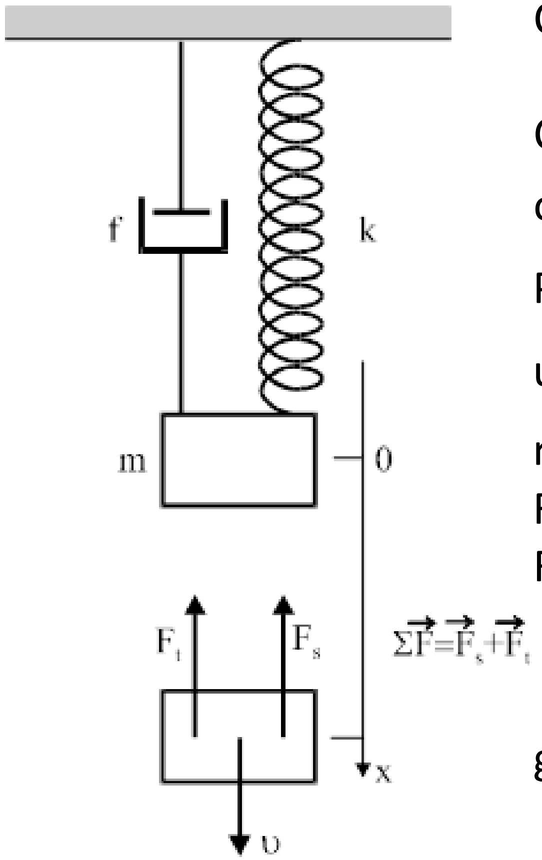
Drgania cieczy w U-rurce są harmoniczne i okres drgań zależy od masy cieczy, jej gęstości i średnicy U-rurki.

Drgania tłumione

Jeżeli drgania ciała odbywają się w ośrodku materialnym (np. w gazie, cieczy), to wskutek występowania siły oporu ośrodka, którą będziemy nazywać siłą tłumiącą, drgania będą zanikać. Niezależnie od natury ośrodka siła tłumiąca F_t jest proporcjonalna do prędkości v ciała drgającego (jeśli prędkość ta jest niewielka). Zatem

$$F_t = -bv$$

Współczynnik proporcjonalności ***b*** nazywa się współczynnikiem oporu ośrodka. Znak minus w powyższym wzorze uwzględnia fakt, że siła $\vec{\boldsymbol{F}}_t$ jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku ruchu (kierunku prędkości).



Czyli zgodnie z II zasadą dynamiki

$$\Sigma F = ma; \qquad F_s + F_t = ma$$

Czyli $-kx - bv = ma$ dzieląc równanie przez m

otrzymujemy $$a = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v$$

Pamiętając, że $\frac{k}{m} = \omega_o{}^2$ jest to częstość kątowa drgań własnych (czyli częstość z jaką drgałby układ gdyby nie było tłumienia) oraz oznaczając formalnie $\frac{b}{m} = 2\beta$

równanie nasze przyjmie postać: $$\boldsymbol{a = -\omega_0^2 x - 2\beta v}$$

Równanie to nosi nazwę **równania ruchu drgań harmonicznych tłumionych**.

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\boldsymbol{x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)}$$

gdzie: $\beta = \frac{b}{2m}$ to tzw. współczynnik tłumienia, a $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ to pulsacja drgań tłumionych.

Porównując wzór dla drgań swobodnych widzimy, że wskutek działania siły tłumiącej:

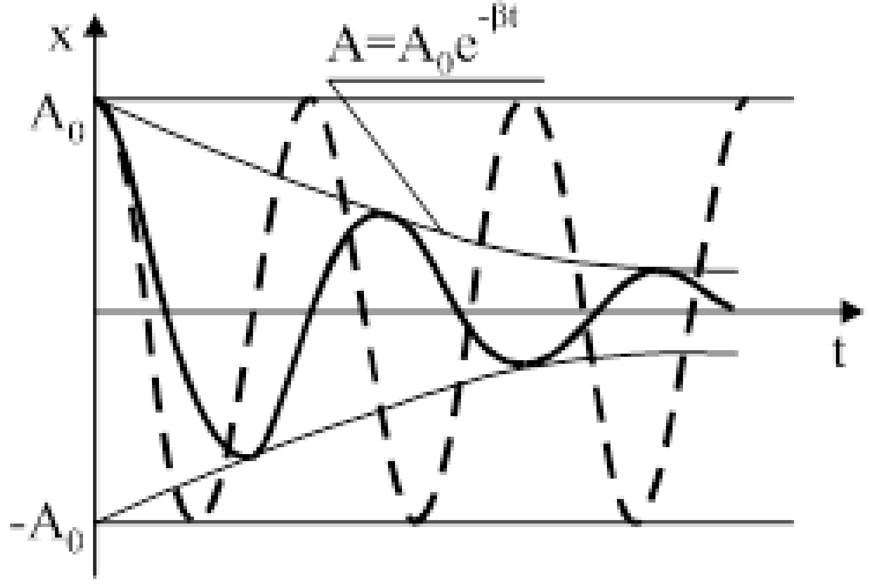
- amplituda drgań tłumionych maleje z upływem czasu według zależności

$$\boldsymbol{A = A_0 e^{-\beta t}};$$

- pulsacja drgań tłumionych jest mniejsza niż dla drgań swobodnych, bo siła tłumiąca spowalnia drgania

$$\boldsymbol{\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} < \omega_o}.$$

Na rysunku przedstawiono wykres drgań tłumionych ciała (linia ciągła) z naniesionym dla porównania z wykresem drgań swobodnych tego ciała (linia przerywana) oraz obwiednia pokazująca jak zmienia się w czasie amplituda drgań.



7.2. Drgania wymuszone

Jeżeli chcemy, aby opory ośrodka nie tłumiły drgań, to na drgający punkt materialny należy działać odpowiednio zmienną w czasie siłą. W przypadku drgań harmonicznych siła ta ma postać:

$$F_w = F_0 \cos \Omega t$$

Siłę tę nazywamy **siłą wymuszającą**.

$$\Sigma F = ma; \qquad F_s + F_t + F_w = ma$$

czyli

$$-kx - bv + F_0 \cos\Omega t = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v + \frac{F_0}{m}\cos\Omega t;$$

co można zapisać:

$$a = -\omega_0{}^2 x - 2\beta v + p_0 \cos\Omega t$$

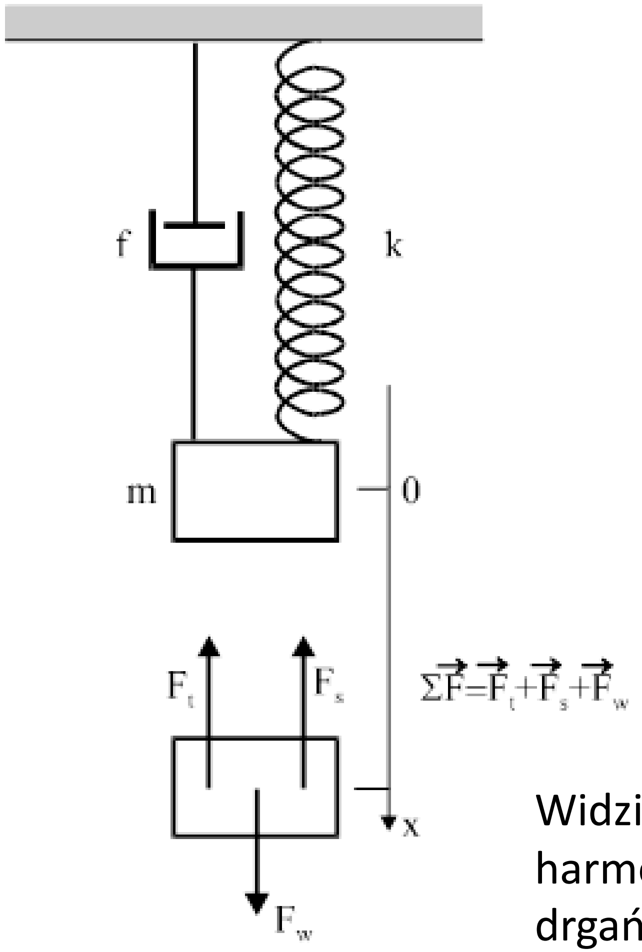
gdzie $p_o = \frac{F_o}{m}$ jest amplitudą znormalizowaną siły wymuszającej (przeliczoną na jednostkę masy).

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$x = A_o \cos(\Omega t + \varphi_o)$$

gdzie amplituda A_o i faza początkowa φ_0 ustalonego drgania wymuszonego mają postać:

$$A_o = \frac{p_o}{\sqrt{(\omega_o{}^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \qquad \varphi_o = arc\,tg\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_o{}^2 - \Omega^2}\right).$$

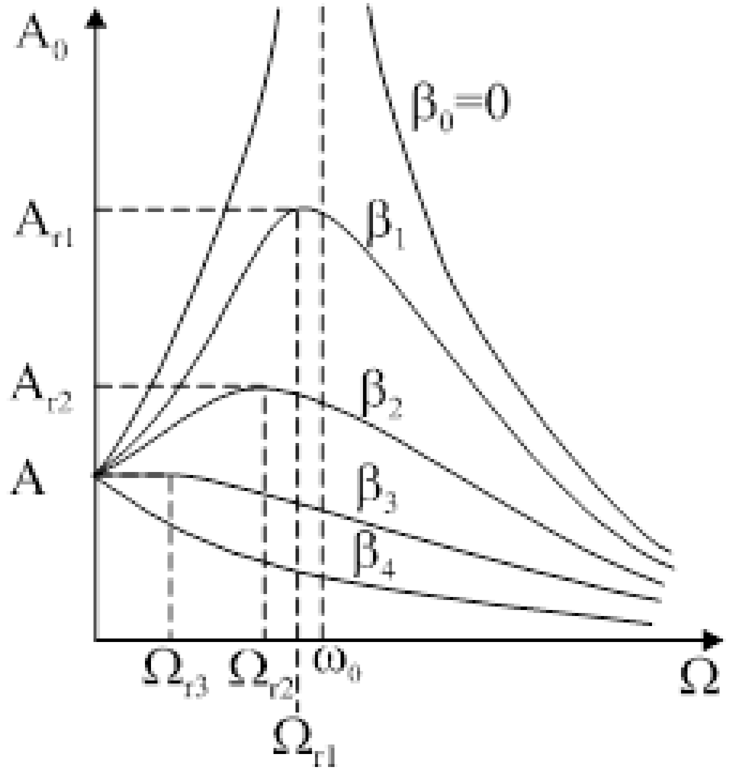


Widzimy więc, że w wyniku działania siły wymuszającej punkt materialny wykonuje drgania harmoniczne z pulsacją Ω, tzn. z taką pulsacją, z jaką zmienia się siła wymuszająca. Amplituda drgań wymuszonych jest ściśle określona i zależy od amplitudy siły wymuszającej p_o oraz od jej pulsacji Ω. Również początkowa faza drgania φ_0 zależy od pulsacji Ω.

Rezonans

Gdy siła wymuszająca działa na drgające ciało z częstością bliską częstości drgań własnych ($\Omega \approx \omega_0$), to amplituda drgań tego ciała może osiągnąć bardzo dużą wielkość nawet przy niewielkiej sile wymuszającej. **Zjawisko to nazywamy rezonansem**.

Wykres przedstawiający funkcję $A_o(\Omega)$ nazywamy krzywą rezonansową. Na rysunku przedstawiono krzywe rezonansowe dla różnych wartości współczynnika tłumienia β.



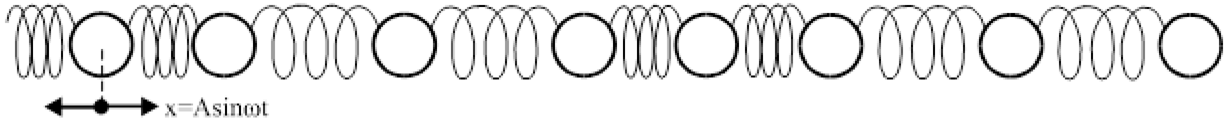
Z rysunku tego wynikają następujące wnioski:

- maksymalna wartość amplitudy A_r jest tym większa, im mniejszy jest współczynnik tłumienia β, a gdy $\beta \to 0$, to $A_r \to \infty$ (β_o na rysunku);
- jeżeli tłumienie jest słabe (β_1 i β_2 na rysunku) to A_r osiąga maksimum, gdy pulsacja Ω przyjmie wartości Ω_{r1}, Ω_{r2} nieco mniejsze od pulsacji drgań własnych ω_o. Im mniejsza jest wartość β, tym bardziej Ω_r zbliża się do wartości ω_o;
- przy bardzo silnym tłumieniu (β_3 i β_4 na rysunku) rezonans nie występuje; maksymalna amplituda drgań A_r jest osiągana, gdy Ω jest bliskie zera.

7.3. Fale

Większość wiadomości, jakie mamy o świecie zewnętrznym, dociera do naszej świadomości poprzez organa zmysłowe słuchu i wzroku za pośrednictwem fal. Informacje te dochodzą do obserwatora z pewnym opóźnieniem wynikającym ze skończonej prędkości światła i dźwięku.

Rozpatrzymy teraz sytuację, w której drgająca cząstka jest połączona poprzez siły sprężyste z innymi cząstkami. Wskutek działania między cząstkami sił sprężystych drgania będą przenosiły się od jednej cząstki do drugiej.



Z podobną sytuacją spotykamy się w ciałach stałych i gazach. Jako przykład rozpatrzmy gaz. Jeśli w pewnym miejscu sprężymy gaz, np. na skutek ruchu tłoka, to w obszarze tym znajdzie się więcej cząstek. Spowoduje to wzrost ciśnienia gazu i pojawienie się siły skierowanej w kierunku mniejszego ciśnienia (gęstości). Na skutek tego, tam gdzie gaz był zgęszczony, teraz ulegnie rozrzedzeniu i odwrotnie. Jeśli tłok będzie wykonywał ruch drgający, to w gazie będą rozprzestrzeniały się kolejne zgęszczenia i rozrzedzenia ośrodka.

Okazuje się, że proces przekazywania drgań z jednego punktu do drugiego jest zjawiskiem charakterystycznym nie tylko dla ośrodków sprężystych, ale również dla pola elektromagnetycznego. Drgania pola elektromagnetycznego wytwarzają falę elektromagnetyczną. W tym przypadku zmieniającymi się wielkościami są pola: elektryczne i magnetyczne. Charakterystyczną cechą takiego zaburzenia jest fakt, że może ono propagować się również w próżni.

Na podstawie licznych obserwacji fizycznych możemy powiedzieć, że **fale to nic innego jak rozchodzące się w przestrzeni zaburzenia stanu materii lub pola**. Wspólną cechą wszystkich zjawisk falowych jest zdolność przenoszenia przez falę energii, przy czym w procesie tym występuje w sposób ciągły okresowa zamiana energii jednego rodzaju na drugi rodzaj. Np. w przypadku fal sprężystych mamy ciągłą zamianę energii kinetycznej cząstek materii na energię potencjalną, a w przypadku fal elektromagnetycznych energia pola elektrycznego przechodzi w energię pola magnetycznego i na odwrót.

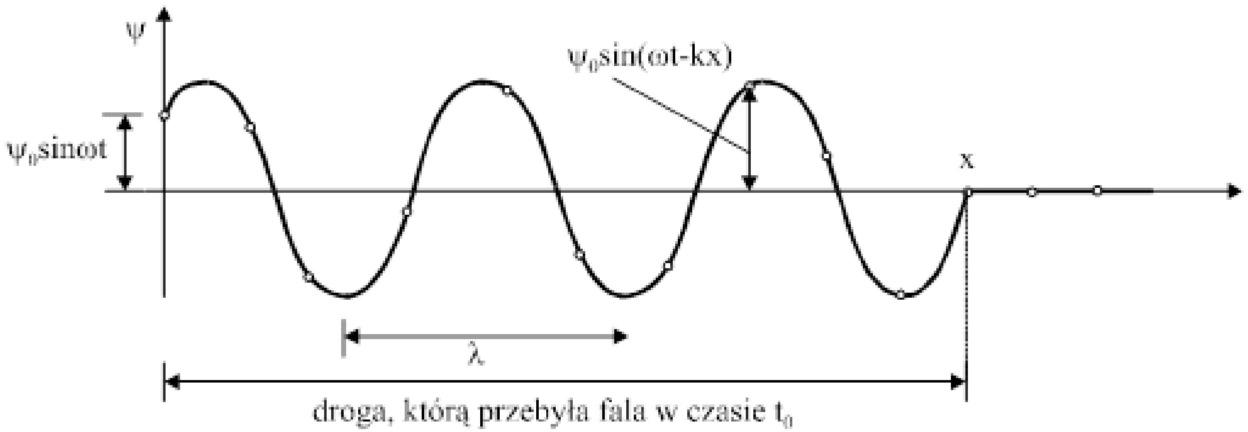
Wiemy już, że ruch falowy polega na rozchodzeniu się zaburzenia pewnej wielkości fizycznej charakteryzującej stan ośrodka. Do opisu tego zaburzenia będziemy posługiwać się wielkością ψ, która zależeć będzie od położenia i czasu.

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

Funkcja ψ *(x,y,z,t,)* to funkcja falowa opisująca rozchodzącą się w ośrodku falę.

W przypadku propagacji fali w cieczy lub gazie ψ będzie opisywało zmiany gęstości lub ciśnienia w ośrodku spowodowane przejściem fali. W przypadku ciał stałych ψ będzie przemieszczeniem atomów z położenia równowagi. Dla fali elektromagnetycznej jako funkcję ψ przyjmuje się natężenie pola elektrycznego lub magnetycznego.

Zajmiemy się najpierw opisem takiej fali, dla której ψ zależy tylko od jednej współrzędnej x i od czasu t: $\psi = \psi(x, t)$ oznaczanych często w postaci $y = y(x, t)$



Falę taką nazywamy falą płaską. Dobrym przykładem fali płaskiej może być fala akustyczna wytworzona prze tłok o dużej średnicy drgający w kierunku prostopadłym do swojej płaszczyzny.

Znajdziemy teraz postać funkcji falowej ψ fali płaskiej. Załóżmy, że źródło fali wykonuje ruch harmoniczny wokół punktu $x = 0$ oraz w chwili początkowej $\psi = 0$. Możemy więc zapisać:

$\psi = \psi_0 \sin \omega t,$ gdzie ω i ψ_0 są odpowiednio częstością i amplitudą drgań.

Równanie fali

Zaburzenie ośrodka wywołane ruchem tłoka przemieści się w przestrzeni i po czasie t_0 znajdzie się w punkcie o współrzędnej x. Drgania w tym punkcie będą opóźnione w stosunku do drgań źródła o wielkość $\Delta\varphi = \omega t_0$. Przyjmując, że amplituda drgań nie zmienia się, funkcja *ψ(x,t)* będzie miała postać:

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin \omega \,(t - t_0)$$

t_0 możemy zapisać w postaci

$$t_0 = \frac{x}{v}$$

gdzie υ jest prędkością rozchodzenia się (propagacji) fali, a ściślej prędkością przemieszczania się określonej fazy fali, czyli **prędkością fazową**.

Prędkość fazową będziemy nazywali dalej prędkością fali. Czyli możemy zapisać

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \omega \frac{x}{v}\right)$$

Ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, więc

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{T}\frac{x}{v}\right) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda = vT}$ jest **długością fali**, czyli odległością, na jaką przemieści się zaburzenie w czasie jednego okresu T. Wprowadźmy jeszcze pojęcie **liczby falowej *k*** zdefiniowanej jako

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Zatem równanie przyjmie postać

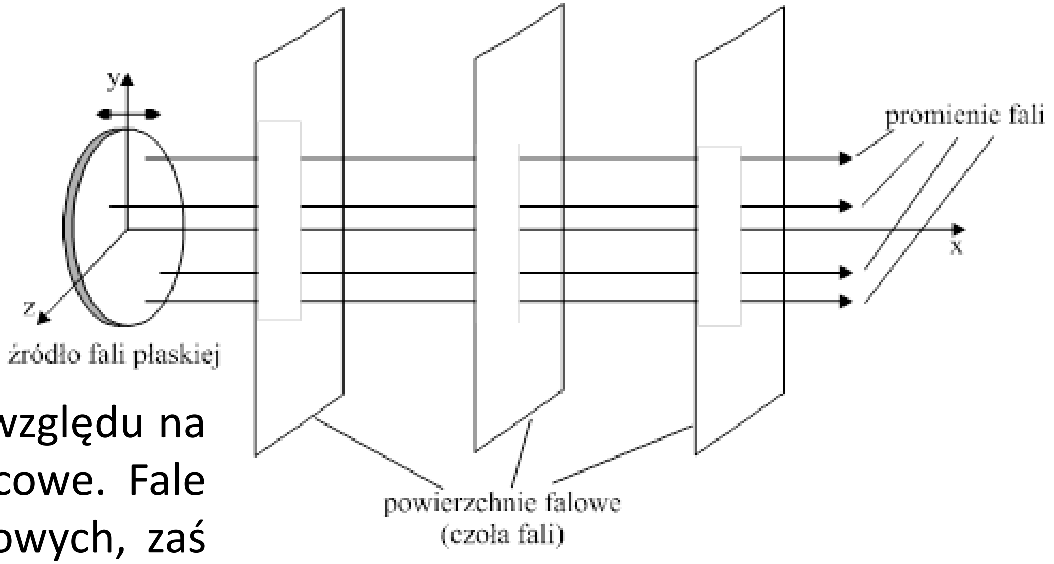
$$\boldsymbol{\psi(x,t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx)} \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{y(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx)}$$

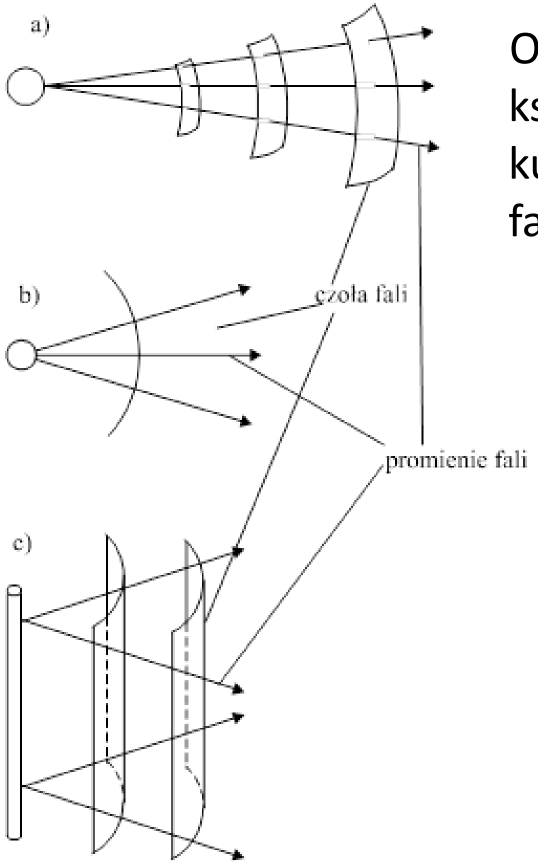
Zależności powyższe przedstawiają funkcje fali płaskiej. Argument funkcji sinus nazywamy fazą fali.

Zbiór punktów w przestrzeni, w których faza ma taką samą wartość, nazywamy **powierzchnią falową** lub **czołem fali**.

Rodzaje fal

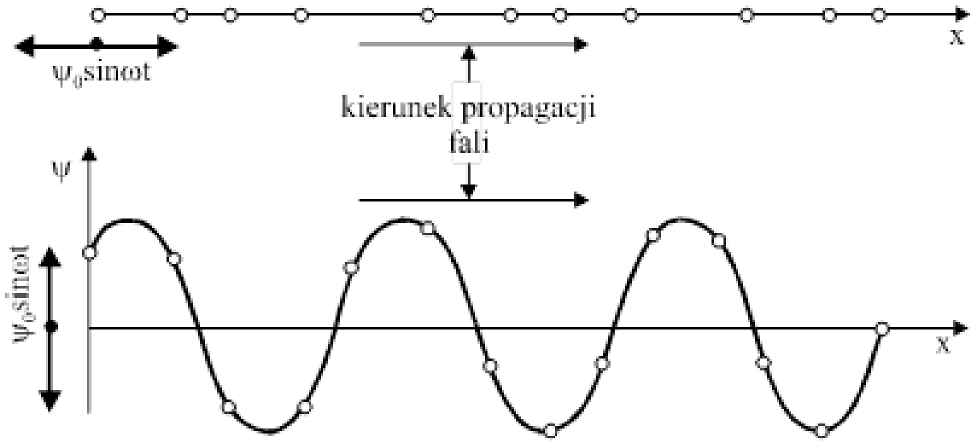
Dla fali płaskiej powierzchniami falowymi będą płaszczyzny $x = const.$
Powierzchni falowych jest nieskończenie wiele.
Linie, które w każdym punkcie są prostopadłe do powierzchni falowej, nazywamy promieniami fali. Wskazują one kierunek propagacji fali





Oprócz fal płaskich wyróżniamy jeszcze (ze względu na kształt czoła fali) fale kuliste, koliste i walcowe. Fale kuliste i koliste pochodzą od źródeł punktowych, zaś fale walcowe od źródeł liniowych.

W związku z kierunkiem, w jakim odbywają się drgania, fale dzielimy na:



podłużne – gdy kierunek drgań jest równoległy do kierunku propagacji fali,

poprzeczne – gdy kierunek drgań jest prostopadły do kierunku propagacji fali.

7.4. Interferencja fal

Interferencją fal nazywamy zjawisko nakładania się (superpozycji) dwóch lub więcej fal o tych samych długościach, a więc o tych samych pulsacjach.
Rozważmy dwie fale biegnące z taką samą prędkością w tym samym kierunku o równych amplitudach, lecz o różniących się fazach. Niech równania tych fal mają postać

$$\psi_1 = \psi_0 \sin(\omega t - kx) = \psi_0 \sin \varphi_1$$

$$\psi_2 = \psi_0 \sin(\omega t - kx + \Delta\varphi) = \psi_0 \sin \varphi_2$$

W danym punkcie przestrzeni fale te wywołują drgania równoległe o różnicy faz $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
Wypadkowe drgania można wyrazić równaniem:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 \sin \varphi_1 + \psi_0 \sin \varphi_2$$

$$\psi = \psi_0(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = 2\psi_0 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

$$\boldsymbol{\psi = 2\psi_0 \sin\left(\omega t - kx + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}.$$

Co możemy zapisać jako: $$\boldsymbol{\psi = A \sin\left(\omega t - kx + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

gdzie nowa amplituda jest zależna od różnicy faz: $\boldsymbol{A = 2\psi_0 \cos\frac{\Delta\varphi}{2}}$. Jak widać będzie miała ona określoną wartość tylko wtedy gdy $\cos\frac{\Delta\varphi}{2}$ będzie stały czyli różnica faz nakładających się fal będzie stała w czasie, fale takie nazywamy **spójnymi lub koherentnymi**.

Przykład 7.2.

Równanie drgań niegasnących dane jest w postaci y = 10 sin(0,5πt) [cm].

a) Znaleźć równanie fali, jeśli prędkość v rozchodzenia się drgań wynosi 300 m/s.

b) Napisać i przedstawić graficznie równanie drgań dla punktu odległego o x = 600 m od źródła drgań.

Rozwiązanie:

Równanie fali możemy zapisać

$$y(x,t) = A\,sin\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \qquad (1)$$

Równanie (źródła fali) drgań niegasnących ma postać

$$y(t) = 10\,sin(0{,}5\pi \cdot t) \qquad (2)$$

Równanie drgań punktu dla x=0, czyli źródła fali, opisane przez równanie fali (1) wynosi

$$y(0,t) = A\,sin\left(\omega t - \omega\frac{0}{v}\right) = A\,sin\,\omega\,t \qquad (3)$$

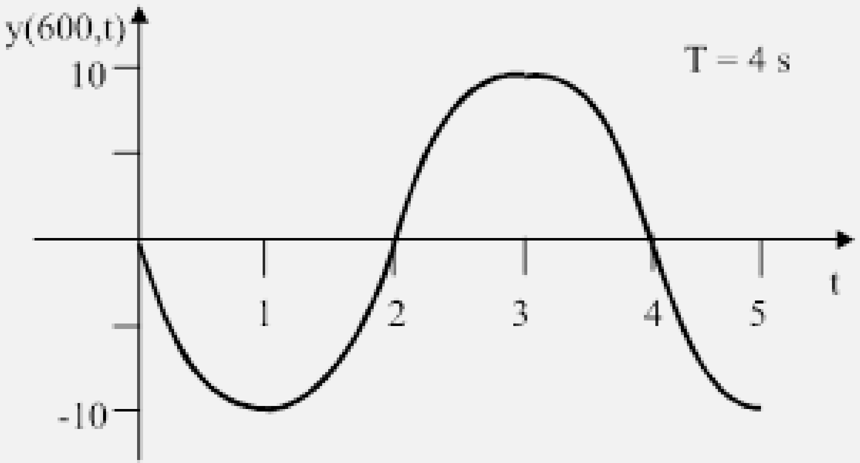
Porównując (2) i (3) zauważamy, że

A = 10 cm $\qquad \omega = 0{,}5\pi = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{s}$

Wiedząc, że $\omega = \frac{2\pi}{T}$ obliczamy T:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4\,s$ czyli **ogólne równanie fali ma postać:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = 10\,sin\frac{2\pi}{4}\left(t - \frac{x}{300}\right).}$$



Równanie drgań punktu dla x = 600 m ma postać:

$$y(600,t) = 10\,sin\frac{2\pi}{4}\left(t - \frac{600}{300}\right) = 10\,sin\left(\frac{2\pi}{2} \cdot t - \pi\right) = -10\,sin\frac{2\pi}{2}t.$$

Przykład 7.3.

Jaką różnicę faz $\Delta\varphi$ będą miały drgania dwóch punktów, znajdujących się w odległości x_1=10 m i x_2=16 m od źródła drgań. Okres drgań wynosi T = 0,04 s i prędkość rozchodzenia się drgań - υ =300 m/s.

<u>Rozwiązanie:</u>

Równanie fali ma postać

$$y(x,t) = A\,sin\,\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\,sin\,\varphi, \text{ gdzie } \varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$ - to faza drgań punktu (x, t).

$$y(x_1,t) = A\,sin[\varphi(x_1,t)] = A\,sin\,\omega\left(t - \frac{x_1}{\upsilon}\right)$$

$$y(x_2,t) = A\,sin[\varphi(x_2,t)] = A\,sin\,\omega\left(t - \frac{x_2}{\upsilon}\right)$$

Zatem różnica faz $\Delta\varphi = \varphi(x_2,t) - \varphi(x_1,t)$

$$\Delta\varphi = \omega\left(t - \frac{x_2}{\upsilon}\right) - \omega\left(t - \frac{x_1}{\upsilon}\right) = \omega\frac{x_1 - x_2}{\upsilon}$$

Ale $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Więc $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\frac{x_1 - x_2}{\upsilon} = \frac{2\pi(x_1 - x_2)}{\lambda}$

$$\lambda = \upsilon \cdot T = 300\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}04 = 12\,m$$

$$x_1 - x_2 = 10\text{ m} - 16\text{ m} = -6\text{ m}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(-6\text{ m})}{12\text{ m}} = -\pi$$

<u>Odpowiedź:</u> Różnica faz $\Delta\varphi$ drgań dwu punktów x_1 i x_2 wynosi $-\pi$.