5. Pole grawitacyjne

Pole grawitacyjne

Pojęcie siły oznacza uogólnioną wymianę rzeczywistych wzajemnych oddziaływań między ciałami. Odgrywa ono ważną rolę w mechanice, gdyż daje możność rozwiązywania zadań abstrahując od konkretnej fizycznej istoty wzajemnych oddziaływań pomiędzy ciałami.

Wszystkie siły możemy podzielić na następujące grupy:

- siły uwarunkowane wzajemnym działaniem bezpośrednio stykających się ciał (np. zderzenie, ściskanie, ciągnięcie, tarcie);
- siły, które są związane ze szczególną postacią materii, zwanej polem, realizujące wzajemne działanie między ciałami bez ich bezpośredniego zetknięcia się.

W tym rozdziale, zapoznamy się z polem grawitacyjnym (polem ciążenia). Z punktu widzenia zasady zachowania energii w mechanice siły można podzielić na:

- zachowawcze;
- rozpraszające.

Praca sił zachowawczych zależy tylko od zmiany położenia ciał (lub części układu) względem siebie, ale nie zależy od drogi, wzdłuż której ta zmiana nastąpiła. Praca taka jest związana ze zmianą energii potencjalnej układu. Do sił zachowawczych zaliczamy np. siły ciążenia i siły sprężystości.

Praca przeciw siłom rozpraszającym prowadzi do przemiany energii mechanicznej na energię nieuporządkowanego ruchu cieplnego cząsteczek ciał, czyli do rozpraszania energii mechanicznej. Do sił rozpraszających zaliczamy siły przeciwstawiające się ruchowi (np. siły tarcia).

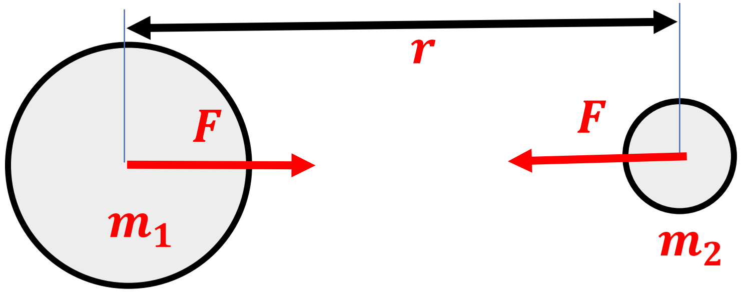
5.1. Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia, zwane prawem grawitacji zostało sformułowane przez Izaaca Newtona w 1665 r. Prawidłowości ruchu planet i ich satelitów, spadanie ciał na ziemię, ruch pocisków artyleryjskich i wahadeł świadczą o istnieniu wzajemnego przyciągania się ciał. Za Newtonem możemy powiedzieć, że:

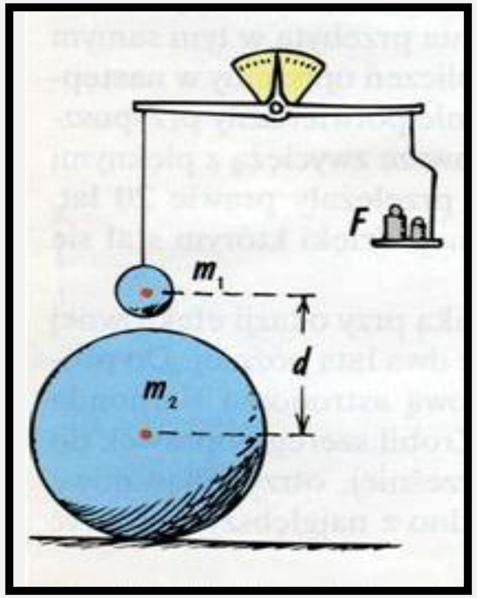
Wszystkie ciała przyciągają się wzajemnie. Siła *F* wzajemnego przyciągania się dwóch ciał o masach m_1 i m_2 jest wprost proporcjonalna iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości *r* między środkami tych mas.

$$F = k_g \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$k_g = 6,67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$$



Wartość współczynnika proporcjonalności k_g, zwanego dalej stałą grawitacji, wyznaczono doświadczalnie przez pomiar siły ciążenia między dwoma znanymi masami, umieszczonymi w określonej od siebie odległości ***d***. Stała k_g jest liczbowo równa sile, z jaką przyciągają się dwa punkty materialne o masie 1 kg każdy z odległości 1 m.
Niewielka wartość stałej grawitacji wynika z faktu, że siły grawitacji są najsłabszym ze wszystkich znanych nam typów oddziaływań.

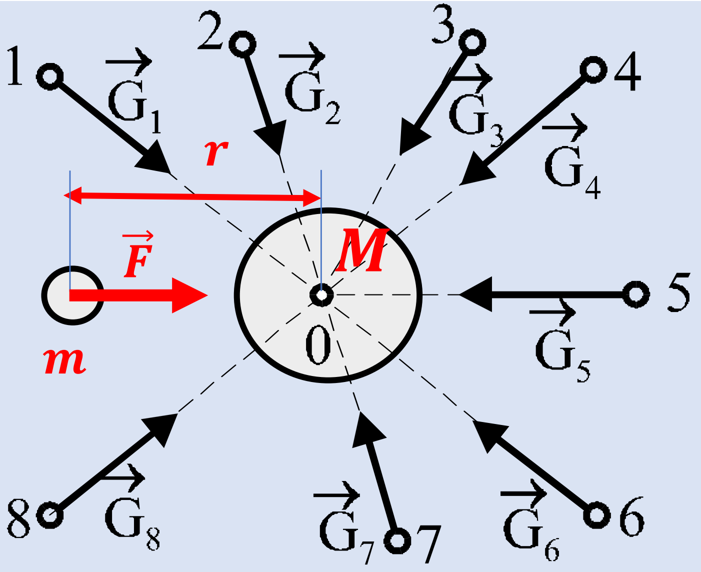


Pierwszego pomiaru stałej grawitacji k_g dokonał Cavendish w 1798 r.

Najważniejsze cechy tych sił to:

- siła grawitacji działa między wszystkimi bez wyjątku ciałami zarówno między takimi jak Słońce, Ziemia lub planety, jak i między najmniejszymi pyłkami;
- działanie sił przyciągania jest wzajemne;
- siły grawitacji są siłami centralnymi (tzn. leżą na prostej łączącej oddziałujące ciała);
- siły grawitacji są zawsze siłami przyciągającymi.

5.2. Natężenie pola grawitacyjnego



$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$$

natężenie pola grawitacyjnego

Pole grawitacyjne jest polem centralnym ponieważ we wszystkich jego punktach wektory natężenia pola grawitacyjnego $\vec{G}$ są skierowane wzdłuż prostych, przecinających się w jednym punkcie 0.

Prawo powszechnego ciążenia, ustalając zależność siły ciążenia $\vec{F}$ od mas ciał działających wzajemnie na siebie i odległości r między nimi, nie daje odpowiedzi na pytanie, jaki jest mechanizm tego wzajemnego działania. Ciążenie, w odróżnieniu od takich zjawisk mechanicznych, jak zderzenie i tarcie, należy do oddzielnej grupy wzajemnych oddziaływań. Pojawia się ono między ciałami oddalonymi od siebie, przy czym siły ciążenia nie zależą od tego, w jakim ośrodku znajdują się te ciała (w powietrzu, w wodzie czy próżni).

- **Oddziaływanie grawitacyjne odbywa się za pośrednictwem pola grawitacyjnego.**
- **Pole grawitacyjne (pole ciążenia), pochodzi od ciała (od układu ciał) o masie *M*.**
- **Pole grawitacyjne jest jednym z rodzajów materii,** tak jak inne pola fizyczne np. pole elektromagnetyczne.

Zasadnicza właściwość pola grawitacyjnego jest to , że na każdy punkt materialny o masie *m* wprowadzony do tego pola działa siła ciążenia $\vec{F}$ proporcjonalna do m:

$$\vec{F} = m\vec{G}$$

- Natężeniem pola grawitacyjnego $\vec{G}$, nie zależy od masy m na którą działa.
- Liczbowo wektor $\vec{G}$ równa się sile $\vec{F}$, z którą pole grawitacyjne działa na punkt materialny o masie jednostkowej i jest skierowany zgodnie z tą siłą.
- Wektor natężenia $\vec{G}$ zmienia się przy przejściu z jednego punktu pola do drugiego.
- Centralne pole grawitacyjne nazywamy kulisto-symetrycznym, jeżeli liczbowa wartość wektora natężenia pola $\vec{G}$ zależy tylko od odległości r od środka sił 0.

$$F = k_g \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$G = \frac{F}{m} = k_g \frac{M}{r^2}$$

Ciężar ciał. Przyspieszenie ziemskie

- Siłę $\boldsymbol{F}$, jaką ciało o masie $\boldsymbol{m}$ jest przyciągane przez Ziemię, nazywamy ciężarem ciała. Ponieważ Ziemia o masie ***M*** ma kształt w przybliżeniu kulisty o promieniu ***R*** , więc możemy napisać:

$$\boldsymbol{F = k_g \frac{M \cdot m}{R^2}}$$

- Ciężar cała (siła $\boldsymbol{F}$) nadaje swobodnie spadającemu ciału o masie $\boldsymbol{m}$ przyspieszenie $\boldsymbol{g}$ zwane przyspieszeniem ziemskim

$$\boldsymbol{F = mg}$$

- Porównując powyższe wzory, znajdujemy przyspieszenie ziemskie $\boldsymbol{g}$ wyrażone za pomocą masy $\boldsymbol{M}$ i promienia $\boldsymbol{R}$ Ziemi.

$$\boldsymbol{g = k_g \frac{M}{R^2}}$$

- Z porównania wzorów na przyspieszenie ziemskie $\boldsymbol{g}$ na powierzchni Ziemi (o masie $\boldsymbol{M}$ i promieniu $\boldsymbol{R}$) oraz na natężenie pola grawitacyjnego Ziemi (o masie $\boldsymbol{M}$) $\boldsymbol{G = k_g \frac{M}{r^2}}$ w odległości ***r*** od środka *O* Ziemi widzimy, że

$$\boldsymbol{g = k_g \frac{M}{R^2}} \qquad \boldsymbol{G = k_g \frac{M}{r^2}}$$

Natężenie pola grawitacyjnego G w pobliżu powierzchni Ziemi jest równe przyspieszeniu ziemskiemu g $\boldsymbol{G \equiv g}$

Na powierzchni Ziemi o masie M = 6·10²⁴ kg,
promieniu R = 6400 km, $k_g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} [Nm^2/kg^2]$
przyspieszenie ziemskie g wynosi

$$\boldsymbol{g = k_g \frac{M}{R^2} = 9{,}81 [\frac{m}{s^2}]}$$

Wartość g nie jest wszędzie na powierzchni Ziemi jednakowa, gdyż:

- Ziemia nie jest jednorodna;
- Ziemia nie jest kulista;
- Ziemia się obraca.

Swobodne spadanie ciał

W końcu XVI wieku Galileusz przeprowadził słynne doświadczenie. Z wierzchołka „Krzywej Wieży” w Pizie puścił On jednocześnie ciała o różnych ciężarach (klocki drewna, bryłki gliny, kawałki stali i ołowiu) i stwierdził, że czasy ich spadania są jednakowe, a pozorne różnice (jakie zwykle obserwujemy) są spowodowane oporem powietrza zakłócającym ruch.
Doświadczenie Galileusza przeprowadził powtórnie w XVII wieku Newton i stwierdził, że w próżni wszystkie ciała spadają jednakowo szybko (chociaż w powietrzu, każdy widzi, że jabłko spada szybciej z jabłoni iż jego liście). Newton również wykazał, że drogi s przebywające przez ciała swobodnie spadające są wprost proporcjonalne do kwadratu czasu t spadania, że ruch ciał swobodnie spadających jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, że stałym przyspieszeniem g zwanym przyspieszeniem ziemskim , niezależnym od ciężaru ciała.

Spadkiem swobodnym nazywamy model pionowego ruchu ciała pod wpływem sił grawitacji.

Swobodne spadanie ciał opisujemy wzorami na drogę $s = v_o \cdot t + a\,\frac{t^2}{2}$ i prędkość $v = v_o + at$ w ruchu jednostajne przyspieszonym z prędkością początkową $v_o = 0$ i przyspieszeniem $a = g$ zwróconym ku środkowi kuli ziemskiej.

Przykład 5.1. Z balonu unoszącego się na wysokości $h = 1960\ \mathrm{m}$ zrzucono woreczek z piaskiem. Oblicz czas spadania t woreczka z piaskiem na ziemię oraz prędkość υ w chwili upadku. Przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.
Rozwiązanie:
Woreczek będzie poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym przebywając drogę $s = h$ z prędkością początkową $v_o = 0$ i przyspieszeniem $a = g$ stąd $h = \frac{gt^2}{2}$ czyli $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1960\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} \cong 20\ \mathrm{s}$. Czas spadania t wynosi: $t = 20\ \mathrm{s}$

$v = g \cdot t = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$ $\quad v = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20s = 196\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Odpowiedź: Prędkość upadku v wynosi $196\frac{m}{s}$.

Zasada Galileusza – prędkość w spadku swobodnym nie zależy od masy ciała a tylko od wysokości z jakiej spada.

5.3. Rzuty

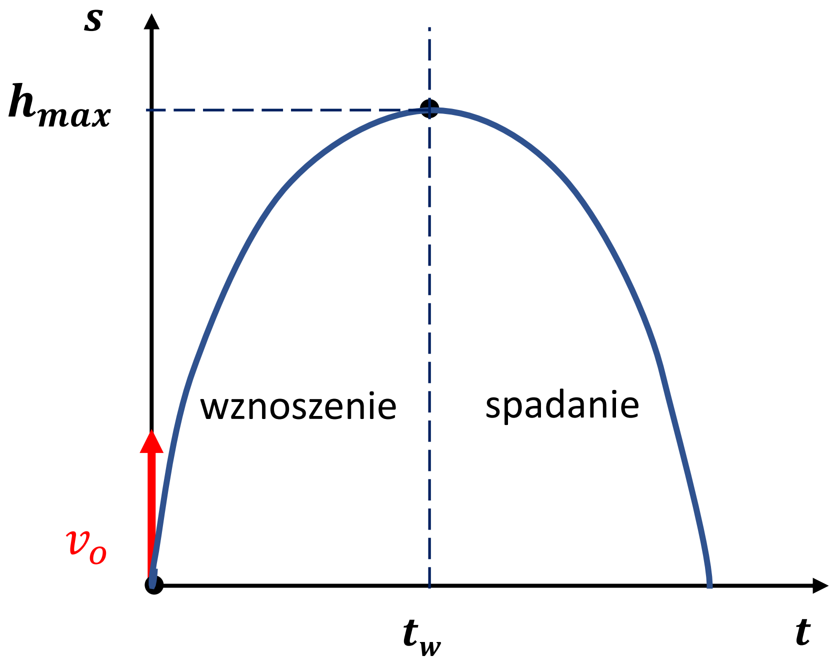
Rzut pionowy w górę

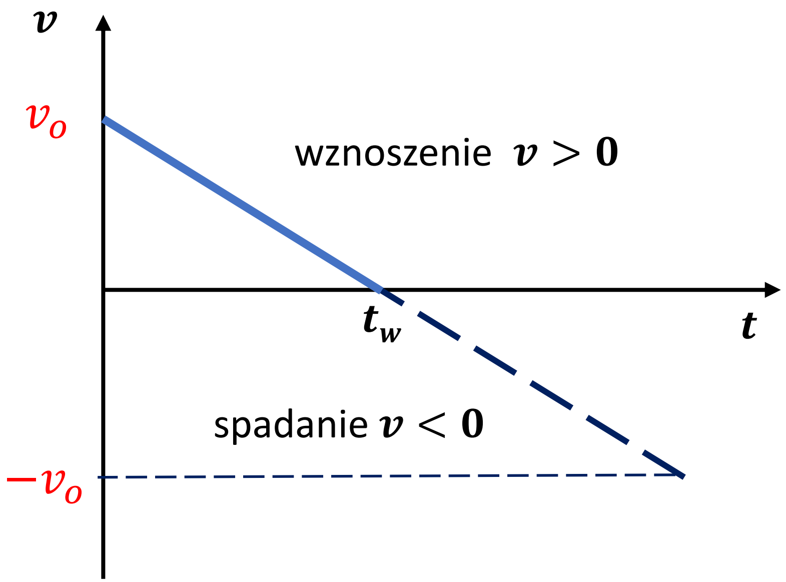
Rzutem pionowym nazywamy ruchu ciała rzuconego pionowo w górę z określoną prędkością początkową v_o.

Rzut pionowy ciała opisujemy wzorami na drogę $s = v_o \cdot t + a\frac{t^2}{2}$ i prędkość $v = v_o + at$ w ruchu jednostajne przyspieszonym z określoną prędkością początkową v_o.

W rzucie pionowym możemy wyodrębnić dwa etapy:

- ruch w górę, który jest ruchem jednostajnie opóźnionym (ciało podlega przyspieszeniu $a = -g$, skierowanemu przeciwnie niż prędkość początkowa v_o). Ruch ten trwa do chwili $\boldsymbol{t = t_w}$ kiedy ciało osiągnie największą wysokość $\boldsymbol{s = h_{max}}$, czyli prędkość będzie równa zeru ($v = 0$);
- spadku swobodnego, czyli ruchu jednostajne przyspieszonego z prędkością początkową $v_o = 0$ i przyspieszeniem $a = -g$ zwróconym ku środkowi kuli ziemskiej. W ruchu tym prędkość i przyspieszenie mają ujemny znak, gdyż są skierowane przeciwnie do kierunku osi OY tj. w dół.





Przykład 5.2. Z karabinka wystrzelono pocisk pionowo w górę z prędkością $v_o = 490 \text{ m/s}$. Oblicz wysokość h na jaką wzbije się pocisk oraz czas wznoszenia t i prędkość końcową v_u upadku pocisku? Opór powietrza pominąć.

<u>Rozwiązanie:</u>

$v = v_o + at$ gdzie $v = 0$ a $a = -g$; $0 = v_o - g \cdot t$ ➡ $t = \frac{v_o}{g}$ ➡ $t = \frac{490 \text{ m/s}}{9{,}81 \text{ m/s}^2} \cong 50 \text{ s}$

czas wznoszenia $t = 50 \text{ s}$

$$h = v_o \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_o \cdot \frac{v_o}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o}{g}\right)^2 = \frac{{v_o}^2}{2g} \qquad h = \frac{(490)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12\ 237 \text{ m}.$$

Oznaczmy przez t_s – czas spadania pocisku z wysokości h: $h = \frac{g{t_s}^2}{2}$ ➡ $t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ale $h = \frac{{v_o}^2}{2g}$

zatem $t_s = \sqrt{\frac{2{v_o}^2}{g \cdot 2g}} = \frac{v_o}{g}$ $t_s = 50$ s.

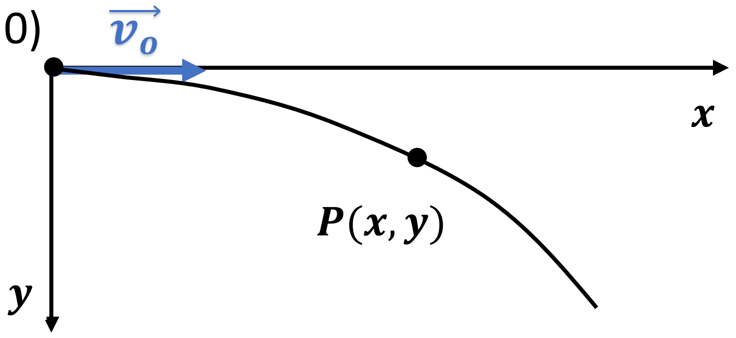
Widzimy, że czas spadania pocisku t_s jest taki sam jak czas t jego wznoszenia.

Oznaczmy przez υ_u - prędkość upadku pocisku $v_u = gt_s$ ale $t_s = \frac{v_o}{g}$. Zatem $v_u = g \cdot \frac{v_o}{g} = v_o$ $v_u = 490 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

<u>Odpowiedź:</u> Wysokość na którą wzbił się pocisk wynosi h = 12,237 km. Prędkość upadku pocisku υ_u wynosi 490 m/s i jest taka sama jak prędkość υ_o jego wystrzelenia.

Rzut poziomy

Rzutem poziomym nazywamy ruchu ciała rzuconego z określonej wysokości h w kierunku poziomym z prędkością v_o.
Rzut poziomy jest ruchem złożonym z dwóch ruchów prostoliniowych: jednostajnego w kierunku poziomym z prędkością początkową v_o oraz jednostajnie przyspieszonego z prędkością początkowa $v_o = 0$ i przyspieszeniem ziemskim g zwróconym ku środkowi kuli ziemskiej. (Jeżeli oś OY skierujemy w dół, to v i a > 0)



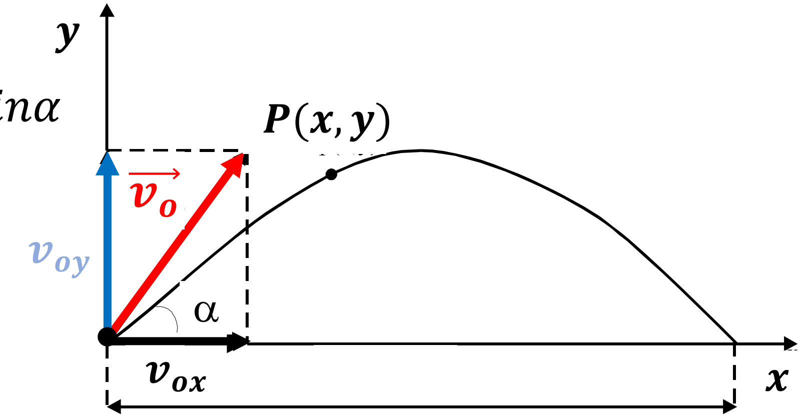
ruch poziomy: $\boldsymbol{x = v_o \cdot t}$, $\boldsymbol{v_x = v_o}$

ruch pionowy: $\boldsymbol{y = g\frac{t^2}{2}}$, $\boldsymbol{v_y = g \cdot t}$

Rzut ukośny

Rzutem ukośnym nazywamy ruchu ciała rzuconego pod określonym kątem α do poziomu z prędkością początkowa v_o.
Prędkość $\vec{v_o}$ możemy rozłożyć na dwie składowe; poziomą $v_{ox} = v_o cos\alpha$ i pionową $v_{oy} = v_o sin\alpha$
Ruch ukośny jest więc ruchem wypadkowym dwóch ruchów prostoliniowych:

- jednostajnego w kierunku poziomym z prędkością $v_{ox} = v_o cos\alpha$
- jednostajnie zmiennego w kierunku pionowym z prędkością początkowa $v_{oy} = v_o sin\alpha$ (czyli rzutu pionowego z prędkością początkowa $v_{oy} = v_o sin\alpha$).



ruch poziomy: $\boldsymbol{x = v_o cos\alpha \cdot t}$, $\boldsymbol{v_x = v_o cos\alpha}$

ruch pionowy: $\boldsymbol{y = v_o sin\alpha \cdot t - g\frac{t^2}{2}}$, $\boldsymbol{v_y = v_o sin\alpha - g \cdot t}$

Przykład 5.3. Z wysokości $h = 1{,}5$ m wystrzelono z karabinu poziomo pocisk z prędkością $v_o = 730\, m/s$. Znaleźć równanie toru pocisku $y = f(x)$. Określić odległość s w jakiej pocisk upadnie na ziemię oraz czas t ruchu pocisku. Opór powietrza pominąć.

Rozwiązanie:

Ruch pocisku jest wypadkowym dwóch ruchów:

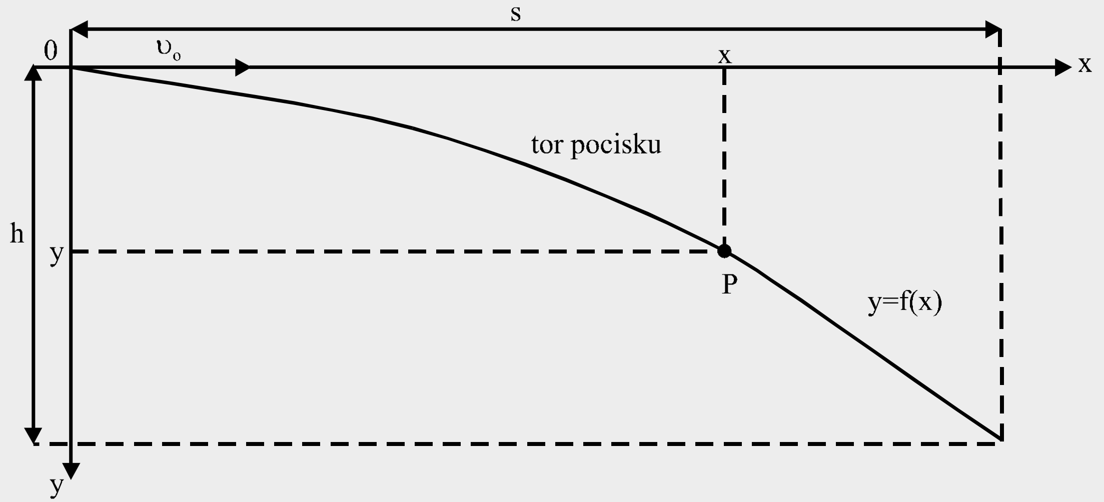
- w kierunku poziomym (osi *0x*) - jednostajnego prostoliniowego z prędkością $\boldsymbol{v_o}$;
- w kierunku pionowym (osi *0y*) - jednostajnie przyspieszonego (z przyspieszeniem ziemskim $\boldsymbol{g}$) z prędkością początkową równą zero.

W chwili $\boldsymbol{t}$ pocisk w punkcie ***P*** toru ma współrzędne:

$$\boldsymbol{x = v_o \cdot t}$$

$$\boldsymbol{y = g\frac{t^2}{2}}$$

jest to równanie toru w postaci parametrycznej



Obliczając z pierwszego równania $t = \frac{x}{v_o}$ i podstawiając do drugiego $y = g \cdot \left(\frac{x}{v_o}\right)^2 = \frac{g}{{v_o}^2}x^2$ otrzymujemy: $\boldsymbol{y = \frac{g}{{v_o}^2} \cdot x^2}$ **jest to równanie toru w postaci jawnej** (parabola)

Obliczamy czas lotu pocisku t (który jest równy czasowi swobodnego spadku tego pocisku z wysokości h).

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\; t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5\ \mathrm{m}}{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{s^2}}} = 0{,}55\ \mathrm{s}$$

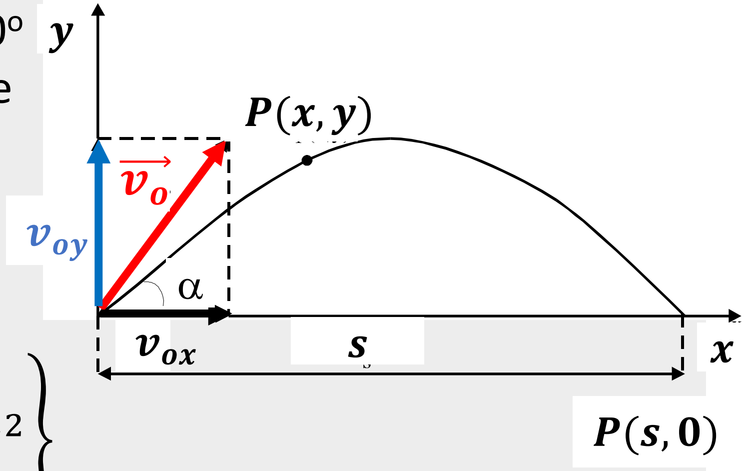
Czas lotu pocisku wynosi $t = 0{,}55$ s

Obliczamy zasięg pocisku który równy jest drodze $\boldsymbol{s}$ jaką pocisk przebędzie w kierunku *Ox* w czasie $\boldsymbol{t}$**,** (czyli w czasie swobodnego spadku tego pocisku z wysokości h):

$$s = v_o \cdot t = v_o \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2{v_o}^2 h}{g}} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{2 \cdot (730)^2\, \frac{m^2}{s^2} \cdot 1{,}5\, m}{9{,}81\, \frac{m}{s^2}}} \cong 400\, m$$

Odpowiedź: Zasięg pocisku s wynosi: $s = 400$ m, a czas jego lotu $t = 0{,}55$ s.

Przykład 5.4. Z moździerza wystrzelono pocisk z prędkością $\boldsymbol{v_o}$= 200 m/s pod kątem $\boldsymbol{\alpha}$ = 60° do poziomu. Znaleźć równanie toru $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Obliczyć odległość $\boldsymbol{s}$ w jakiej pocisk upadnie na ziemię od miejsca wystrzału oraz czas $\boldsymbol{t}$ lotu pocisku. Opór powietrza pominąć.



Rozwiązanie: Wektor $\vec{v_o}$ rozkładamy na dwie składowe;
poziomą $v_{ox} = v_o cos\alpha$ i pionową $v_{oy} = v_o sin\alpha$

W chwili t pocisk znajduje się w punkcie $P(x, y)$ toru o współrzędnych:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t = v_o \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = v_{0y} \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} = v_o \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Powyższe dwa równania opisują tor w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest czas t.
Eliminując czas t z powyższych równań czyli podstawiając za $t = \dfrac{x}{v_o \cos\alpha}$ do drugiego równania

otrzymujemy równanie toru w postaci jawnej $y = v_o \cdot \sin\alpha \cdot \dfrac{x}{v_o \cos\alpha} - \dfrac{g}{2}\dfrac{x^2}{v_o{}^2 \cos^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \dfrac{g}{2v_o{}^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$

Zasięg pocisku $\boldsymbol{s}$ to odległość punktu $P(s, 0)$ od początku układu współrzędnych Oxy. Zasięg $\boldsymbol{s}$ otrzymamy podstawiając do toru pocisku współrzędną $y = 0$ upadku pocisku: $0 = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \dfrac{g}{2v_o{}^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 \Rightarrow \dfrac{2v_o{}^2(\sin\alpha \cos\alpha)x - gx^2}{2v_o{}^2 \cos\alpha} = 0$

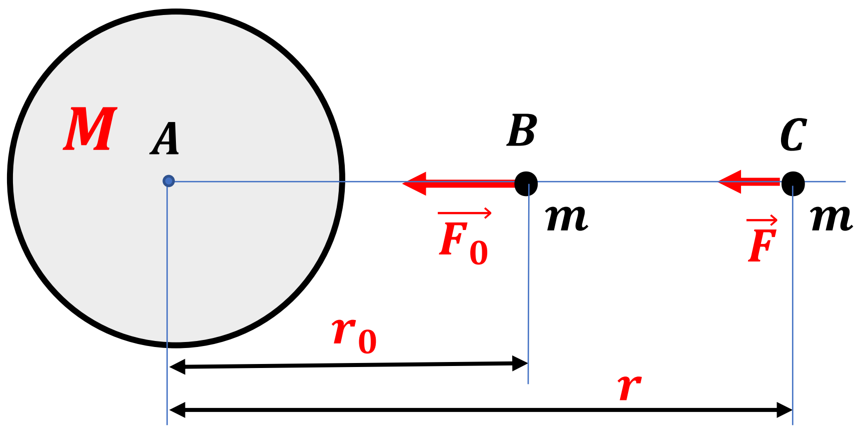
$x(2v_o{}^2 \sin\alpha \cos\alpha - gx) = 0$

Mamy dwa rozwiązania $x = 0$, ale to jest punkt startu (nie upadku), więc $2v_o{}^2 \sin\alpha \cos\alpha - gx = 0$ jest punktem upadku.

Wiemy, że $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$ $\quad v_o{}^2 \sin 2\alpha = gx \Rightarrow x = \dfrac{v_o{}^2 \sin 2\alpha}{g}$ $\quad x = s = \dfrac{(200)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot \sin 120^o}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 3531 \text{ m};$

znając $\boldsymbol{s}$ obliczamy czas lotu pocisku $t = \dfrac{s}{v_o \cos\alpha} = \dfrac{3531\text{m}}{200 \,{}^{\text{m}}/{}_{\text{s}} \cdot \frac{1}{2}} = 35{,}31 \text{ s}.$

Odpowiedź: Zasięg pocisku wynosi: $s = 3531$ m, czas t lotu pocisku wynosi: $t = 35{,}31$ s.



5.4. Potencjał grawitacyjny

Niech w punkcie $\boldsymbol{A}$ znajduje się jednorodna kula o masie $\boldsymbol{M}$ (kula ziemska) wytwarzajaca pole grawitacyjne, zaś niewielką masę $\boldsymbol{m}$ przesuwamy (wzdłuż linii pola grawitacyjnego) z punktu $\boldsymbol{B}$, gdzie działa na niego siła grawitacji $\vec{F_0}$ do bardziej oddalonego punktu $\boldsymbol{C}$ gdzie działa siła $\vec{F}$.

Z prawa powszechnego ciążenia wiemy, że $F_o = k_g \frac{M \cdot m}{{r_0}^2}$ a $F = k_g \frac{M \cdot m}{r^2}$.

Przeniesienie masy $\boldsymbol{m}$ z punktu $\boldsymbol{B}$ do $\boldsymbol{C}$ wymaga wykonania pracy $\boldsymbol{W}$ przeciwko sile przyciągania $\vec{F}$, której wartość maleje proporcjonalnie do $\frac{1}{r^2}$ przy wzroście $\boldsymbol{r}$.

Obliczenie pracy $\boldsymbol{W}$ na drodze $BC = r - r_0$ przeciwko sile przyciągania $\vec{F}$, której wartość nie jest stała, wymaga znajomości matematyki wyższej, ale można wykazać, że średnia wartość $F_{śr}$ siły $\vec{F}$ na odcinku $\boldsymbol{BC}$ jest równa średniej geometrycznej sił

$F_o = k_g \frac{M \cdot m}{{r_0}^2}$ i $F = k_g \frac{M \cdot m}{r^2}$

działających odpowiednio w punktach $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$

$$F_{śr} = \sqrt{F_o \cdot F} = \sqrt{\frac{(k_g \cdot M \cdot m)^2}{{r_0}^2 \cdot r^2}} = \frac{k_g \cdot M \cdot m}{r \cdot r_0}$$

stąd praca $\boldsymbol{W}$ wynosi:

$$W = F_{śr}(r - r_0) = \frac{k_g \cdot M \cdot m}{r \cdot r_0}(r - r_0) = k_g \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

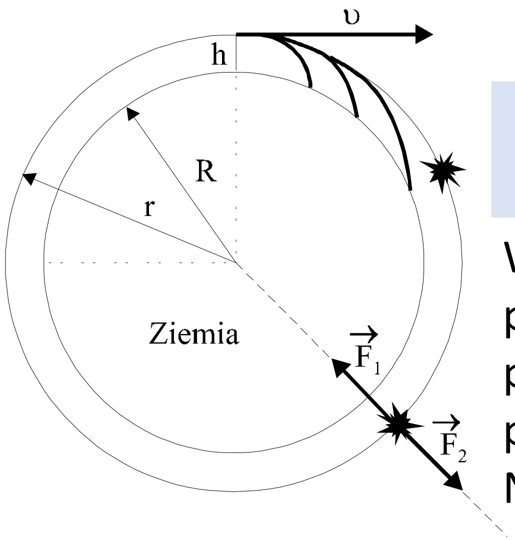
Przesuwając masę $\boldsymbol{m}$ z punktu $\boldsymbol{B}$ do nieskończoności tzn. do $\boldsymbol{C}$ dla którego $r = \infty$ wykonamy prace $W_{B\infty} = k_g \cdot M \cdot m \frac{1}{r_0}$.

Potencjał V pola grawitacyjnego w punkcie P odległym o r od źródła pola (np. od środka Ziemi o masie M) jest to stosunek pracy $W_{P\infty}$ wykonanej przeciwko siłom przyciągania grawitacyjnego do przesuwanej masy m.

$$V = -\frac{W_{P\infty}}{m} = -\frac{k_g \cdot M \cdot m}{r\, m} = -\frac{k_g \cdot M}{r}$$

Ujemna wartość potencjału (znak minus) oznacza, że pracę tą wykonują siły grawitacji.

Energia potencjalna E_p ciała o masie $\boldsymbol{m}$ znajdującego się w punkcie $\boldsymbol{r}$ o potencjale $\boldsymbol{V}$ wynosi $E_p = mV$.



Pierwsza prędkość kosmiczna

Pierwsza prędkość kosmiczną v_I jest to najmniejsza możliwa prędkość v, jaką musi mieć punkt materialny (satelita) swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi.

Wyobraźmy sobie pocisk wystrzelony poziomo na wysokości $\boldsymbol{h}$ nad Ziemią, któremu nadano prędkość początkową $\boldsymbol{v}$. Po przebyciu pewnej drogi pocisk spadnie na Ziemię. Jeżeli będziemy zwiększać prędkość początkową pocisku, to jego droga będzie coraz dłuższa i przy odpowiednio dużej prędkości początkowej pocisk zacznie obiegać Ziemię dookoła i nie spadnie na jej powierzchnię.
Nastąpi to wtedy, gdy prędkość początkowa pocisku $\boldsymbol{v}$ osiągnie pierwszą prędkość kosmiczną $\boldsymbol{v_I}$.

Przykład 5.5. Wyznaczyć pierwszą prędkość kosmiczną dla punktu materialnego (satelity) swobodnie krążącego po orbicie wokół Ziemi. Promień Ziemi wynosi $R = 6400\ \mathrm{km}$.

<u>Rozwiązanie:</u>

Na poruszający się po orbicie pocisk o masie $\boldsymbol{m}$ działają dwie siły (o przeciwnych zwrotach): siła grawitacji $\boldsymbol{F_1 = k_g \frac{Mm}{r^2}}$ i odśrodkowa $\boldsymbol{F_2 = \frac{m{v_I}^2}{r}}$. Warunkiem, aby orbita, po której porusza się pocisk, była stabilna jest równowaga tych sił: $\boldsymbol{F_1 = F_2}$

$\boldsymbol{k_g \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{{v_I}^2}{r}}$ i stąd $\boldsymbol{v_I = \sqrt{\frac{k_g M}{r}}}$, gdzie $\boldsymbol{r}$ to promień orbity satelity, który wynosi: $\boldsymbol{r = R + h}$

Ponieważ $\boldsymbol{h << R}$ to pierwsza prędkość kosmiczna $\boldsymbol{v_I}$ wyraża się wzorem: $\boldsymbol{v_I = \sqrt{\frac{k_g M}{R}}}$

Ale wiemy, że na powierzchni Ziemi spełnione jest równanie: $mg = k_g \frac{m \cdot M}{R^2} \quad \rightarrow \quad k_g \cdot M = g \cdot R^2$

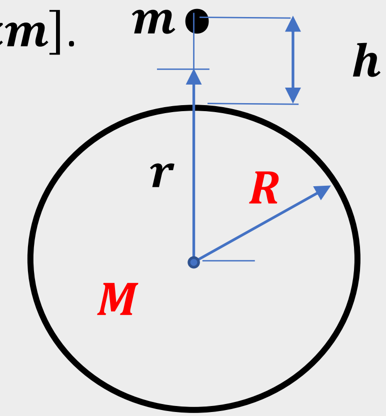
Ostatecznie $\boldsymbol{v_I} = \sqrt{\frac{k_g M}{R}} = \sqrt{\frac{g \cdot R^2}{R}} = \sqrt{gR}$ $\quad \boldsymbol{v_I} = \sqrt{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6400000\ \mathrm{m}}$ $\quad v_I = 7924\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cong 7{,}9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

<u>Odpowiedź:</u> Pierwsza prędkość kosmiczna na Ziemi wynosi około 7,9 km/s.

Druga prędkość kosmiczna

Druga prędkość kosmiczna jest to tzw. prędkość ucieczki, czyli najmniejsza możliwa prędkość v_{II} jaką musi mieć punkt materialny (satelita) przy powierzchni Ziemi, aby mógł się oddalić od Ziemi w nieskończoność.

Przykład 5.6. Wyznaczyć drugą prędkość kosmiczną dla punktu materialnego. Promień Ziemi $\boldsymbol{R = 6400\ [km]}$.



Rozwiązanie:

Obliczmy z jaką prędkością v trzeba rzucić ciało pionowo do góry, aby wzniosło się ono na wysokość $\boldsymbol{h}$.

Stosujemy w tym celu zasadę zachowania energii.

Całkowita energia mechaniczna $\boldsymbol{E_1}$ ciała o masie $\boldsymbol{m}$ na powierzchni Ziemi (czyli dla $\boldsymbol{r = R}$) wynosi:

$$\boldsymbol{E_1 = E_{1k} + E_{1p}(R) = \frac{mv^2}{2} - k_g \frac{M \cdot m}{R}}$$

gdzie $\boldsymbol{E_{1k} = \frac{mv^2}{2}}$ to energia kinetyczna, zaś $\boldsymbol{E_{1p} = -k_g \frac{Mm}{R}}$ to grawitacyjna energia potencjalna ($\boldsymbol{mV}$)

$$\boldsymbol{V = -\frac{k_g \cdot M}{r}}$$

Całkowita energia mechaniczna $\boldsymbol{E_2}$ ciała o masie $\boldsymbol{m}$ na wysokości $\boldsymbol{h}$ (czyli dla $\boldsymbol{r = R + h}$ ma postać:

$$\boldsymbol{E_2 = E_{2k} + E_{2p}(R + h) = -k_g \frac{Mm}{R+h}} \quad \text{(bo na wysokości } \boldsymbol{h}\ ;\ \boldsymbol{E_{2k} = 0}\text{)}$$

$$\boldsymbol{E_p = mV}$$

Z prawa zachowania energii $\boldsymbol{E_1 = E_2}$ czyli $\boldsymbol{\frac{mv^2}{2} - k_g \frac{M \cdot m}{R} = -k_g \frac{Mm}{R+h}}$. Z powyższego obliczamy prędkość

$\boldsymbol{v = \sqrt{2k_g M \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+h}\right)}}$ z jaka trzeba wyrzucić ciało o masie $\boldsymbol{m}$ aby wzniosło się ono na wysokość $\boldsymbol{h}$.

Podstawiając za $\boldsymbol{h = \infty}$, otrzymujemy prędkość ucieczki $\boldsymbol{v_{II} = \sqrt{\frac{2k_g M}{R}}}$, ale na powierzchni Ziemi spełniona jest równość

$\boldsymbol{mg = k_g \frac{M \cdot m}{R^2}}$ stąd $\boldsymbol{k_g M = g \cdot R^2}$. Ostatecznie otrzymujemy $\boldsymbol{v_{II} = \sqrt{\frac{2k_g M}{R}} = \sqrt{2gR}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6400000\ \mathrm{m}}$

$\boldsymbol{v_{II}} = 11\ 206 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cong 11{,}2 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

Odpowiedź: Druga prędkość kosmiczna wynosi 11,2 km/s.