4. Praca i energia

4.1. Praca siły
4.2. Moc
4.3. Energia kinetyczna
4.4. Energia potencjalna
4.5. Zasada zachowania energii

Energia

Zasady dynamiki Newtona umożliwiają analizę różnych rodzajów ruchu. Jednak w wielu przypadkach jest to bardzo skomplikowane i wymaga znajomości szczegółowych parametrów ruchu: kształtu toru, działających sił itp.. Ruch ciał można jednak badać również w inny sposób wykorzystując pojęcie energii. Termin energia ma dość szerokie znaczenie, ale ogólnie można powiedzieć, że jest to wielkość skalarna charakteryzująca stan w jakim znajduje się ciało lub układ ciał.

Energia może występować jako energia mechaniczna, elektryczna, jądrowa, promienista i inna. Może ona zmieniać swą postać jednakże nie może zniknąć ani być stworzona z niczego. W tym rozdziale ograniczymy się tylko do energii mechanicznej, która może występować pod postacią:

- **energii kinetycznej** E_k związanej z ruchem ciała – im ciało szybciej się porusza tym większa jest jego energia kinetyczna;
- **energii potencjalnej** E_p związanej z konfiguracją (czyli ustawieniem) układu ciał działających na siebie siłami. Jednym z rodzajów energii potencjalnej jest grawitacyjna energia potencjalna związana z odległością ciał przyciągających się siła grawitacji.

Gdy przekazywanie energii odbywa się dzięki przyłożeniu do ciała siły mówimy, że siła wykonuje **pracę** nad ciałem.

Praca W jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana poprzez działanie na ciało siłą.
Gdy energia jest przekazana ciału to praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana to praca jest ujemna.

Praca jest wielkością skalarną, a jej jednostki są takie same jak jednostki energii.

4.1. Praca siły

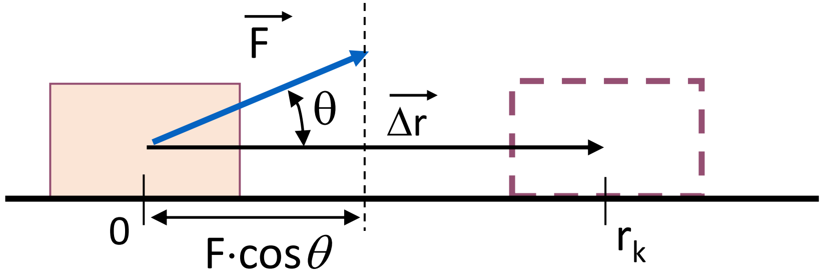
Siła działająca na poruszające się ciało wykonuje pracę nad tym ciałem.

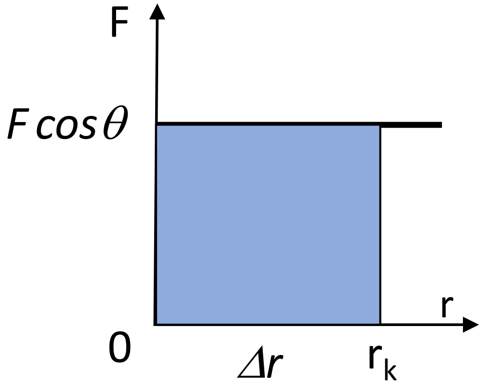
Praca wykonana nad ciałem w czasie jego przemieszczania na drodze Δr przez stałą siłę $\vec{F}$ jest iloczynem skalarnym sił $\vec{F}$ i wektora przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ czyli iloczynem wartości sił F, przemieszczenia Δr i cosinusa kąta θ między kierunkiem działania siły i kierunkiem ruchu.

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cos\theta \cdot \Delta r$$

$$1\ [J] = 1[N]\cdot 1[m] = 1\ [kg\ m^2 s^{-2}]$$

Jednostką pracy w układzie SI jest 1 dżul [J]. Jest to praca jaką wykonuje siła 1 [N] na drodze 1 [m], przebytej w kierunku działania siły.





Geometryczna interpretacja pracy – pole pod krzywą F(r). Jeśli na całym odcinku Δr, na którym praca jest wykonywana, siła F i kąt θ są stałe, to pracę W przedstawia pole prostokąta o podstawie Δr i wysokości $F \cdot \cos\theta$.

Praca wykonana nad ciałem jest wielkością skalarną i może mieć różny znak. Jeśli składowa wektora siły w kierunku wektora przemieszczenia w stosunku do wektora przemieszczenia:

- jest skierowana zgodnie – to praca jest dodatnia ($\theta < 90°$ $W>0$ siły napędowe wykonują pracę);
- jest skierowana przeciwnie – to praca jest ujemna ($\theta > 90°$ $W<0$ siły oporowe wykonują pracę);
- są do siebie prostopadłe - to praca jest równa zero.

4.2. Moc

Jednakowa praca mechaniczna może być wykonana przez różne maszyny w różnym czasie.
Mówimy wówczas, że ta maszyna, która wykonała daną pracę w krótszym czasie ma większą moc.

Mocą nazywamy stosunek pracy W do czasu t zużytego na jej wykonanie i oznaczamy P

Jeżeli w przedziale czasu Δt została wykonana praca ΔW, to średnia moc $P_{śr}$ jest określana:

$$P_{śr} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Mocą chwilową P nazywamy granicę do jakiej zmierza moc średnia $\mathrm{P}_{śr}$, gdy przedział czasu Δt dąży do zera:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

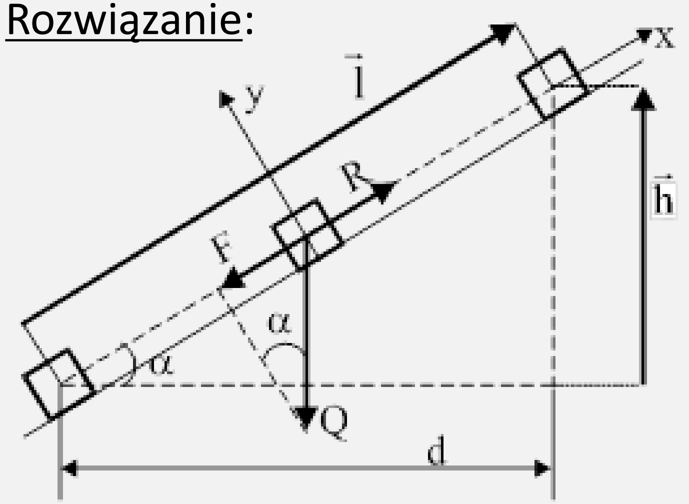
$$1\mathrm{W} = \frac{1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$$

Jednostką mocy w układzie SI jest wat [W].
Moc jest równa jednemu watowi, jeżeli stała siła wykonuje pracę jednego dżula w czasie jednej sekundy.

Przykład 4.1.

Jaką pracę W wykona człowiek przesuwający klocek o masie m = 10 kg z podstawy na szczyt równi pochyłej mającej długość l = 5 m i wysokość h = 3 m. Człowiek przesuwa klocek ze stałą prędkością siłą R równoległą do równi. Oblicz moc człowieka P przy wykonywaniu tej pracy, jeśli czas przesuwania klocka wynosił t = 10 s.

Rozwiązanie:



Ponieważ przesuwanie klocka wzdłuż osi x odbywa się bez przyspieszenia, ruchem jednostajnym, zatem II zasada dynamiki przyjmie postać

$$\sum F = R - F = 0.$$

Z rysunku wynika, że $F = Q \cdot sin\,\alpha$, gdzie $Q = m \cdot g$ to ciężar klocka

a $sin\,\alpha = \frac{h}{l}$,

$$R = mg\frac{h}{l}, \qquad R = 10\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{3\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m}} \qquad R \cong 58{,}8\ \mathrm{N}.$$

$$W = R \cdot l \qquad W = 58{,}8\ \mathrm{N} \cdot 5\ \mathrm{m} = 294\ \mathrm{J}.$$

$$P = \frac{W}{t}, \qquad P = \frac{294\ \mathrm{J}}{10\ \mathrm{s}} = 29{,}4\ \mathrm{W}.$$

Odpowiedź: Człowiek posiadający moc 29,4 W przesuwając klocek na szczyt równi pochyłej wykonał pracę równą 294 J.

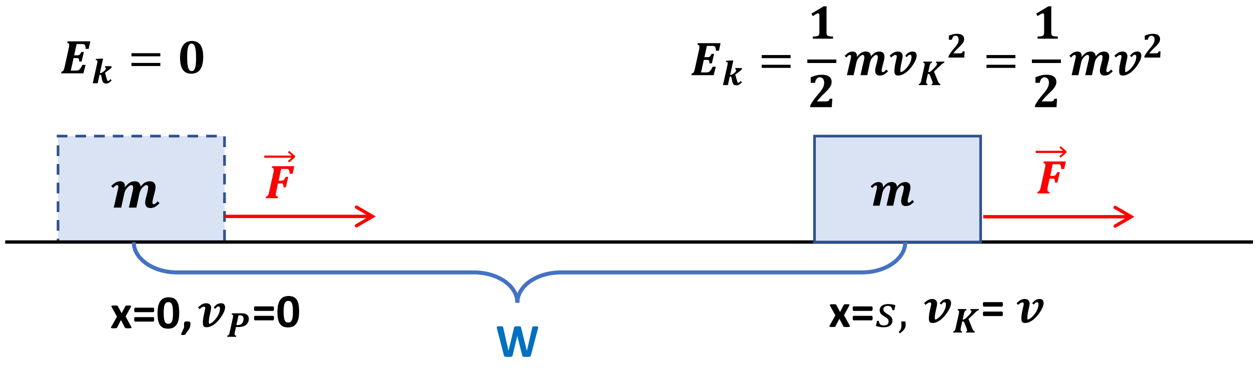
4.3. Energia kinetyczna - równoważność pracy i energii kinetycznej

Energia kinetyczna $\boldsymbol{E_k}$ jest równoważna pracy $\boldsymbol{W}$ jaką wykonuje stała siła $\boldsymbol{F}$ rozpędzając ciało o masie $\boldsymbol{m}$ na drodze $\boldsymbol{s}$ od prędkości początkowej v_P = 0 w punkcie x =0 do prędkości końcowej $v_K = v$ w punkcie x = s.

$$\boldsymbol{E_k = W = F \cdot s}$$

Wychodzimy z drugiej zasady dynamiki Newtona, $F = ma$ oraz z równania na drogę $s = \frac{1}{2}at^2$
i prędkość $v_K = at$ w ruchu jednostajnie zmiennym z prędkością początkową v_P = 0

$$E_k = F \cdot s = ma \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}m{v_K}^2$$

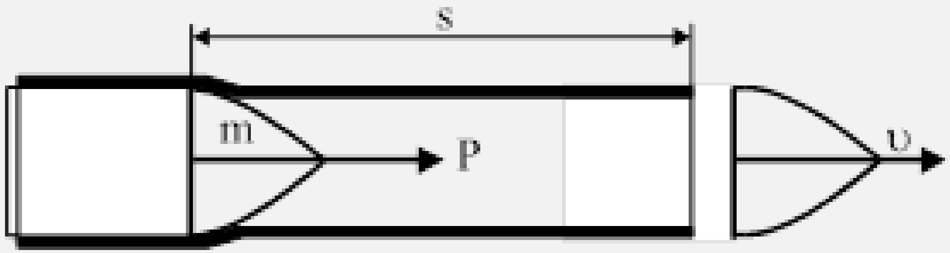


Energia kinetyczna E_k ciała poruszającego się ruchem postępowym równa jest połowie iloczynu masy $\boldsymbol{m}$ ciała przez kwadrat prędkości $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$$

Przykład 4.2.

Oblicz energię kinetyczną pocisku o masie m = 40 kg wystrzelonego z lufy armatniej z prędkością v = 600 m/s. Oblicz średnią siłę parcia P gazów prochowych w lufie, jeżeli długość jej wynosi s = 2 m.



Rozwiązanie:

Energia kinetyczna E_K pocisku wynosi $$E_K = \frac{mv^2}{2}\ .$$

$$E_K = \frac{40\ \mathrm{kg} \cdot (600)^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2} = 7200000\ \mathrm{J}.$$

Energia kinetyczna jaką uzyskał pocisk po opuszczeniu lufy pojawiła się kosztem wykonanej pracy W, którą wykonały gazy prochowe przesuwające pocisk siłą P na dystansie długości lufy s.

$$W = P \cdot s = E_K,$$

$$P = \frac{E_K}{s} = \frac{mv^2}{2s},$$

$$P = \frac{40\ \mathrm{kg} \cdot (600)^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 2\ \mathrm{m}} = 3600000\ \mathrm{N}.$$

Odpowiedź: Energia pocisku wynosi 7,2 MJ, a średnia siła parcia gazów prochowych w lufie 3,6 MN.

4.4. Energia potencjalna - równoważność pracy i energii potencjalnej

Jeżeli ciało ma zdolność wykonywania pracy to mówimy, że ciało posiada energię. Ciało o masie m położone na wysokości h nad pewnym poziomem odniesienia (za który przyjmuje się najczęściej powierzchnię kuli ziemskiej) posiada **energię potencjalną grawitacji E_p**.

Energia ta jest równa pracy jaką wykona siła grawitacji $F_g = -mg$ na drodze $\Delta x = -h$ (przy spadku ciała z wysokości *h*).

$$W = F_g \cdot \Delta x = (-mg)(-h) = mgh$$

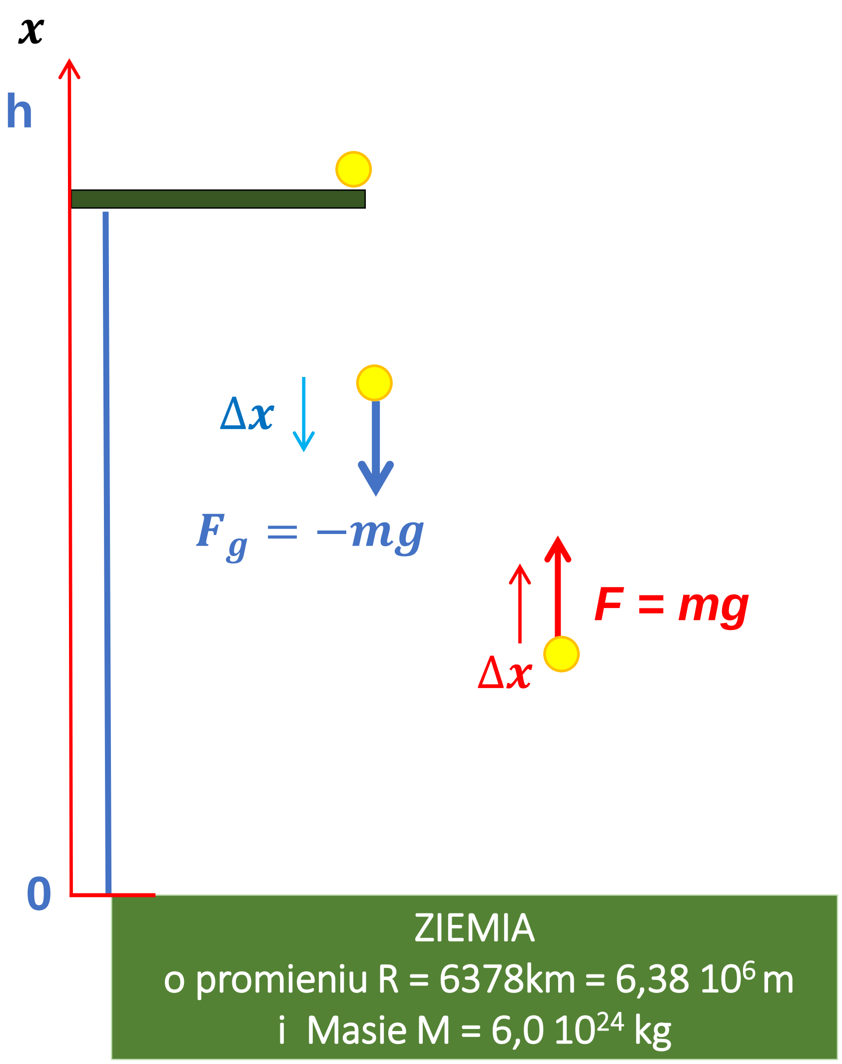
Aby wznieść ciało z poziomu x = 0 na wysokość h musimy działać siłą przeciwną do siły grawitacji $F = mg$ na drodze $\Delta x = h$, czyli

$$W = F \cdot \Delta x = mgh$$

Zatem ciało znajdujące się na wysokości *h* ma zapas energii równy *mgh*. Ten zapas energii nazywamy energią potencjalną w polu sił ciężkości.

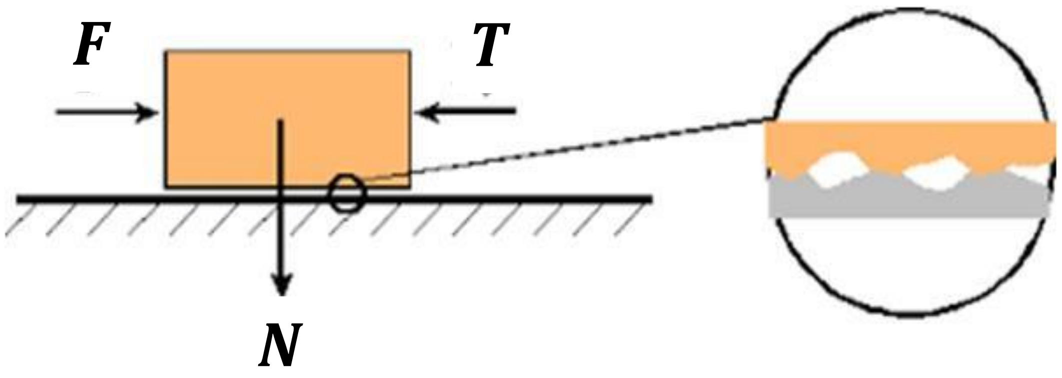
$$E_p = W = mgh$$

Przyjmuje się arbitralnie, że zerowy poziom energii potencjalnej ($E_P = 0$) znajduje się na poziomie dolnym obserwowanego zjawiska. Stąd zmiana energii potencjalnej $\Delta E_P = -W$.
Na poziomie górnym (x = *h*) energia potencjalna ($E_P = mgh$) jest dodatnia i jest tym większa im ciało jest wyżej.



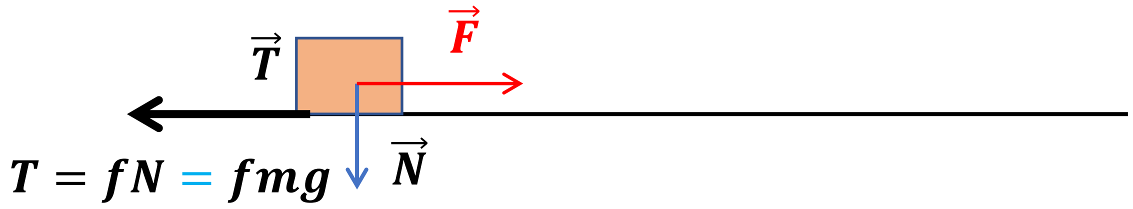
Energia potencjalna = Praca

Tarcie

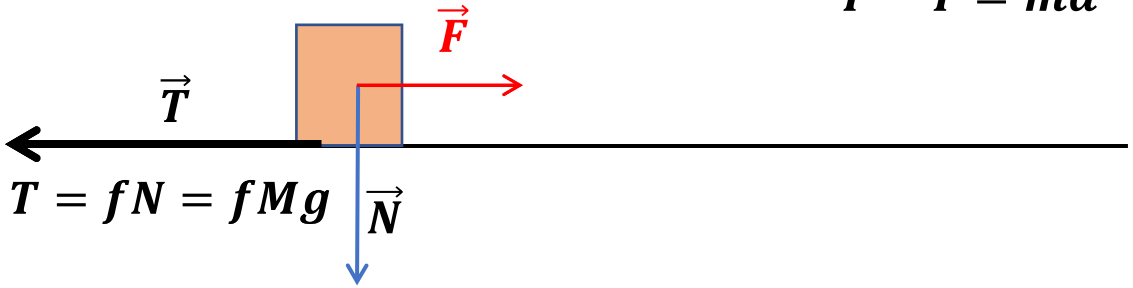


$$f = \frac{T}{N} \Rightarrow T = fN$$

N – siła nacisku
T – siła tarcia
f – współczynnik tarcia



$$\vec{F} - \vec{T} = m\vec{a}$$



Tarcie jest oporem ruchu. Siła tarcia $\vec{T}$:

- występuje w układzie, w którym obiekty się poruszają;
- ma zwrot przeciwny do kierunku ruchu ciała i kierunek równoległy do podłoża;
- zależy od wielkości siły nacisku;
- zależy od rodzaju powierzchni określonego współczynnikiem tarcia *f*;
- nie zależy od wielkości powierzchni trących.

Współczynnik tarcia *f*, zależy od rodzaju i stanu powierzchni trących, natomiast nie zależy od ich wielkości.
Na przykład w czasie deszczu lub na oblodzonej jezdni współczynnik tarcia jest mały. Dlatego zimą posypuje się jezdnię piaskiem, aby zwiększyć współczynnik tarcia. Zwrot siły tarcia jest zawsze przeciwny do zwrotu wektora prędkości.

4.5. Zasada zachowania energii

Energia mechaniczna $\boldsymbol{E_M}$ układu jest sumą jego energii potencjalnej $\boldsymbol{E_p}$ oraz kinetycznej $\boldsymbol{E_k}$. Gdy siła zachowawcza wykonuje pracę $\boldsymbol{W}$ nad jednym z ciał układu zachodzi zamiana energii kinetycznej $\boldsymbol{E_k}$ ciała w energię potencjalną $\boldsymbol{E_p}$ układu lecz ich suma, czyli energia mechaniczna nie może ulegać zmianie.

Zasada zachowania energii mechanicznej: $$\boldsymbol{E_M = E_k + E_p = const}$$

W układzie odosobnionym (takim na który nie działają żadne siły zewnętrzne) w którym wszystkie siły wewnętrzne są zachowawcze energia mechaniczna $\boldsymbol{E_M}$ całego układu pozostaje stała.

Jeżeli uwzględnimy inne rodzaje energii $\boldsymbol{U}$ to energia układu izolowanego może przekształcać się z jednej postaci w inną, jednak energia całkowita w jej różnorodnych formach nie może być ani stworzona z niczego, ani też unicestwiona.

Zasada zachowania energii: $$\boldsymbol{E = E_k + E_p + U = const}$$

Energia całkowita $\boldsymbol{E}$ każdego układu odosobnionego (na który nie działają żadne siły zewnętrzne) we wszelkich jej postaciach, pozostaje stała w czasie.

Siły zachowawcze – siła jest zachowawczą jeśli praca wykonana przez tę siłę nie zależy od drogi a tylko od położenia początkowego i końcowego punktu materialnego (praca po drodze zamkniętej jest równa zero).

Przykład 4.3.

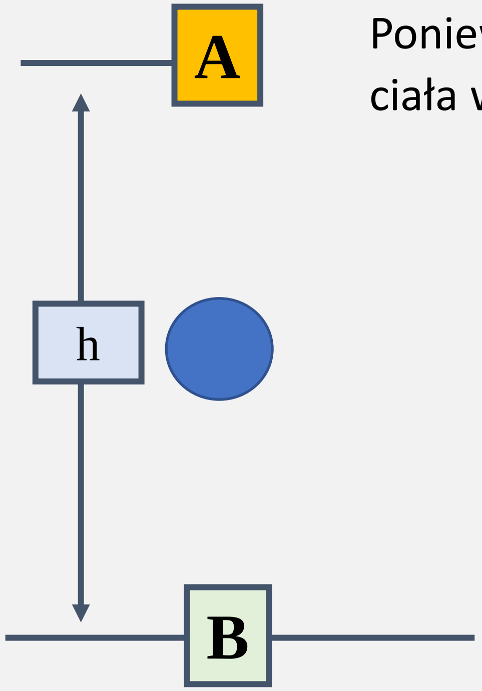
Jaką prędkość osiągnie ciało o masie *m* przy swobodnym spadku z wysokości *h* jeżeli można pominąć opory ruchu?

<u>Rozwiązanie:</u>

Energia kinetyczna $\mathrm{E_k}$ jest związana z ruchem ciała, ciało posiada energię kinetyczną ponieważ porusza się. $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Energia kinetyczna wyraża fakt, że poruszające się ciało jest zdolne go wykonania pracy nad ciałem, w które uderzy.

Energia potencjalna $\mathrm{E_p}$ jest energia wynikająca z położenia lub konfiguracji układu ciał względem siebie $E_p = mgh$



Ponieważ zakładamy, że na ciało nie działają siły oporu to suma energii kinetycznej $\mathrm{E_k}$ i potencjalnej $\mathrm{E_p}$ ciała w polu grawitacyjnym jest stała i nie zależy od punktu, w którym to ciało znajduje się.

$$\boldsymbol{E = E_k + E_p = const}$$

W punkcie A ciało spoczywa i posiada energię potencjalną, czyli

$E_K(A) = 0$, $E_p(A) = mgh$

W punkcie B ciało porusza się z prędkością *v* i nie posiada energii potencjalnej, czyli

$E_K(B) = \frac{mv^2}{2}$, $E_p(B) = 0$

$E_K(A) + E_p(A) = E_K(B) + E_p(B)$ $\Leftrightarrow$ $0 + mgh = \frac{mv^2}{2} + 0$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}$

<u>Odpowiedź:</u> Prędkość w spadku swobodnym nie zależy od masy ciała, a tylko od wysokości z jakiej spada.