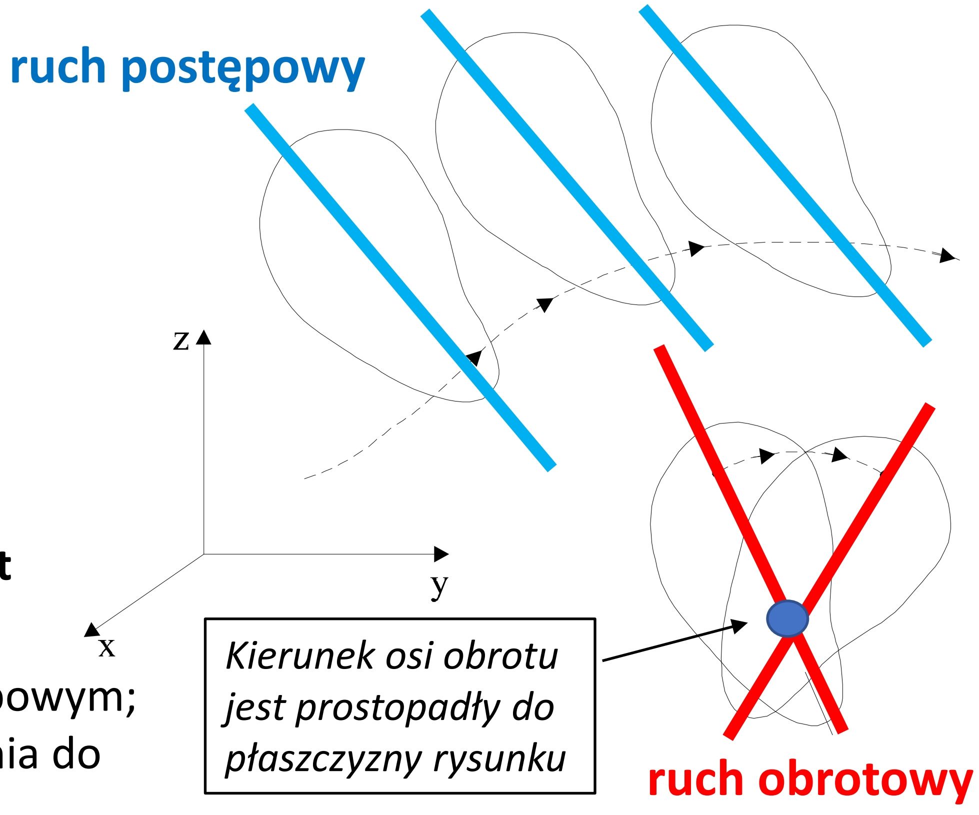
6. Ruch obrotowy

6.1. Ruch obrotowy jednostajny
6.2. Ruch obrotowy jednostajnie zmienny
6.3. Moment bezwładności ciała
6.4. Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Rodzaje ruchów

W dotychczasowych rozważaniach traktowaliśmy wszystkie otaczające nas ciała jako punkty materialne lub zbiory tych punktów. Jest to oczywiście uproszczenie, które w dalszych rozważaniach zastąpimy innym modelem ciała. W modelu tym rozważane ciało o masie m dzielimy w myśli na elementy o masach Δm tak małych, że można każdy z tych elementów traktować jako punkt materialny.

Wszystkie możliwe ruchy ciał dzielą się na trzy rodzaje:
ruch postępowy, ruch obrotowy i ruch złożony.



Ruchem postępowym ciała nazywamy taki ruch, w którym dowolna prosta przeprowadzona przez to ciało przesuwa się równolegle do samej siebie (wektory prędkości wszystkich punktów ciała są w danej chwili jednakowe).

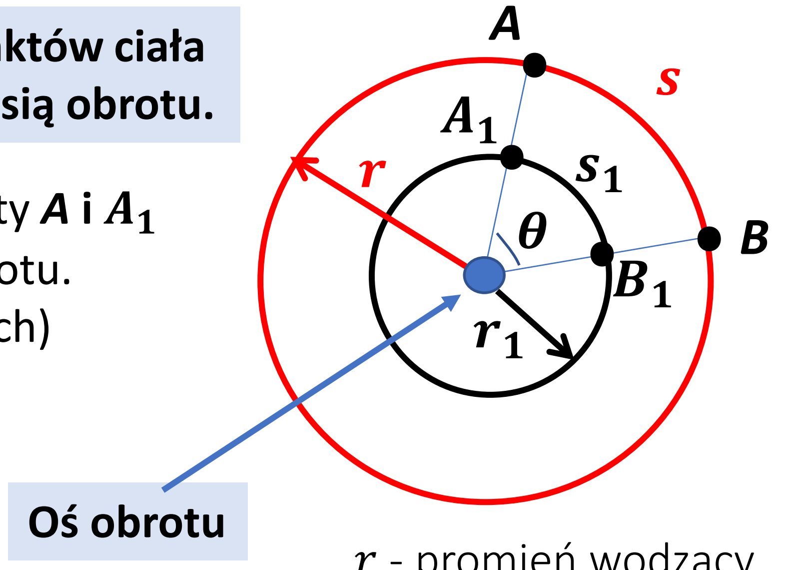
Ruchem obrotowym ciała nazywamy taki ruch, w którym wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach, których środki leżą na jednej prostej. Prostą tą nazywamy osią obrotu.

Każdy spotykany ruch jest ruchem postępowym lub obrotowym albo też jest ruchem złożonym z obydwu tych ruchów:

- ruch poruszającego się po jezdni samochodu możemy opisać ruchem postępowym;
- ruch obracającego się koła samochodu osadzonego na osi obrotu „urządzenia do wyważania kół samochodowych” możemy opisać ruchem obrotowym;
- ruch koła poruszającego się po jezdni samochodu złożony jest z ruchu obrotowego koła dookoła osi i ruchu postępowego osi koła względem jezdni.

6.1. Ruch obrotowy jednostajny

Ruchem obrotowym ciała nazywamy taki ruch, w którym torami wszystkich punktów ciała są okręgi współśrodkowe, a środki tych okręgów leżą na jednej prostej, zwaną osią obrotu.



- Drogi liniowe $\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{s_1}$ przebyte w jednakowym odstępie czasu $\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$ przez punkty ***A* i A_1** nie są jednakowe, ale są tym większe im większa jest ich odległość $\boldsymbol{r}$ od osi obrotu.
- Odpowiadający tym drogom kąt $\boldsymbol{\theta}$ obrotu ciała w czasie $\boldsymbol{t}$ (wyrażony w radianach) nazywamy drogą kątową. Kąt ten jest jednakowy nie tylko dla punktów ***A i A_1***, ale dla wszystkich punktów ciała biorących udział w ruchu ciała.

Stosując definicją miary łukowej kąta płaskiego, $\theta = \frac{s}{r}$, otrzymujemy:

r - promień wodzący
θ - droga kątowa
s - droga liniowa
ω - prędkością kątową

$$\boldsymbol{s = \theta \cdot r}$$

Droga liniowa *s* dowolnego punktu obracającego się ciała jest równa iloczynowi drogi kątowej $\boldsymbol{\theta}$ przez odległość $\boldsymbol{r}$ punktu od osi obrotu

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}}$$

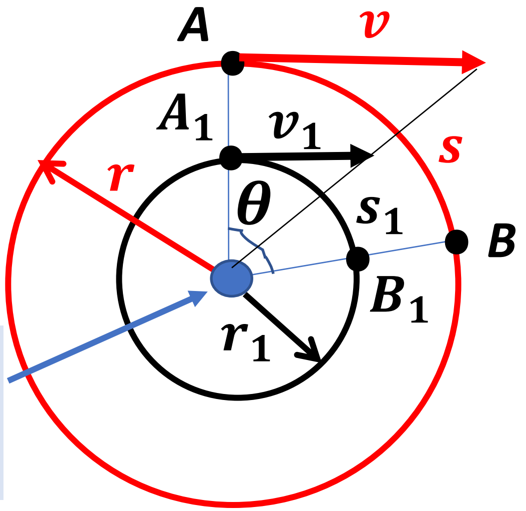
Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę $\left[\frac{rad}{s}\right] = \left[\frac{1}{s}\right]$

Stosunek drogi kątowej $\boldsymbol{\theta}$ do czasu $\boldsymbol{t}$, w którym została ona przebyta (zakreślona) nazywamy prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$:

- jeżeli $\omega = const$ to mamy ruch obrotowy jednostajny;
- jeżeli $\omega \neq const$ to mamy ruch obrotowy zmienny.

Ruch obrotowy jednostajny

Drogi liniowe $\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{s_1}$ (mierzone w jednostkach długości) przebyte w jednakowym odstępstwie czasu $\boldsymbol{t}$ przez punkty $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A_1}$ (położone w różnych odległościach od osi obrotu obracającego się ciała z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{const}$) nie są jednakowe, ale są tym większe im większa jest ich odległość od osi obrotu.



Kierunek osi obrotu ciała jest prostopadły do płaszczyzny rysunku

$$\boldsymbol{s = \theta \cdot r} \qquad \boldsymbol{s_1 = \theta \cdot r_1}$$

Droga liniowa $\boldsymbol{S}$ dowolnego punktu obracającego się ciała jest równa iloczynowi drogi kątowej $\boldsymbol{\theta}$ przez odległość $\boldsymbol{r}$ punktu od osi obrotu.

Dowolny punkt ciała poruszającego się ruchem obrotowym jednostajnym posiada stałą co do wartości prędkość liniową $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v = \frac{s}{t} = \frac{\theta \cdot r}{t} = \omega \cdot r} \qquad \boldsymbol{v_1 = \frac{s_1}{t} = \frac{\theta \cdot r_1}{t} = \omega \cdot r_1}$$

Częstotliwość $\boldsymbol{f}$ (kątową) ruchu obrotowego jest to prędkość ruchu obrotowego wyrażająca ilość pełnych obrotów wykonanych w jednostce czasu. Jednostką częstotliwości $\boldsymbol{f}$ (prędkości obrotowej ciała) jest $\left[\frac{1}{s}\right]$.

$$\boldsymbol{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

Jeżeli ruch obrotowy ciała określony jest przez częstotliwość $\boldsymbol{f}$ to prędkość liniową $\boldsymbol{v}$ punktu ciała oddalonego od osi obrotu po $\boldsymbol{r}$ wynosi: $\boldsymbol{v = 2\pi \cdot f \cdot r}$

- **droga kątowa $\boldsymbol{\theta}$** określa położenie kątowe ciała,
- **prędkość liniowa punktu ciała** jest wektorem $\vec{v}$ o kierunku stycznej do okręgu i module
  $$v = \omega \cdot r$$
- **prędkość kątowa** jest wektorem $\vec{\omega} = \overrightarrow{const}$ tożsamym z kierunkiem osią obrotu ciała i module
  $$\omega = \theta / t$$
- **częstotliwość $\boldsymbol{f}$** ruchu obrotowego jednostajnego ciała
  $$f = \omega / 2\pi$$

6.2. Ruch obrotowy jednostajnie zmienny

Ruchy obrotowe zmienne to ruchy ciała w których prędkość kątowa ω ciała nie jest stała.
Spośród tych ruchów najczęściej występują ruchy jednostajnie zmienne (np. w czasie rozruchu i hamowania).

W ruchach jednostajnie zmiennych przyrosty prędkości kątowej $\boldsymbol{\Delta\omega = \omega - \omega_0}$ są wprost proporcjonalne do czasu $\boldsymbol{t}$.

W ruchu jednostajnie zmiennym:

- **przyspieszenie kątowe $\boldsymbol{\varepsilon}$** jest to stosunek przyrostu prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega - \omega_0}$ do czasu $\boldsymbol{t}$, w którym ten przyrost nastąpił

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}}$$

Jednostką przyspieszenia kątowego $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest radian na sekundę do kwadratu $\left[\frac{1}{s^2}\right]$

Przyśpieszenie kątowe może przyjmować wartości:

$\varepsilon > 0$ dla ruchu obrotowego jednostajnie przyspieszonego,

$\varepsilon < 0$ dla ruchu obrotowego jednostajnie opóźnionego;

- **przyspieszenie liniowe $\boldsymbol{a}$** dowolnego punktu obracającego się ciała równe jest iloczynowi przyspieszenia kątowego $\boldsymbol{\varepsilon}$ przez odległość $\boldsymbol{r}$ punktu od osi obrotu;

$$\boldsymbol{a = \varepsilon \cdot r}$$

Wstawiając do równania na przyspieszenie liniowe $a = \frac{v - v_0}{t}$

wartości $v = \omega r$ *i* $v_0 = \omega_0 \cdot r$

otrzymujemy:

$$a = \frac{\omega r - \omega_0 r}{t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} r = \varepsilon \cdot r$$

- **prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$** ruchu obrotowego jednostajnie zmiennego;

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \varepsilon t}$$

- **droga kątowa $\boldsymbol{\theta}$** ruchu obrotowego jednostajnie zmiennego.

$$\boldsymbol{\theta = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}}$$

Wychodzimy z równania na drogę liniową $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

dzielimy stronami przez r $\frac{s}{r} = \frac{v_0}{r} t + \frac{a}{r}\frac{t^2}{2}$

i wiedząc, że $s = \theta \cdot r,\ v_0 = \omega_0 \cdot r,\ a = \varepsilon \cdot r$

otrzymujemy:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Przykład 6.1. Wrzeciono tokarki wykonuje n = 120 obrotów/min. Oblicz prędkość kątową wrzeciona ω oraz prędkość obwodową v wałka o średnicy t= 80 mm zamocowanego w tym wrzecionie.

Rozwiązanie:

Wrzeciono wykonując *n* = 120 obrotów/min, zakreśla kąt (przebywa drogę kątową) $\theta = 2\pi n$ radianów w czasie ***t*** = 1 min.

Obliczamy prędkość kątową wrzeciona: $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{t}}$; $\omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 120}{60} \frac{1}{s} = 12{,}5 \frac{1}{s}$.

Obliczamy prędkość obwodową $\boldsymbol{v}$ wałka o średnicy *f* = 80 mm, czyli promieniu $r = \frac{\mathrm{f}}{2} = 0{,}04\, m$ $\quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}$,

$v = 12{,}5 \frac{1}{s} \cdot 0{,}08\, m = 0{,}5 \frac{m}{s}$. Odpowiedź: $\omega = 12{,}5 \frac{1}{s}$, $\quad v = 0{,}5 \frac{m}{s}$.

Przykład 6.2. Wirnik silnika elektrycznego wykonuje *n* = 1410 obrotów/min. Po wyłączeniu dopływu prądu do silnika, wirnik poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym przez czas t = 15 sek. Oblicz ile obrotów n wykonał wirnik silnika od chwili wyłączenia prądu do chwili zatrzymania się wirnika.

Rozwiązanie:

Wirnik silnika wykonując *n* = 1410 obrotów/min, zakreśla kąt (przebywa drogę kątową) $\theta = 2\pi n$ radianów w czasie ***t*** = 1 min.

Obliczamy prędkość kątową wirnika $\boldsymbol{\omega_0}$ przed wyłączeniem prądu $\boldsymbol{\omega_0} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{t}}$; $\omega_0 = \frac{2\pi n}{t} = 2\pi f_0$ stąd $f_0 = \frac{n}{t} = \frac{1410}{60} = 23{,}5 \frac{1}{s}$

Korzystamy z równań na drogę kątową $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega_0 t} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon t^2}}{\boldsymbol{2}}$ i prędkość kątową $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_0} + \boldsymbol{\varepsilon t}$ w ruchu jednostajnie zmiennym.

Uwzględniając, że prędkość (kątowa) końcowa ruchu (po hamowaniu) $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$, otrzymujemy $\boldsymbol{0} = 2\pi f_0 + \boldsymbol{\varepsilon t}$; stąd $\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{2\pi f_0}{t}$

Znając ω_0, $\boldsymbol{\varepsilon}$ i t obliczamy drogę kątową $\boldsymbol{\theta}$ (w radianach) jaką pokona wirnik silnika do chwili zatrzymania:

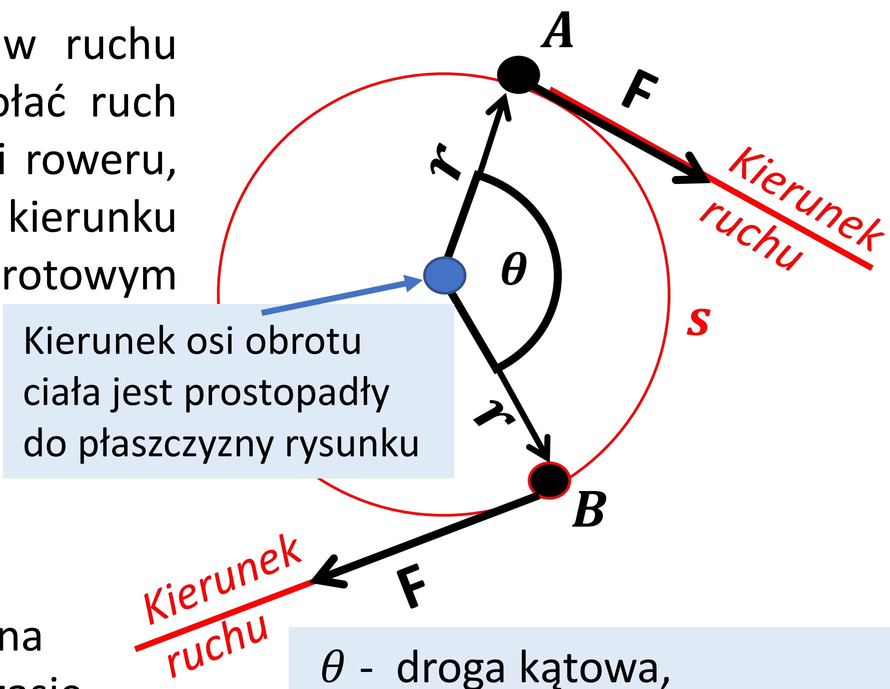
$\boldsymbol{\theta} = 2\pi f_0 \boldsymbol{t} - \frac{2\pi f_0 t^2}{2t} = \pi f_0 \boldsymbol{t} = \frac{2\pi f_0 t}{2} = 2\pi \frac{f_0 t}{2}\,\mathrm{rad.}$ Droga kątowa wyrażona w obrotach:

$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{2\pi}} = \frac{f_0 t}{2}$ $\qquad n = \frac{\boldsymbol{23{,}5 \cdot 15}}{\boldsymbol{2}} = 176{,}25.$ Odpowiedź: Wirnik wykonał ponad $n = 176$ obrotów.

Moment siły, praca i moc w ruchu obrotowym

Aby spowodować ruch obrotowy ciała niezbędna jest siła, podobnie jak w ruchu postępowym. Z doświadczenia wiemy jednak, że nie każda siła może wywołać ruch obrotowy. Aby wprawić na przykład w ruch koło, ustawionego do góry kołami roweru, trzeba podziałać na nie siłą styczną do opony. Siła działająca prostopadle, tzn. w kierunku osi, nie spowoduje zmian ruchu koła. Przykład ten wykazuje, że w ruchu obrotowym ważna jest nie tylko wartość siły, ale także jej kierunek i punkt przyłożenia.

Wprowadzenie ciała w ruch i utrzymanie go w stanie ruchu obrotowego jednostajnego jest związane z wykonaniem w określonym czasie *t* pewnej pracy *W* (na pokonanie oporów tego ruchu).



θ - droga kątowa,
$s = \theta \cdot r$ - droga liniowa,
$\omega = \frac{\theta}{t}$ - prędkość kątowa.

Załóżmy, że na obwodzie tarczy obracającej się jednostajnie dookoła osi przyłożona jest stała co do wielkości siłą ***F***, która jest prostopadła do promienia ***r***. Jeżeli po czasie ***t*** punkt ***A*** przyłożenia siły ***F*** przebędzie drogę liniową $\boldsymbol{s = \theta \cdot r}$ (od punktu ***A*** do punktu do punktu ***B***) to:

- **praca** $\boldsymbol{W}$ (pokonywania oporów ruchu) **wykonana przez siłę** $\boldsymbol{F}$ **w czasie *t* wynosi:**

  $$\boldsymbol{W = F \cdot s} \qquad \text{lub} \qquad \boldsymbol{W = F \cdot \theta \cdot r = r \cdot F \cdot \theta = M \cdot \theta}$$

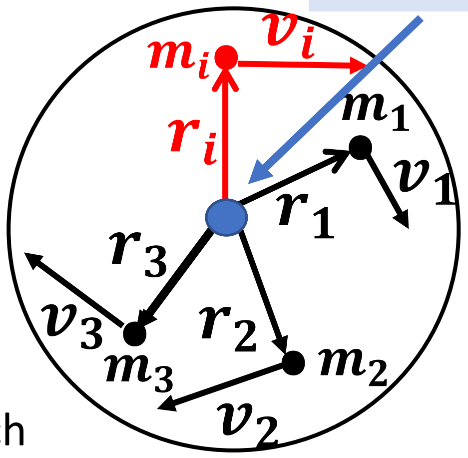
  gdzie iloczyn $\boldsymbol{r \cdot F}$ przedstawia moment siły $\boldsymbol{F}$ względem osi obrotu.

  Zatem $\boldsymbol{M = r \cdot F}$ - **moment obrotowy;**

- **moc *P* jest stosunkiem pracy** $\boldsymbol{W}$ **do czasu *t*,**
  w którym ta praca została wykonana: $\boldsymbol{P = \frac{W}{t} = \frac{M \cdot \theta}{t}}$ ale $\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}}$ więc $\boldsymbol{P = M \cdot \omega}$

6.3. Moment bezwładności ciała

Załóżmy, że tarcza o masie m, złożona z bardzo dużej ilości cząstek o masach $\boldsymbol{m_1, m_2, m_3, \ldots m_i, \ldots m_N}$, tak małych, że można je traktować jak punkty materialne obracające się dookoła osi przechodzącej przez jej środek ciężkości ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Energia kinetyczne i-tego elementu wynosi:



$\boldsymbol{E_{k_i} = \frac{m_i v_i^2}{2}}$. Wiedząc, że $\boldsymbol{v_i = \omega \cdot r_i}$ otrzymujemy $\boldsymbol{E_{k_i} = \frac{m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2}}$

Energia kinetyczna $\boldsymbol{E_k}$ całej tarczy jest sumą energii $\boldsymbol{E_{k_i}}$ jej wszystkich N punktów składowych

$$\boldsymbol{E_k = \sum_{i=1}^{N} E_{k_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2}}$$

Wyłączając stałą wartość $\boldsymbol{\frac{\omega^2}{2}}$ dla wszystkich punktów składowych przed znak sumowania

Otrzymujemy $\boldsymbol{E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2}$ stąd $\boldsymbol{E_k = \frac{I\omega^2}{2}}$, gdzie $\boldsymbol{I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2}$.

Energia kinetyczna $\boldsymbol{E_k}$ ciała obracającego się dookoła osi przechodzącej przez jego środek ciężkości równa jest połowie iloczynu momentu bezwładności tego ciała $\boldsymbol{I}$ względem osi obrotu przez kwadrat prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$.

Wyrażenie $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2}$

nazywa się **momentem bezwładności** wirującego ciała względem osi obrotu.

Jednostką I w układzie SI jest $[kg \cdot m^2]$

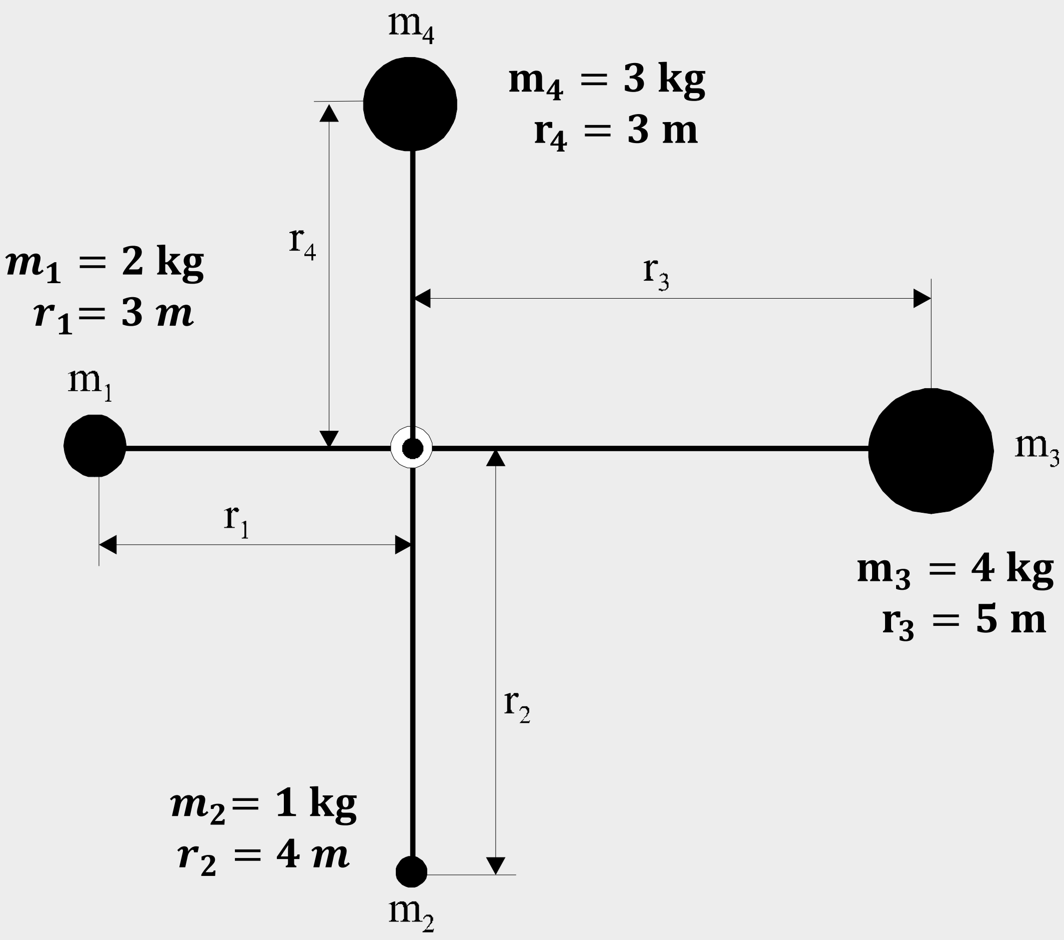
Przykłady wyznaczania momentów bezwładności ciał

Dzieląc masę ***m*** ciała na określoną ilość elementów ***N*** można za pomocą rachunku elementarnego obliczyć moment bezwładności ***I*** ciała korzystając, ze wzoru:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

Przykład 6.3.

Oblicz moment bezwładności ***I*** czterech mas rozłożonych w formie „krzyżaka" przedstawionego na rysunku obok.



Rozwiązanie: Ilość elementów N = 4, więc

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot r_i^2$$

$$I = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2 + m_3 {r_3}^2 + m_4 {r_4}^2$$

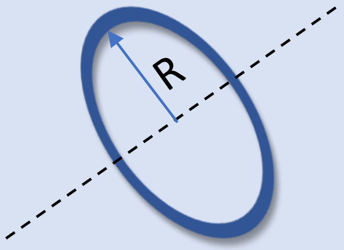
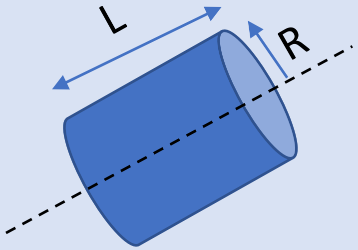
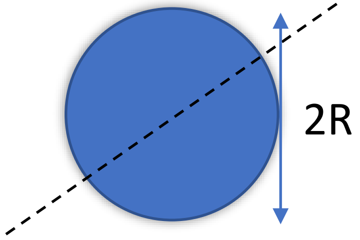
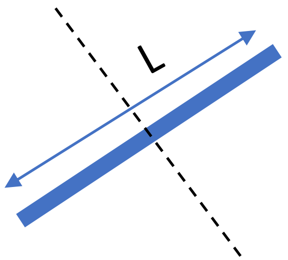
$$I = 2 \cdot 9 \text{ kgm}^2 + 1 \cdot 16 \text{ kgm}^2 + 4 \cdot 25 \text{ kgm}^2 + 3 \cdot 9 \text{ kgm}^2$$

$$I = 161 \text{ kgm}^2$$

Odpowiedź: Moment bezwładności „krzyżaka" wynosi 161 kgm^2.

Wartości ***I*** dla ciał o różnym kształcie wokół wybranych osi obrotu uzyskuje się pomocą rachunku całkowego.

Poniżej przedstawiono wzory do obliczania momentów bezwładności ***I*** wybranych brył o dużej symetrii.

Bryła	**Moment bezwładności**	**Bryła**	**Moment bezwładności**
Obręcz – względem osi 	$I = mR^2$	Walec – względem osi 	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Kula – względem średnicy 	$I = \frac{2}{5}mR^2$	Pręt – ⊥ do osi 	$I = \frac{1}{12}mL^2$

6.4. Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Pierwsza zasada Newtona

Zasada bezwładności czyli pierwsza zasada dynamiki Newtona dla ruchu postępowego mówi, że jeżeli wypadkowa $\vec{F}$ wszystkich sił $\vec{F}_i$ działających na ciało jest równa zeru to ciało spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym postępowym.

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_i = 0$$

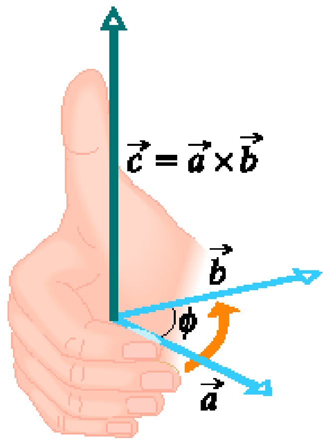
Rozszerzając zakres pierwszej zasady dynamiki Newtona na ruch obrotowy możemy powiedzieć, że jeżeli wypadkowy moment $\vec{\boldsymbol{M}}$ wszystkich momentów sił $\vec{\boldsymbol{M}}_i$ względem dowolnej osi obrotu równa się zero to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym obrotowym.

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\boldsymbol{M}}_i = 0$$

W przypadku, oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny działania sił, tzn. że wszystkie momenty sił mają ten sam kierunek, to można uprościć tą zasadę do postaci skalarnej, czyli że jeżeli wypadkowy moment $\boldsymbol{M}$ wszystkich momentów sił $\boldsymbol{M}_i$ równa się zero to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym obrotowym.
Istotny jest jedynie znak momentu siły: gdy moment $\boldsymbol{M}_i$ powoduje obrót ciała zgodnie z ruchem wskazówek zegara to ma znak (+), a gdy przeciwnie to ma znak (-).

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i = 0$$

Jest to konsekwencją faktu, że moment siły jest iloczynem wektorowym ramienia i siły: $\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$. Zgodnie z regułą prawej dłoni, gdy zmienia się zwrot wektora siły zmianie na przeciwny ulega również zwrot momentu siły – stąd znak (-).



Przykład 6.4. Obliczyć, jaki ciężarek ***Q*** należy zawiesić na końcu dźwigni zaworu bezpieczeństwa, który się podniesie z chwilą, gdy parcie pary ***P*** na grzybek zaworu wyniesie **180 *N***. Dźwignię stanowi jednorodny żelazny płaskownik o masie $\boldsymbol{m_1 = 3\ kg}$ i długości $\boldsymbol{l_1 = 0{,}8\ m}$. Odległość osi zaworu od osi dźwigni wynosi $\boldsymbol{l_2 = 15\ cm}$. Do obliczeń przyjąć $\boldsymbol{g = 10}$ m/s^2.

<u>Rozwiązanie:</u>

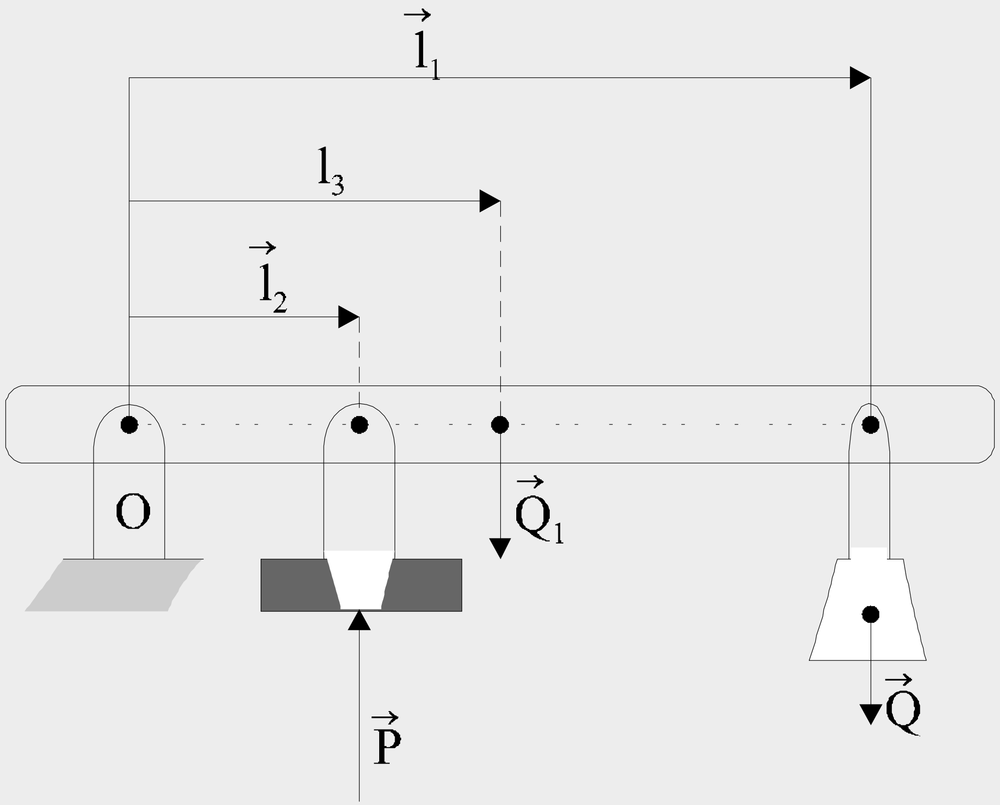
Siła ciężkości dźwigni $\boldsymbol{Q_1 = m_1 g}$ umiejscowiona jest w środku ciężkości dźwigni czyli w odległości $\boldsymbol{l_3 = \frac{1}{2} l_1 = 0,4\ m}$ od osi obrotu.

Na dźwignię działają trzy momenty (obrotowe) sił:

$\boldsymbol{M_1 = +l_1 \cdot Q}$ pochodzący od od siły $\vec{\mathbf{Q}}$ ciężkości ciężarka,

$\boldsymbol{M_3 = +l_3 \cdot Q_1}$ pochodzący od od siły $\overrightarrow{\boldsymbol{Q_1}}$ ciężkości dźwigni

$\boldsymbol{M_2 = -l_2 \cdot P}$ pochodzący od od siły $\vec{\boldsymbol{P}}$ parcia pary na zawór.



Momenty M_1 i M_3 mają znak (+) bo chcą dokonać obrotu dźwigni w dół zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a moment M_2 ma znak (-) bo chce dokonać obrotu w górę przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Wypadkowy moment sił jest równy:

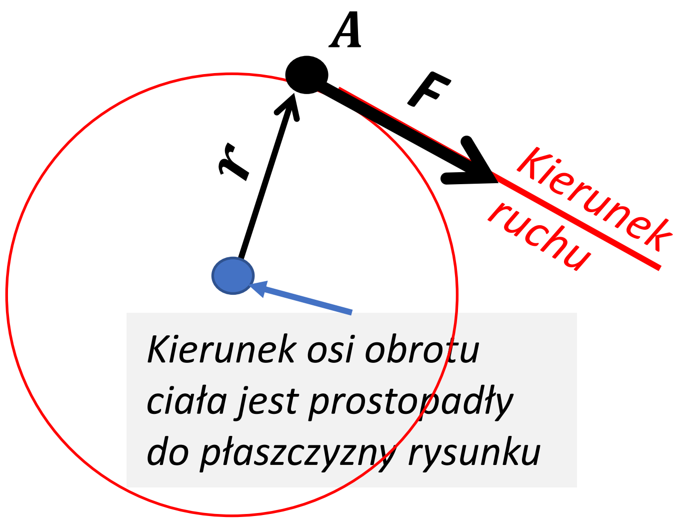
$$\boldsymbol{M = \sum_{i=1}^{3} M_i = M_1 + M_2 + M_3 = +l_1 \cdot Q - l_2 \cdot P + l_3 \cdot Q_1 = 0}$$

stąd
$$\boldsymbol{Q = mg = \frac{l_2 \cdot P - l_3 \cdot Q_1}{l_1} = \frac{l_2 \cdot P - l_3 \cdot m_1 g}{l_1} = \frac{0,15 \cdot 180 - 0,4 \cdot 3 \cdot 10}{0,8} = 18,75\ \mathrm{N}}$$

<u>Odpowiedź</u>: Na końcu dźwigni należy zawiesić ciężarek **Q = 18,75 N** o masie $\boldsymbol{m = \frac{Q}{g} \cong 1,9\ \mathrm{kg}}$.

Druga zasada Newtona

Aby spowodować ruch obrotowy ciała niezbędny jest niezrównoważony moment siły.
Niech na punkt materialny A o masie $\boldsymbol{m}$ oddalony od „wybranej” osi obrotu o $\boldsymbol{r}$ działa stała co do wielkości siła obwodowa $\boldsymbol{F}$. Moment tej siły $\boldsymbol{M}$ względem tej wybranej osi obrotu wynosi: $\boldsymbol{M = r \cdot F}$



Pod wpływem działania siły ***F*** punkt materialny *A* o masie ***m*** uzyska przyspieszenie liniowe ***a*** zgodnie z drugą zasadą Newtona $\boldsymbol{F = m \cdot a}$

Podstawiając do powyższego wyrażenia za $a = \varepsilon \cdot r$ otrzymujemy $\boldsymbol{F = m \cdot \varepsilon \cdot r}$

Mnożąc stronami równanie $F = m \cdot \varepsilon \cdot r$ przez *r* otrzymujemy $\boldsymbol{F \cdot r = m \cdot \varepsilon \cdot r \cdot r}$ czyli $\boldsymbol{M = \varepsilon \cdot m \cdot r^2}$

Podobne rozumowanie przeprowadźmy dla ciała o masie *m* obracającego się wokół osi obrotu.

Załóżmy, że ciało o masie *m* (złożone z bardzo dużej ilości cząstek o masach $m_1, m_2, m_3, \dots m_i, \dots m_N$, tak małych, że można je traktować jak punkty materialne) **może się obracać dookoła osi przechodzącej przez jej środek ciężkości. Aby nadać temu ciału przyspieszenie kątowe ε, trzeba na nie działać momentem obrotowym *M*,** (równym sumie wszystkich momentów obrotowych $M_1, M_2, M_3, \dots M_i, \dots M_N$, poruszających poszczególne elementy ciała)

$$\boldsymbol{M = \sum_{i=1}^{N} M_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon \cdot m_i \cdot r_i^2 = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2}$$

Ponieważ $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 = I}$ jest momentem bezwładności ciała względem osi obrotu, więc otrzymujemy: $\boldsymbol{M = I \cdot \varepsilon}$

Jeżeli na ciało działa stały moment siły $\boldsymbol{M}$, to powoduje on ruch obrotowy jednostajnie zmienny.
Przyśpieszenie kątowe $\boldsymbol{\varepsilon}$ tego ruchu jest wprost proporcjonalne do momentu obrotowego $\boldsymbol{M}$ i odwrotnie proporcjonalny do momentu bezwładności $\boldsymbol{I}$ ciała.

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{M}{I}}$$

Przykład 6.5. Wirnik silnika elektrycznego o mocy $P = 10$ kW i prędkości obrotowej $n = 2800$ obr/min posiada moment bezwładności $I = 0{,}025\ \mathrm{kgm}^2$. Oblicz moment obrotowy M oraz czas rozruchu silnika.

<u>Rozwiązanie:</u>

Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego wiemy że, $M = I \cdot \varepsilon$, gdzie $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$, a moc P wyraża się wzorem $P = M \cdot \omega$

Wirnik silnika wykonując $\boldsymbol{n = 2800}$ ***obr/min***, zakreśla kąt (przebywa drogę kątową) $\boldsymbol{\theta = 2\pi n}$ ***rad*** czasie $\boldsymbol{t = 1}$ **min**

Obliczamy prędkość kątową silnika (w ruchu obrotowym jednostajnym) $\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}\ ;\ \omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2\pi n}{60}\frac{1}{s}},$

Znając moc $\boldsymbol{P}$ oraz $\boldsymbol{\omega}$ obliczamy moment obrotowy silnika $\boldsymbol{M = \frac{P}{\omega}},\quad \boldsymbol{M = \frac{10000\ \mathrm{W}\cdot 60\ \mathrm{s}}{2\pi\cdot 2800} = 34{,}12\ \frac{\mathrm{Js}}{\mathrm{s}} = 34{,}12\ \mathrm{Nm}}$

Znając moment obrotowy silnika $\boldsymbol{M}$ oraz jego moment bezwładności $\boldsymbol{I}$ obliczamy przyspieszenie kątowe $\boldsymbol{\varepsilon}$ jakie ten moment siły wywołuj $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{M}{I}}$

Wiedząc że, dzięki temu przyspieszeniu $\boldsymbol{\varepsilon}$, silnik w poszukiwanym przez nam czasie t „rozpędził się" od prędkości początkowej $\boldsymbol{\omega_0 = 0}$ do znanej już nam prędkości końcowej $\boldsymbol{\omega}$, $t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi I n}{M\cdot t} = \frac{2\pi\cdot 0{,}025\ \mathrm{kgm}^2\ 2800}{34{,}12\ \mathrm{Nm}\ 60\ \mathrm{s}}$, $\boldsymbol{t = 0{,}2\ \mathrm{s}}$

<u>Odpowiedź:</u> Moment obrotowy wirnika silnika wynosi $M = 34{,}12\ \mathrm{Nm}$, a czas jego rozruchu $t = 0{,}2\ \mathrm{s}$.

Dynamika ruchu ciała musi uwzględniać:

- Rozmiary tego ciała, rozkład przestrzenny jego masy, czyli jego kształt, a także punkt przyłożenia siły wywołującej ruch względem osi obrotu ciała.
- Moment bezwładności *I* w ruchu obrotowym spełnia taką samą rolę jak masa *m* w ruchu postępowym.
- Moment siły *M* w ruchu obrotowym jednostajnie zmiennym odgrywa taką rolę, jak siła *F* w ruchu postępowym.

Porównanie wielkości ruchu postępowego i obrotowego

Wielkość fizyczna	Ruch postępowy	Ruch obrotowy	Zależność
	Ruch jednostajny		
Droga	$s = v \cdot t$	$\theta = \omega \cdot t$	$s = \theta \cdot r$
Prędkość	$v = \frac{s}{t}$	$\omega = \frac{\theta}{t}$	$v = \omega \cdot r$
	Ruch jednostajnie zmienny		
Przyspieszenie	$a = \frac{v - v_0}{t}$	$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$	$a = \varepsilon \cdot r$
Prędkość	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	$v = \omega \cdot r$
Droga	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\theta = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$	$s = \theta \cdot r$
	Dynamika		
Praca	$W = F \cdot s$	$W = M \cdot \theta$	$M = r \cdot F$
Moc	$P = F \cdot v$	$P = M \cdot \omega$	$P = r \cdot F \cdot \frac{v}{r} = M \cdot \omega$
Energia kinetyczna	$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$	I= $\sum r_i^2 m_i$
II zasada Newtona	$F = m \cdot a$	$M = I \cdot \omega$	$M = r \cdot F$