3. Dynamika

3.1. Zasady dynamiki Newtona
3.2. Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu
3.3. Układy inercjalne i nieinercjalne
3.4. Środek masy układu ciał
3.5. Siły wewnętrzne i zewnętrzne w układzie ciał
3.6. Zasada zachowania pędu

Galileo Galilei
(1564–1642)

Opisując w rozdziale 2 różne rodzaje ruchu z punktu widzenia kinematyki podawaliśmy ich formalną charakterystykę. W dynamice interesują nas warunki, w jakich poszczególne ruchy powstają, a przede wszystkim przyczyny ich powstawania. Rozpoczniemy od rozważań dynamicznych związanych z ruchem postępowym ciał, które będziemy traktowali jako punkty materialne. Przypomnijmy, że punkt materialny to ciało o masie m, które nie posiada wymiarów geometrycznych.

Izaac Newton
(1642–1727)

- Ustalenie zasad dynamiki było równoznaczne z obaleniem fałszywych poglądów panujących od czasów starożytnych, a dotyczących przyczyn powstawania różnych rodzajów ruchu. Aż do wieku XVII istniał w ówczesnych naukach pogląd, że dla podtrzymania ciała w ruchu jednostajnym niezbędne jest działanie pewnej siły, aby po jakimś czasie ciało się nie zatrzymało.
- Do obalenia tych poglądów przyczyniło się wprowadzenie do nauki w XVI wieku przez Galileusza metody doświadczalnej.
- Badania zapoczątkowane przez Galileusza podjęte zostały następnie przez Newtona, któremu zawdzięczamy ustalenie podstaw dynamiki. Zasady dynamiki podane zostały przez Newtona jako tzw. prawa ruchu.

3.1. Zasady dynamiki Newtona

Pierwsza zasada dynamiki Newtona:

Ciało nie poddane działaniu żadnej siły albo poddane działaniu sił równoważących się pozostaje

- **w spoczynku**

lub

- **porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym dopóki wypadkowa sił zewnętrznych nie zmieni tego stanu.**

Słuszność pierwszej części tej zasady, odnosząca się do przypadku, gdy na ciało nie działa żadna siła, nie może być na Ziemi doświadczalnie sprawdzona, nie możemy bowiem stworzyć na Ziemi takich warunków, aby ciało było wolne od działania jakichkolwiek sił.

Druga część tej zasady nadaje się do doświadczalnego sprawdzenia. Po dokładnym zrównoważeniu sił oporu przez siłę ciągnącą ciało, ciało mające pewną prędkość zachowa tę prędkość niezmienną zarówno co do wartości, jak i co do kierunku, tzn. poruszać się będzie ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Pierwsza zasada dynamiki nosi nazwę **zasady bezwładności**. Przez bezwładność rozumiemy właściwość ciała decydującą o tym, że ciało bez działania sił nie może zmienić ani wartości, ani kierunku swej prędkości. Czyli bez działania sił pozostaje w takim stanie jak było wcześniej: spoczywa jeśli spoczywało, lub porusza się ruchem jednostajnym, jeśli było w jakimkolwiek ruchu.

Druga zasada dynamiki Newtona

Pośrednim wnioskiem z pierwszej zasady dynamiki jest, że wszelkie zmiany prędkości mogą zachodzić jedynie pod działaniem sił. Musi więc istnieć związek między siłą, a zmianami prędkości.

Ta zależność jest treścią **drugiej zasady dynamiki Newtona**.

Przyspieszenie ciała $\vec{a}$ jest wprost proporcjonalne do siły $\vec{F}$, która to przyspieszenie wywołuje

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

gdzie współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność masy ciała m, na którą działa siła $\vec{F}$

Równanie to jest równaniem wektorowym: wektor przyspieszenia $\vec{a}$ ma kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i zwrotem działającej siły $\vec{F}$. Masa m ciała jest miarą jego bezwładności.

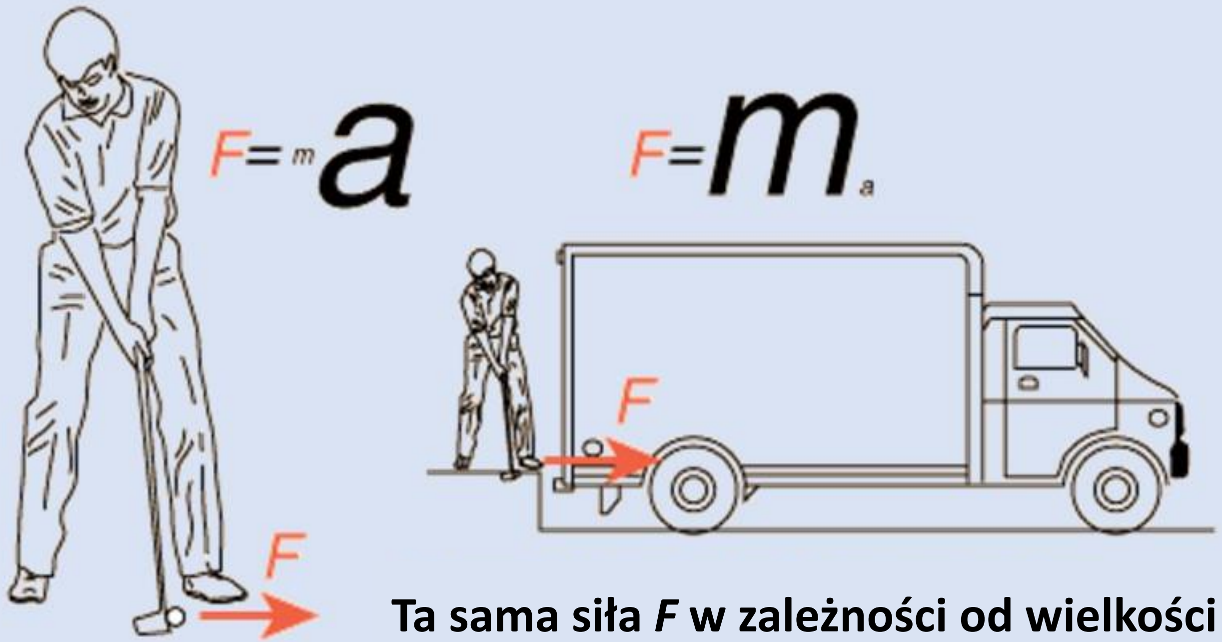
Określenie jednostki siły w układzie SI wynika z równania $\vec{F} = m\vec{a}$. Jednostką siły w układzie SI jest niuton [N] tj. taka siła, która działając na ciało o masie m = 1 kg nadaje mu przyspieszenie równe a = 1 m/s^2.

$$1\,N = 1\,kg \cdot 1\frac{m}{s^2}$$

Druga zasada dynamiki Newtona – przyczyna zmiany prędkości ciała

Z równania $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}$ wynika, że:

- siła $\vec{\boldsymbol{F}}$, która jest wypadkową siłą (sumą wektorową wszystkich sił) działających na ciało o masie $\boldsymbol{m}$ zmienia jego przyśpieszenie, czyli jest przyczyną zmiany prędkości ciała,
- o proporcjonalności siły do przyspieszenia mówimy w przypadku oddziaływania różnych sił na tę samą masę $\boldsymbol{m = const}$,
- jeżeli natomiast tą samą siłą $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{const}$ działać będziemy kolejno na ciała o różnych masach m_1, m_2..., to obowiązywać będą zależności $F = m_1 a_1 = m_2 a_2 = \ldots$, $\frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{m_2}} = \frac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a_1}}$.



Pod działaniem tej samej siły $\boldsymbol{F}$ ciało o małej masie $\boldsymbol{m}$ uzyska większe przyspieszenie niż ciało o dużej masie $\boldsymbol{m}$ czyli

przyspieszenia uzyskane przez różne ciała pod działaniem tej samej siły $\boldsymbol{F}$ są odwrotnie proporcjonalne do mas tych ciał.

Ta sama siła *F* w zależności od wielkości masy ciała wywołuje odpowiednio różne przyspieszenie

Ciężar, ciężar właściwy ciała

Siła z jaką Nasza Planeta ZIEMIA przyciąga dane ciało, nazywamy jego ciężarem.

- Ciężar jest więc wielkością wektorową i jest zawsze skierowany ku środkowi **ZIEMI**.
- Ruch ciała o masie m zachodzący pod wpływem działania ciężaru (siły) $\vec{\boldsymbol{Q}}$ nazywa się swobodnym spadkiem ciała i jest ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyspieszeniem ziemskim $\vec{\boldsymbol{g}}$.
- Druga zasada dynamiki Newtona opisująca ten ruch ma postać:

$$\vec{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}}$$

- **Ciężar ciała $\vec{\boldsymbol{Q}}$** jest zależny od wartości przyspieszenia ziemskiego $\boldsymbol{g}$ i zmienia się ze zmianą położenia geograficznego i wysokości nad powierzchnią Ziemi.
- Zwykle (w obliczeniach) przyjmuje się średnią wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.
- Stosunek ciężarów dwóch ciał jest równy stosunkowi ich mas.

$$\frac{\boldsymbol{Q_1}}{\boldsymbol{Q_2}} = \frac{\boldsymbol{m_1 g}}{\boldsymbol{m_2 g}} = \frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{m_2}}$$

Zależność powyższa umożliwia mierzenie mas za pomocą wagi szalkowej, na której w rzeczywistości porównuje się ciężary tych mas.

Stosunek wartości ciężaru $\boldsymbol{Q}$ danego ciała do jego objętości $\boldsymbol{V}$, nazywamy jego ciężarem właściwym γ.

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{V}}$$

Jednostką ciężaru właściwego $\boldsymbol{\Upsilon}$ ciała jest $[\mathrm{N/m^3}]$.

Ogólne ujęcie drugiej zasady dynamiki Newtona

Do wyrażenia $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}$ podstawiamy znane z kinematyki wyrażenie na przyspieszenie $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_1}{\boldsymbol{t}_2 - \boldsymbol{t}_1}$ i otrzymujemy

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

- Iloczyn $\vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{t}$ (siły $\vec{\boldsymbol{F}}$ i czasu $\boldsymbol{t}$ jej działania) nazywamy popędem siły. Popęd siły jest to wektor o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem wektora siły $\vec{\boldsymbol{F}}$ działającej na ciało i module Ft.
- Iloczyn $\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$ (masy $\boldsymbol{m}$ i prędkości $\vec{\boldsymbol{v}}$ ciała) nosi nazwę pędu. Pęd $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$ ciała jest wektor o kierunek i zwrocie wektora prędkości $\vec{\boldsymbol{v}}$ tego ciała i module mv.

Równanie powyższe, które możemy zapisać w postaci $\vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{\boldsymbol{F}}\Delta\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ wyraża,

że wektor popędu siły $\vec{\boldsymbol{F}}\Delta\boldsymbol{t}$ jest równy wektorowemu przyrostowi pędu $\boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{p}}$ wywołanemu przez tę siły, czyli:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{\Delta t}}$$

Gdy w czasie $\Delta t = t_2 - t_1$ wektor siły $\vec{\boldsymbol{F}}$ ulega zmianie, to powyższe wyrażenie przedstawia siłę średnią w czasie Δt jej działania.

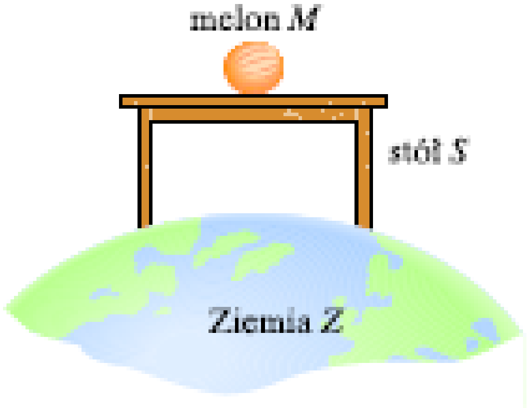
Równanie wyrażające siłę $\vec{\boldsymbol{F}}$ jako przyrost pędu $\boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{p}}$ względem przyrostu czasu $\Delta\boldsymbol{t}$ jest bardziej ogólną postacią drugiej zasady dynamiki. Należy pamiętać, że druga zsada dynamiki o postaci $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}$ jest słuszna jedynie wtedy, gdy ciało porusza się z prędkościami małymi w porównaniu z prędkością światła dla których masa $\boldsymbol{m}$ nie zależy od jego prędkości $\boldsymbol{v}$.

Trzecia zasada dynamiki – zasada akcji i reakcji

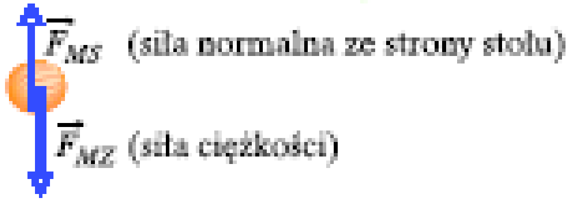
Jeżeli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$ równą co do wartości,

lecz przeciwnie skierowaną: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

- **Siły akcji i reakcji działają na różne ciała.**
- **Obie siły występują równocześnie**, toteż nie można powiedzieć, która z nich jest siłą akcji, a która siłą reakcji, co widać wyraźnie np. dla przyciągania grawitacyjnego dwóch ciał.



a)

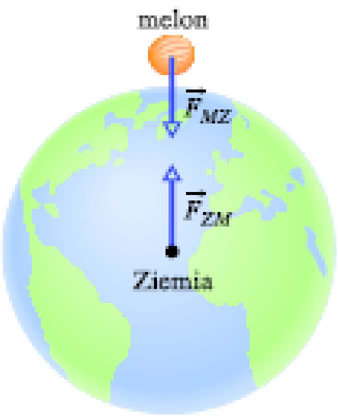


Siły działające na Melon:

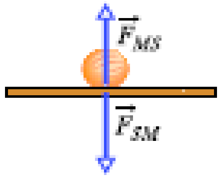
F_{MS} – siła normalna działająca na melon od strony stołu

F_{MZ} – siła ciężkości melonu (z jaką Ziemia przyciąga melon)

Para sił F_{MS} i F_{MZ}
nie są
siłami akcji i reakcji
(działają na to samo ciało)



c)



d)

Para sił F_{ZM} i F_{MZ}

F_{MZ} – siła ciężkości melonu (z jaką Ziemia przyciąga melon)

F_{ZM} – siła ciężkości Ziemi (z jaką melon przyciąga Ziemię)

oraz

Para sił F_{MS} i F_{SM}

F_{MS} – siła normalna działająca na melon od strony stołu

F_{SM} – siła normalna działająca na stół od strony melonu

są siłami akcji i reakcji

Zasada akcji i reakcji - oddziaływania ciała A z równią pochyłą

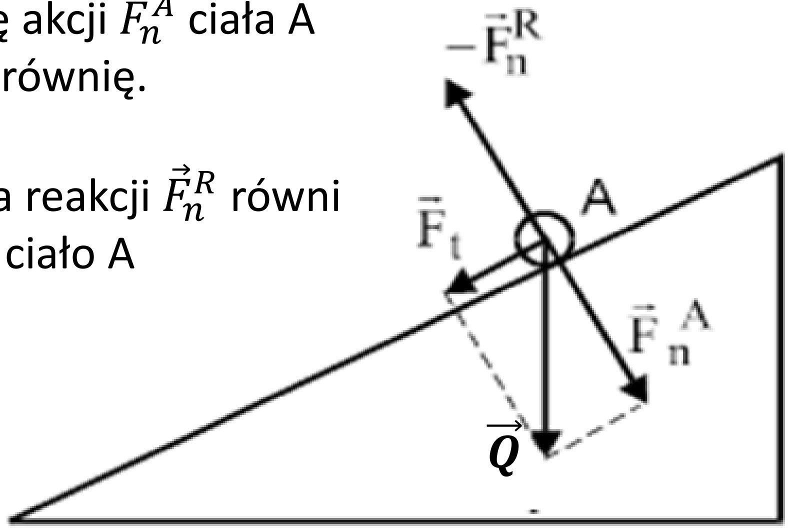
Siły akcji i reakcji występują równocześnie, toteż nie można powiedzieć, która z nich jest siłą akcji, a która siłą reakcji, co widzieliśmy wyraźnie np. w przypadku przyciągania grawitacyjnego dwóch ciał (melona i Ziemi).

Czasem jednak umownie odróżnia się siłę pierwotną – siłę akcji i siłę wtórną – siłę reakcji,
np. w przypadku ciała spoczywającego na innym ciele np. melonu na stole czy ciała A na równi pochyłej.
Nacisk melonu na stół możemy potraktować jako siłę akcji, a oddziaływanie stołu na melon jako siłę reakcji.
Zestawienie tych sił w przypadku ciała A na równi pochyłej przedstawia poniższy rysunek:

Siły działające na ciało A znajdujące się na równi pochyłej

Siłę akcji $\vec{F}_n^A$ ciała A na równię.

Siła reakcji $\vec{F}_n^R$ równi na ciało A



Siłę ciężkości $\vec{Q}$ ciała A rozkładamy na dwie składowe:

- składową styczną $\vec{F}_t$;
- składową normalną $\vec{F}_n^A$.

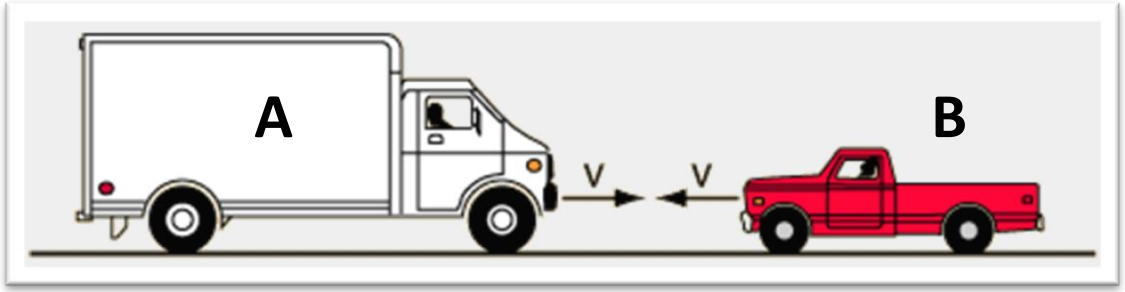
Siłę normalną $\vec{F}_n^A$ możemy uznać jak siłę naciskającą (akcji) ciała A na równię. Sile normalnej $\vec{F}_n^A$ odpowiada jej siła reakcji $\vec{F}_n^R$.
Druga składowa siły ciężkości $\vec{Q}$, a mianowicie składowa styczna $\vec{F}_t$, jest siłą wprawiającą ciało w ruch po równi.
Chcąc utrzymać to ciało w spoczynku, należy tę składową zrównoważyć dodatkową siłą, również styczną do równi, równą co do wartości $\vec{F}_t$, lecz przeciwnie skierowaną.

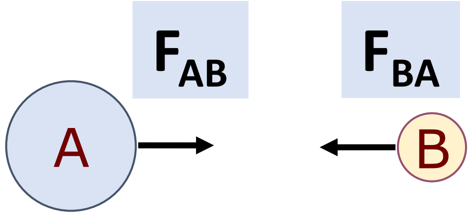
III zasada dynamiki Newtona – wzajemne oddziaływanie dwóch ciał

W przyrodzie nie ma sił izolowanych

- dla każdej zewnętrznej siły działającej na ciało występuje siła równa co do wartości, ale przeciwnie skierowana, którą dane ciało wywiera na ciało, będące źródłem siły zewnętrznej

$$\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}$$





- dla sił wewnętrznych, sile jednej części układu przeciwdziała siła reakcji innej części układu

- wypadkowa siła w izolowanym układzie jest równa zeru. Tylko siły zewnętrzne mogą być przyczyną ruchu układu

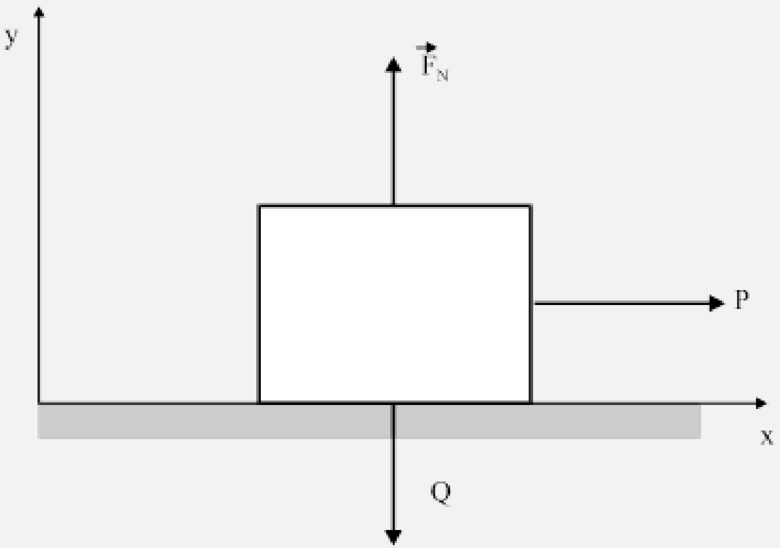
Podczas zderzenia siła z jaka mały samochód B działa na duży samochód A jest takiej samej wartości.

Przykład 3.1.

Rozważmy klocek o masie m = 2 kg ciągnięty wzdłuż gładkiej poziomej płaszczyzny przez siłę $\vec{P}$. Ile wynosi siła reakcji $\overrightarrow{F_N}$ wywierana na klocek przez gładką powierzchnię?

Oblicz siłę P, która nada klockowi poziomą prędkość $v_x = 4\,m/s$ w czasie t = 2 s, jeżeli w chwili początkowej klocek znajduje się w spoczynku.

<u>Rozwiązanie</u>:



Na klocek działają siły; $\vec{P}$ - ciągnąca; $\overrightarrow{Q}$ - siła ciężkości; $\overrightarrow{F_N}$ - siła reakcji wywierana na klocek przez powierzchnię.

Z drugiej zasady dynamiki wiemy, że $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

co można zapisać w postaci $\sum F_x = ma_x$ i $\sum F_y = ma_y$.

Ponieważ $\sum F_y = F_N - Q = 0$ to $a_y = 0$ i $F_N = Q$

$$F_N = m \cdot g = 2kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 19{,}62\ N$$

W kierunku osi X przyspieszenie a_x wynosi: $a_x = \dfrac{v_x - 0}{t}$; $a_x = \dfrac{4\frac{m}{s}}{2\ s} = 2\dfrac{m}{s^2}$

a $\sum F_x = P,$ więc $P = m \cdot a_x$ czyli ostatecznie $P = 2\ kg \cdot 2\dfrac{m}{s^2} = 4N.$

<u>Odpowiedź:</u> Siła reakcji podłoża wynosi F_N = 19,62 N, natomiast szukana siła pozioma P = 4 N.

3.2. Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu

Do opisu ruchu jednostajnego po okręgu ($r = const$)

punktu materialnego **A** z punku widzenia kinematyki stosujemy:

r - promień wodzący,

θ - drogę kątową (położenie kątowe),

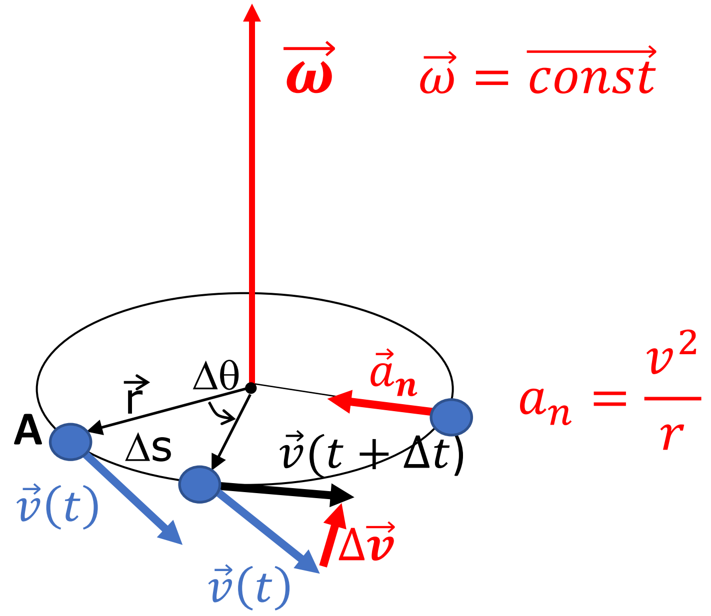
$\Delta\theta$ - przyrost drogi kątowej w czasie Δt,

$\vec{\omega}$ - prędkość kątową jako wektor o kierunku prostopadłym do płaszczyzny okręgu i module $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

s - drogę liniową,

Δs - przyrost drogi liniowe w czasie Δt, $\Delta s = \Delta\theta \cdot r$

$\vec{v}$ - prędkość liniową jako wektor o kierunku stycznym do okręgu i module $v = \omega \cdot r = const$



$\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ - przyrost wektora prędkości $\vec{v}(t)$ po torze krzywoliniowym w czasie Δt, $\Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$

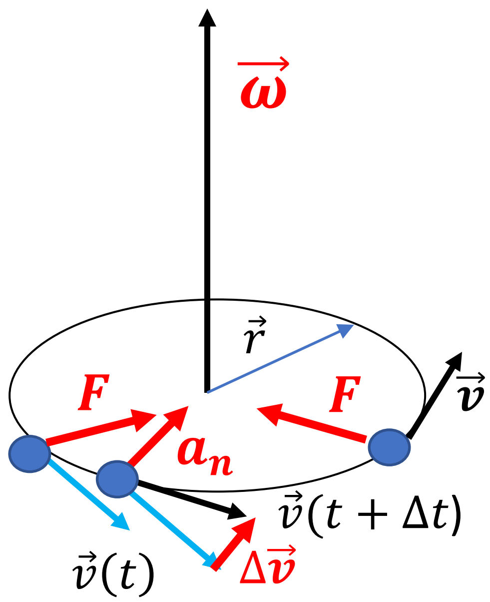
$\vec{a}$ - przyspieszenie wektora prędkości $\vec{v}$ po torze krzywoliniowym $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Jeżeli Δt dąży do zera to wektor przyspieszenia $\vec{a} = \vec{a}_n$ jest prostopadły do stycznej w danym punkcie toru.

Aby ciało mogło się poruszać ruchem jednostajnym ($\boldsymbol{v = const}$) po okręgu ($\boldsymbol{r = const}$)
musi na niego działaś przyspieszenie dośrodkowe a_n prostopadłe (normalne) do toru ciała,
które odpowiada za zmiany kierunku wektora prędkości ciała.

$$\boldsymbol{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

Siła dośrodkowa w ruchu punktu materialnego po okręgu



Rozważmy ruch jednostajny po okręgu punktu materialnego o masie m z punku widzenia dynamiki.

Zgodnie z I zasadą dynamiki tylko ruch jednostajny prostoliniowy (gdy, $\vec{v}=\overrightarrow{const}$) może istnieć bez działania sił. Ruch jednostajny po okręgu wymaga już istnienia pewnej siły F bo wektor prędkości $\vec{v}(t+\Delta t)$ w chwili $t+\Delta t$ chociaż ma tą samą wartość v co wektor $\vec{v}(t)$ w poprzedniej chwili t to ma inny kierunek, a więc w czasie Δt nastąpił przyrost prędkości $\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$. Według II zasady dynamiki wartość liczbowa tej siły F wyraża się zależnością $F=ma$, tak więc przyspieszenie $\boldsymbol{a}$ i siłę $\boldsymbol{F}$ w ruchu jednostajnym po okręgu możemy zapisać:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_n}=\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{r}; \qquad \boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{r}$$

Kierunek tej siły jest zgodny z kierunkiem przyspieszenia $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_n}$, tak więc siła ta działa wzdłuż promienia r do środka koła. Stąd pochodzi nazwa siły dośrodkowe.

- Gdy kamień przymocowany do sznurka wprawiamy w ruch po okręgu, to siłę dośrodkową na kamień wywiera nasza ręka za pośrednictwem napiętego sznurka.
- Jeśli przyjmiemy, że Księżyc krąży dokoła Ziemi po torze kołowym, to siłę dośrodkową stanowi przyciąganie grawitacyjne Ziemi.

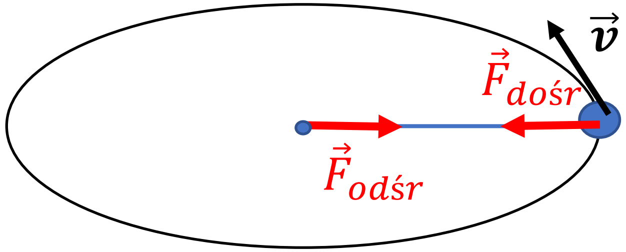
Siła odśrodkowa w ruchu punktu materialnego po okręgu

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki
działaniu siły dośrodkowej $\vec{F}_{dośr}$ na ciało krążące po okręgu, musi towarzyszyć działanie siły odśrodkowej $\vec{F}_{odśr}$ na tzw. „więzy".

Przez więzy rozumiemy te ciała, które wymuszają ruch po okręgu.

W naszych przykładach takimi więzami będą to:

- ręka wprawiająca kamień w ruch za pośrednictwem sznurka,
- Ziemia przyciągająca Księżyc.



Siła odśrodkowa $\boldsymbol{F}_{odśr}$ jest równa co do wartości sile dośrodkowej $\boldsymbol{F}_{dośr}$, lecz ma zwrot przeciwny:

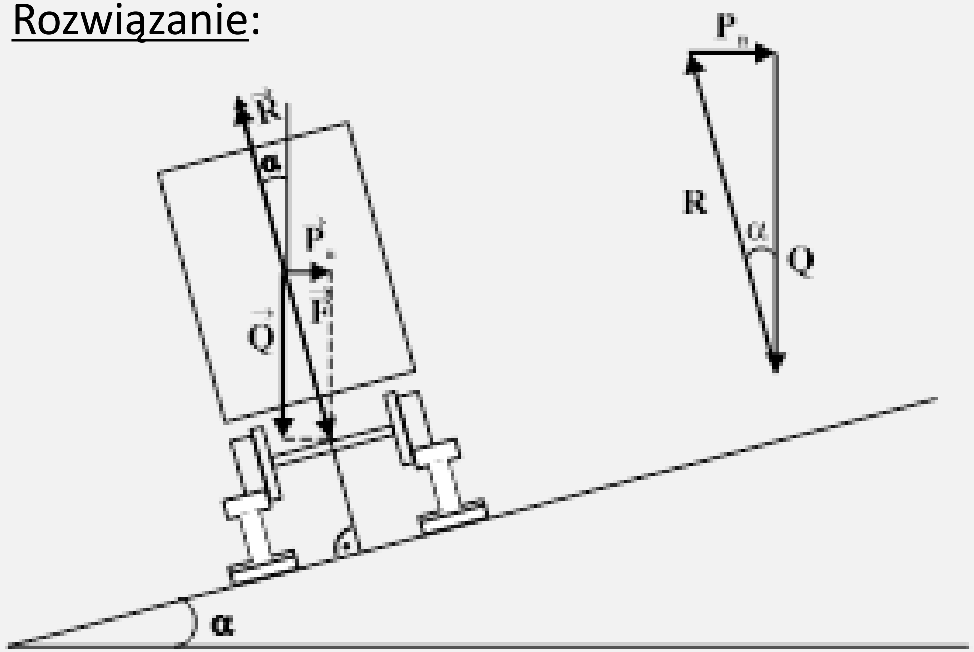
$$\vec{\boldsymbol{F}}_{dośr} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{odśr}$$

Siła dośrodkowa (działająca na ciało) nie równoważy się z siłą odśrodkową (działającą na więzy), gdyż obie siły działają na różne ciała.

Przykład 3.2.

Promień zakrętu toru kolejowego wynosi r = 100 m. Pod jakim kątem α ma być nachylony tor do poziomu, aby nacisk pociągu F na tor był prostopadły do toru (koła pociągu nie działają wówczas na płaszczyzny boczne szyn i nie występuje zjawisko zrzucania wagonów z toru), jeżeli prędkość pociągu na zakręcie wynosi v = 36 km/godz.

<u>Rozwiązanie</u>:



Rozpatrujemy jeden wagon: m - masa wagonu; $\vec{Q}$ - ciężar wagonu; $\overrightarrow{P_n}$ - siła odśrodkowa; $\vec{R}$ - siła wypadkowa reakcji szyn na koła wagonu; $\vec{F}$ - siła nacisku wagonu na tor.

Siła $\vec{F}$ będzie prostopadła do płaszczyzny toru, gdy kąt między siłami $\vec{Q}$ i $\vec{F}$ będzie równy kątowi α nachylenia szyn:

$$tg\,\alpha = \frac{P_n}{Q}, \qquad \text{gdzie} \quad Q = m \cdot g.$$

Reakcję odśrodkową (siłę odśrodkową) można opisać wzorem:

$$P_n = m \cdot a_n\,, \quad \text{gdzie} \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

Czyli otrzymujemy $\quad tg\,\alpha = \dfrac{m\dfrac{v^2}{r}}{mg} = \dfrac{v^2}{r \cdot g},$

$$v = 36\,\frac{km}{godz} = \frac{36000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s},$$

$$tg\,\alpha = \frac{100\,\dfrac{m^2}{s^2}}{100\,m \cdot 9{,}81\,\dfrac{m}{s^2}} \approx 0{,}1\,; \quad \alpha \approx 0{,}1\text{ rad}$$

<u>Wniosek:</u> Kąt nachylenia toru na zakręcie nie zależy od masy m jadącego pociągu, a zależy jedynie od jego prędkości v i promienia krzywizny toru r.

<u>Odpowiedź:</u> Kąt nachylenia toru do poziomu wynosi około 0,1 rad.

3.3. Układy inercjalne i nieinercjalne

Ruch jest **zjawiskiem względnym** i może być rozpatrywany jedynie względem innego ciała lub układu ciał.

Położenie rowerzystek można określi względem: ulicy, budynków, idących ulicą ludzi, jadących pojazdów czy względem siebie nawzajem.
Ruch rowerzystek można opisać poprzez podanie ich położenie w określonej chwili czasu w jakimś wybranym układzie odniesienia.

Układ odniesienia jest to układ współrzędnych dowiązany do pewnego ciała lub układu ciał, powinien on być zaopatrzony w zegar do pomiaru czasu. Powinien być tak wybrany, aby upraszczać opis danego zagadnienia.

Z pierwszej zasady dynamiki wynika, że jeśli na ciało nie działają żadne siły lub działają siły zrównoważone, to ciało jest nieruchome lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
Ponieważ ruch jest zmianą położenia ciała względem układu odniesienia, możemy zapytać, czy w każdym układzie odniesienia będzie spełniona I zasada dynamiki Newtona. Otóż okazuje się, że I zasada dynamiki Newtona obowiązuje tylko w tzw. **inercjalnych układach odniesienia**.

Do opisu ruchu służą:

- **układy inercjalne - układy w których I zasada dynamiki Newtona jest spełniona;**
- **układy nieinercjalne – to te w których I zasada dynamiki Newtona nie jest spełniona.**

Układy inercjalne - transformacja Galileusza

Według Galileusza:

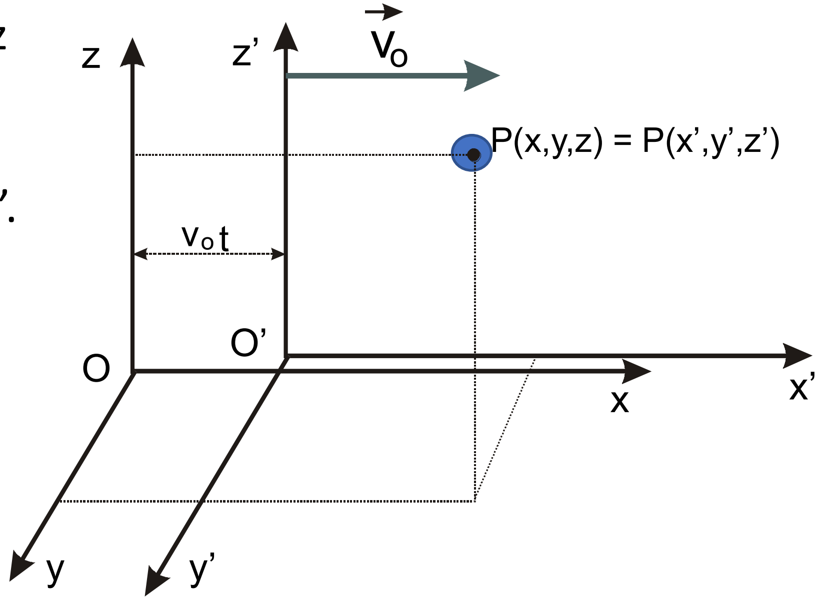
- istnieje absolutna przestrzeń w której to przestrzeni ciała (np. układy Oxyz i O'x'y'z') są "zanurzone",
- istnieje absolutny czas płynący wszędzie (np. w układach Oxyz i O'x'y'z') jednakowo i niezależnie od niczego.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona nie jest prawem przyrody, lecz postulatem istnienia w przyrodzie układu inercjalnego, czyli takiego układu odniesienia w którym prawa mechaniki Newtona obowiązują.

Układ związany z Ziemią jest dobrym przybliżeniem układu inercjalnego (bo przyśpieszenie związane z ruchem obrotowym Ziemi jest bardzo małe).

- Rozpatrzmy dwa układy odniesienia jeden (np. związany z Ziemią), nieruchomy Oxyz i drugi O'x'y' poruszający się względem układu Oxyz ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $\vec{v}_0$. Układy te orientujemy tak, aby osie Ox i O'x' pokrywały się i aby kierunek tych osi pokrywał się z kierunkiem ruchu układu O'x'y'.
- Przyjmujmy ponadto, że osie Oy i O'y' oraz Oz i O'z' są do siebie równoległe oraz w obydwu układach odniesienia czas płynie jednakowo, tzn. $t' = t$ oraz, że w chwili t = 0 układy pokrywają się.
- Chcemy opisać ruch punktu materialnego **P** z punktu widzenia obserwatora związanego z układem „nieruchomym" Oxyz i obserwatora związanego z układem 0'x'y' poruszającym się z prędkością $\vec{v}_0$.

  Pomiędzy współrzędnymi punktu P w obu układach istnieją następujące związki:



$$x' = x - v_0 t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t$$

- zwane **transformacją (przekształceniem) Galileusza**

Wnioski z transformacji Galileusza

Zależności wiążące współrzędne przestrzenne x, y, z i czas t z jednego **układu odniesienia** („spoczywającego”) do drugiego, poruszającego się **ruchem jednostajnym prostoliniowym** względem pierwszego noszą nazwę **transformacji Galileusza**.

$$x' = x - v_0 t,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t = t$$

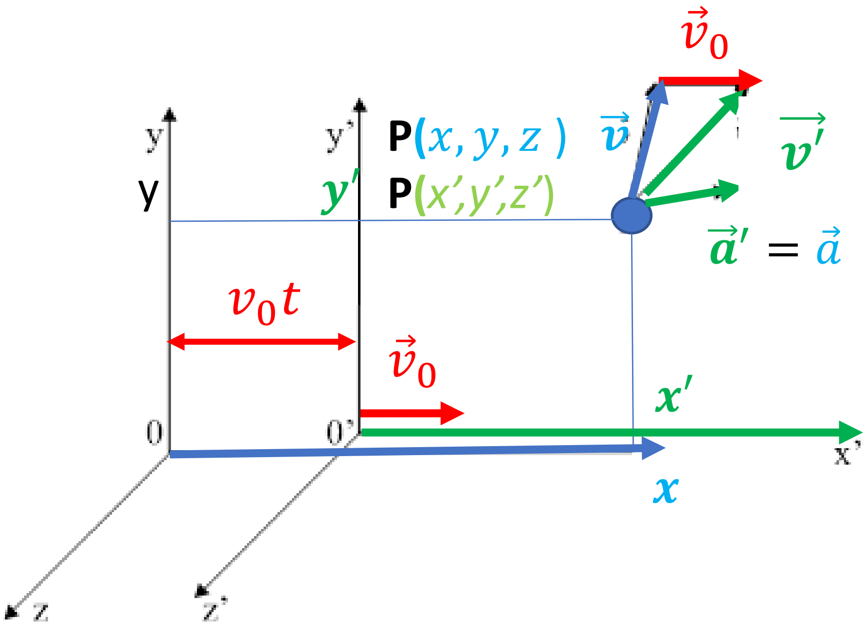
Wzory transformacyjne Galileusza

Z transformacji Galileusza wynika, że w obu układach **Oxyz i O'x'y'z'**:

- prędkości $\overrightarrow{v'}$ i $\vec{v}$ poruszającego się ciała są różne ($\overrightarrow{v'} \neq \vec{v}$) , natomiast
- przyspieszenie jest jednakowe $\overrightarrow{a'} = \vec{a}$, czyli
- przyspieszenie jest niezmiennikiem transformacji Galileusza.

Oznacza to, że siły działające na ciało są w układach inercjalnych jednakowe.
Można powiedzieć bardziej ogólnie, że

Prawa mechaniki są niezmiennicze przy przejściu od jednego układu inercjalnego do drugiego układu inercjalnego.



Stwierdzenie powyższe nosi nazwę zasady względności Galileusza.
Z zasady tej wynika, że nie można za pomocą doświadczeń mechanicznych wykryć, czy układ znajduje się w stanie spoczynku, czy też porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Pierwsza zasada dynamiki postuluje istnienie układu inercjalnego. Jednak taki układ odniesienia jest trudno zrealizować w praktyce. Układ odniesienia związany z Ziemią nie jest układem inercjalnym, gdyż Ziemia wykonuje ruch wirowy wokół własnej osi i ruch obrotowy wokół Słońca. Również układy odniesienia związane z gwiazdami nie są układami inercjalnymi, gdyż gwiazdy także wykonują ruchy niejednostajne. Jednak przy omawianiu wielu zjawisk fizycznych układy te można traktować w przybliżeniu jako inercjalne.

Układy nieinercjalne – siła bezwładności

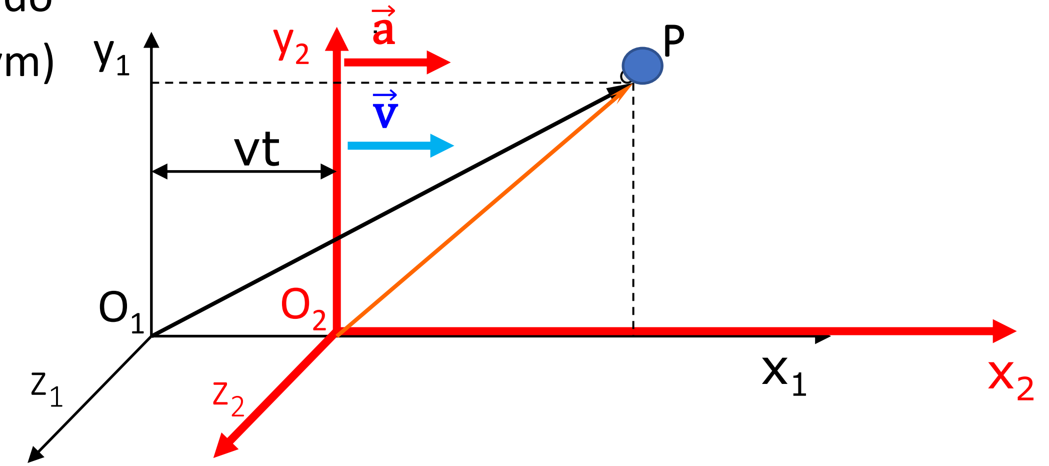
Dwa układy odniesienia $O_1x_1y_1z_1$ i $O_2x_2y_2z_2$ poruszają się względem siebie ruchem niejednostajnym prostoliniowym z prędkością $\vec{v}$ i przyspieszeniem $\vec{a}$.

W układzie nieinercjalnym (np. w ruszającej z przyspieszeniem $\vec{a}$ windzie) do siły $\vec{F}$ rzeczywiście działających na ciało o masie m (w układzie inercjalnym)

$$\vec{F} = m\vec{a}_1$$

trzeba dodać siłę bezwładności

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}$$



Zmodyfikowana druga zasada dynamika Newtona dla układu nieinercjalnego poruszającego się ruchem niejednostajnym prostoliniowym z przyspieszeniem $\vec{a}$

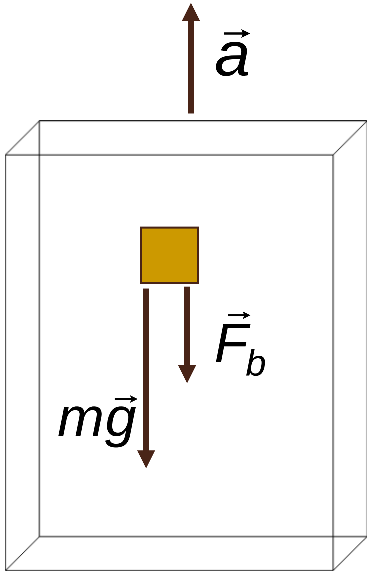
$$m\vec{a}_2 = \vec{F} + \vec{F}_b$$

$$m\vec{a}_2 = m\vec{a}_1 - m\vec{a}$$

Przyspieszenie $\vec{a}$ (i siła $\vec{F}$) nie są niezmiennicze przy przejściu z jednego układu $O_1x_1y_1z_1$ (nieruchomego) do układu $O_2x_2y_2z_2$ poruszającego ruchem niejednostajnym prostoliniowym z prędkością $\vec{v}$ i przyspieszeniem $\vec{a}$

Układy nieinercjalne – siła bezwładności

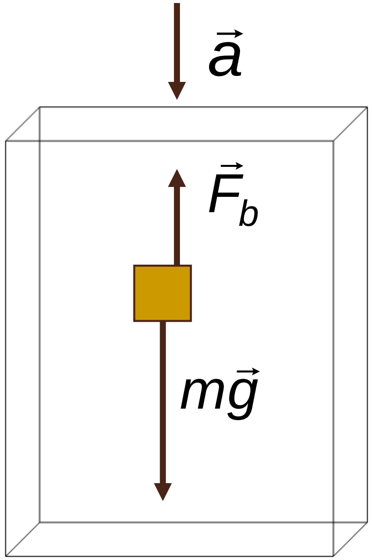
Człowiek o masie m (ważący w mieszkaniu $\vec{F} = m\vec{g}$) wsiada do windy i staje na wadze umieszczonej w windzie:



Winda rusza w „górę” ruchem prostoliniowym z przyspieszeniem $\vec{a}$

$$\vec{F}_2 = \vec{F} + \vec{F}_b$$

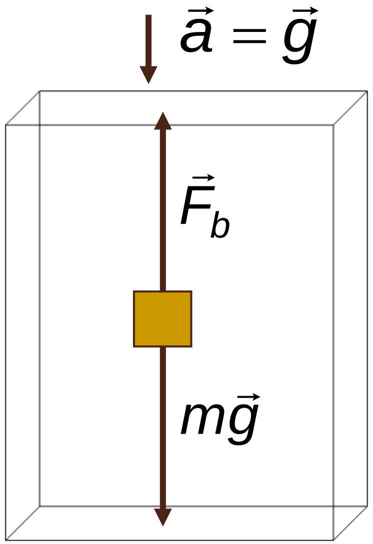
człowiek waży więcej.



Winda rusza w „dół” ruchem prostoliniowym z przyspieszeniem $\vec{a}$

$$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_b$$

człowiek waży mniej.



Winda rusza w „dół” ruchem prostoliniowym z przyspieszeniem $\vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{F}_2 = 0$$

człowiek osiąga stan nieważkości.

3.4. Środek masy układu ciał

Każde ciało można traktować jako układ złożony z dwu lub większej liczby cząstek o pewnych masach. Rozpatrujemy układ składający się z N punktów materialnych o masach m_1, m_2,... m_i,... ,m_N umieszczonych odpowiednio w punktach P_1, P_2... P_i,... ,P_N na które działają pewne siły $\vec{F}_1, \vec{F}_2, .. \vec{F}_N$.

Rozłożenie masy w tym układzie określa położenie środka masy *S* układu:

- **środek masy *S* układu** pokrywa się ze środkiem ciężkości ciała, w którym to punkcie możemy uważać, że jest skupiona cała masa $\boldsymbol{m}$ układu $$m = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = \sum m_i$$
- można uważać, że **w środku masy *S* układu jest przyłożona wypadkowa $\vec{F}$ wszystkich sił działających na poszczególne masy układu** $$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum \vec{F}_i$$
- **środek masy S układu** ma tę właściwość, że iloczyn całkowitej masy $\boldsymbol{m}$ (skupionej w środku masy) i przyspieszenie środka masy $\vec{\boldsymbol{a}}_s$ równa się sumie wszystkich sił $\vec{\boldsymbol{F}}$ działających na poszczególne punkty układu. $$\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}_s = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \vec{\boldsymbol{F}}$$

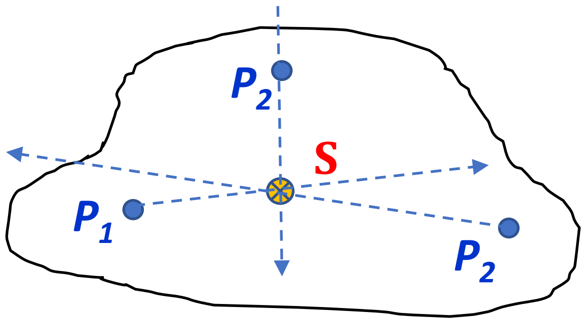
Środek masy ciała porusza się tak, jakby w nim była skupiona całkowita masa układu poddana działaniu wypadkowej wszystkich sił działających na układ.

Stwierdzenie powyższe jest słuszne zarówno w odniesieniu do układu sztywnego o niezmiennych wzajemnych odległościach poszczególnych cząstek, jak również dla układu, w którego skład wchodzą cząstki wykonujące dowolne ruchy pod wpływem sił wewnętrznych.

Wyznaczanie środka masy układu ciał

Płaską płytkę dowolnego kształtu zawieszamy na „sznurku”, zaczepiając go kolejno w różnych punktach płytki, np. $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ i każdorazowo wykreślamy prostą stanowiącą przedłużenie sznurka, a więc odpowiadającą kierunkowi działania siły ciężkości. Wszystkie proste przecinają się w jednym punkcie **S**.

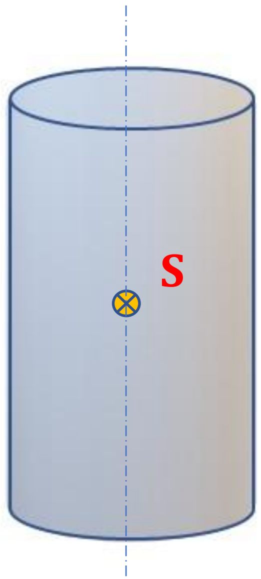
Punkt **S** określa środek masy ciała, który pokrywa się ze środkiem ciężkości.



Położenie środka masy **S** układu zależy od kształtu ciała i rozmieszczenia w nim masy.

Dla brył o regularnym kształcie środek masy pokrywa się ze środkiem symetrii.

Na przykład środek masy jednorodnej kuli leży w jej środku geometrycznym, środek masy jednorodnego walca znajduje się na osi symetrii w połowie jego wysokości.



3.5. Siły wewnętrzne i zewnętrzne w układzie ciał

Siły $\vec{F}$ działające na układ możemy podzielić na siły:

- zewnętrzne $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{z}}$, działające między punktami układu i punktami znajdującymi się na zewnątrz układu. Siły te pochodzą od strony ciał nie należących do układu;
- wewnętrzne $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{we}}$, działające pomiędzy ciałami należącymi do tego samego układu.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_z + \sum \vec{F}_{we}$$

Układ zamknięty to układ w którym masa *m* układu podczas ruchu nie ulega zmianie.

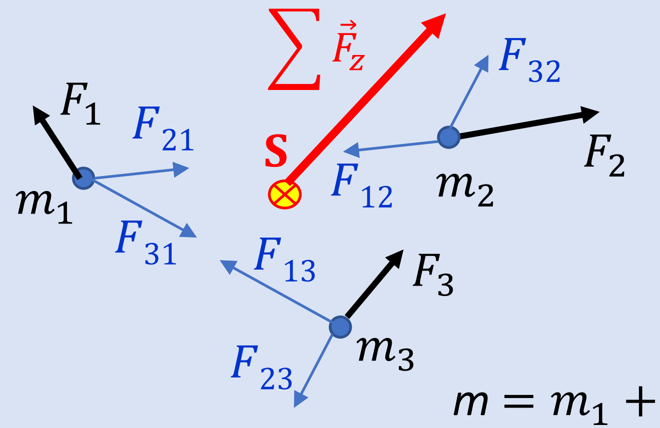
Układ odosobniony (izolowany) to układ w którym wypadkowa sił zewnętrznych na punkty układu jest równa zeru.

Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że **siły wewnętrzne $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ij}}$** występują parami, których składniki są równe co do wartości, lecz przeciwne co do kierunku. Stąd wniosek, że wypadkowa wszystkich sił wewnętrznych w układzie zamkniętym równa się zeru - $\sum \vec{F}_{we} = 0$
i dla środka masy ***S*** takiego układu otrzymujemy:

$$\boldsymbol{m\vec{a}_s = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \sum \vec{F}_z}$$

Jest to równanie ruchu ciała (układu zamkniętego ciał).

Układ trzech punktów materialnych o masach m_1, m_2 oraz m_3 na które działają siły zewnętrzne $\vec{F}_i$ $(F_1, F_2, i\ \ F_3)$
i siły wewnętrzne $\vec{F}_{ij}$ $(F_{12}, F_{12}, F_{13}, F_{31}, \ldots.)$



$m = m_1 + m_2 + m_3$

Rodzaje sił zewnętrznych

Siły zewnętrzne są przyczyną wszelkich zmian ruchu dowolnego ciała (układu ciał).

- Gdy ciało spoczywa na poziomej powierzchni, doznaje działania siły reakcji od strony powierzchni, która równoważy siłę ciężkości ciała. Siła ta często nazywana jest siłą nacisku.

- Gdy ciało spoczywa na powierzchni nie poruszającej się z przyspieszeniem, siła reakcji zawsze równoważy siłę ciężkości ciała spoczywającego na tej powierzchni.

- Gdy ciało spoczywa na równi pochyłej o kącie nachylenia α, siła ciężkości działająca na ciało rozkłada się na składowe: prostopadłą oraz równoległą do powierzchni równi.

- Siła rozciągająca działająca wzdłuż elastycznego elementu takiego jak kabel bądź lina nazywa się siłą naciągu. Gdy ciało zawieszone jest nieruchomo na linie, siła naciągu liny równoważy ciężar zawieszonego na niej ciała. Gdy obiekt przyspiesza, siła naciągu liny może okazać się większa niż ciężar tego obiektu. Analogicznie podczas zwalniania, naciąg liny okaże się mniejszy niż siła ciężkości.

- Siła tarcia występuje w układzie, w którym obiekty się poruszają. Ma zwrot przeciwny do kierunku ruchu ciała i kierunek równoległy do podłoża. Jest to siła oporu ruchu.

3.6. Zasada zachowania pędu

Pokazaliśmy, że dla zamkniętego układu N ciał (punktów materialnych), na które działają siły wewnętrzne $\vec{F}_{we}$ oraz siły zewnętrzne $\vec{F}_z$ wypadkowa wszystkich sił wewnętrznych równa się zeru $\sum \vec{F}_{we} = 0$

Z drugiej zasady dynamiki (w ogólnym ujęciu) dla układu zamkniętego wynika, że wektorowy przyrost pędu $\Delta\vec{p}$ układu możę się dokonać tylko kosztem przyrostu wektora popędu siły $\vec{F}\Delta t$ pochodzącego od działania na układ sił zewnętrznych $\vec{F} = \sum \vec{F}_z$

$$\boldsymbol{\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}}$$

Jeżeli wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych $\vec{F}$ działających na układ równa się zero (tzn. układ jest izolowany) to nastąpi zerowy przyrost pędu całego układu $\Delta\vec{p} = 0$ czyli $\boldsymbol{\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = const}$

Zatem możemy powiedzieć, że:

Jeśli na układ ciał nie działają żadne siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zeru to całkowity pęd $\vec{p}$ układu nie ulega zmianie.

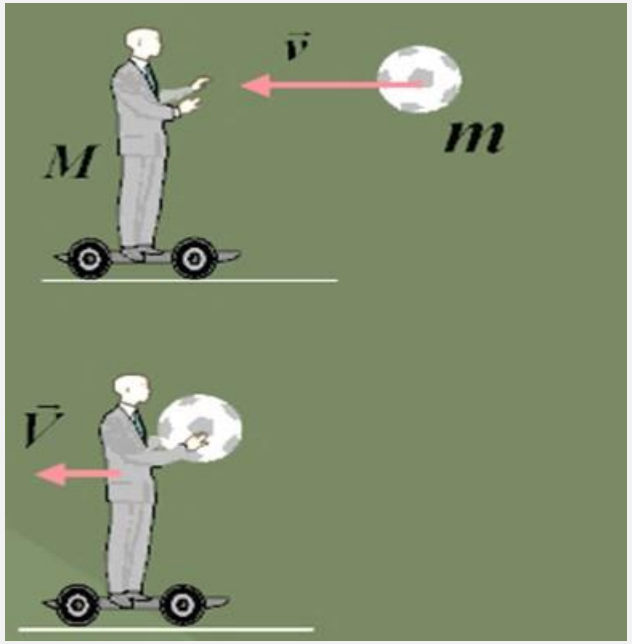
Stwierdzenie to nosi nazwę **zasady zachowania pędu** i można je zapisać również w postaci:

Całkowity pęd zamkniętego i izolowanego układu w pewnej chwili początkowej jest równy całkowitemu pędowi w dowolnej chwili późniejszej $\boldsymbol{\vec{p}_{pocz} = \vec{p}_{końc}}$

Przykład 3.3.

Chłopiec stojący na deskorolce łapie piłkę lecącą w jego kierunku z prędkością v. Jaka będzie prędkość chłopca z piłką jeśli masa piłki wynosi m a masa chłopca i deskorolki M?

Rozwiązanie:



$$\vec{P}_{pocz} = m\vec{V}$$

$$\vec{P}_{pocz} = \vec{P}_{końc}$$

$$\vec{P}_{końc} = (m+M)\vec{V}$$

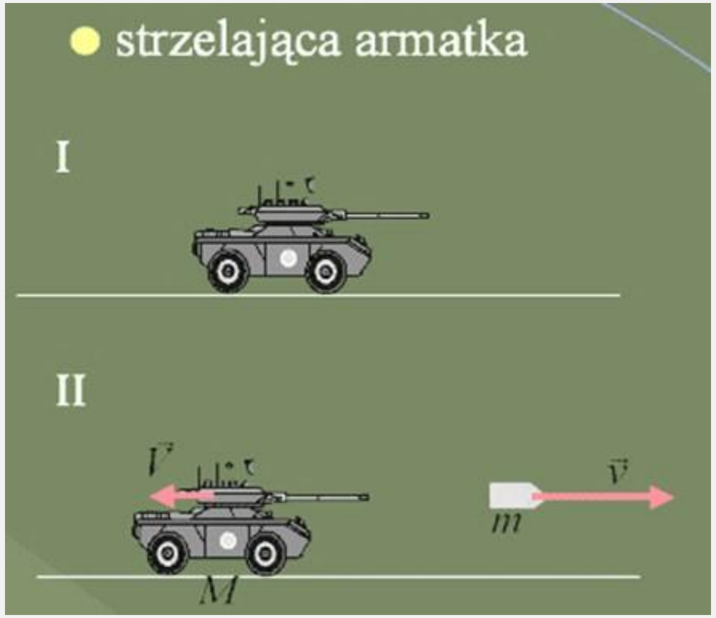
$$m\vec{v} = (m+M)\vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{v}\frac{m}{(m+M)}$$

Przykład 3.4.

Stojący transporter opancerzony o masie M wystrzeliwuje pocisk o masie m w kierunku poziomym z prędkością v. Jaka będzie prędkością będzie poruszał się transporter?

Rozwiązanie:



$$\vec{P}_{pocz} = 0$$

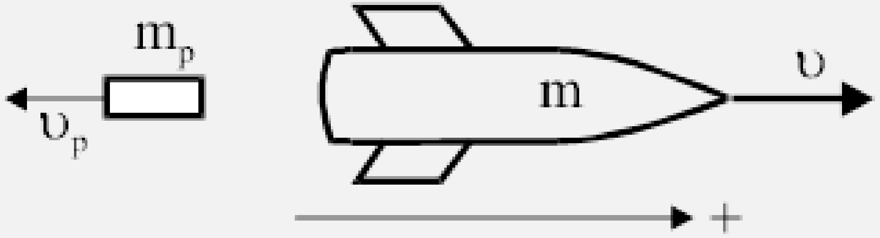
$$\vec{P}_{pocz} = \vec{P}_{końc} = 0$$

$$\vec{P}_{końc} = M\vec{V} + m\vec{v}$$

$$0 = M\vec{V} + m\vec{v}$$

$$\vec{v} = -\vec{V}\frac{M}{m}$$

Przykład 3.5.
Oblicz prędkość υ, którą uzyska rakieta o masie m = 1,6 ton w chwili startu, jeżeli gazy spalinowe posiadały prędkość υ_p = 3500 m/s, a masa spalonego paliwa wraz z utleniaczem wynosiła m_p = 50 kg.



Rozwiązanie:

Przed startem pęd rakiety był $\vec{p} = m_o\vec{\upsilon}_o = 0$ bo $\upsilon_o = 0$

Ponieważ na rakietę w chwili startu nie działają żadne siły zewnętrzne, dlatego pęd p całego układu (rakieta + wylatujące spaliny) musi być równy zero.

Pęd rakiety po starcie wynosi: $p_r = m\upsilon$

Pęd spalin $p_s = -m_p\upsilon_p$

Pęd układu zgodnie z zasadą zachowania pędu jest $p_r + p_s = m\upsilon - m_p\upsilon_p = 0$

Czyli $m\upsilon = m_p\upsilon_p$, $\upsilon = \frac{m_p\upsilon_p}{m}$, $\upsilon = \frac{50\ \text{kg}\cdot 3500\frac{m}{s}}{1600\ \text{kg}} \cong 110\frac{m}{s}$

Odpowiedź: Rakieta uzyska prędkość 110 m/s.