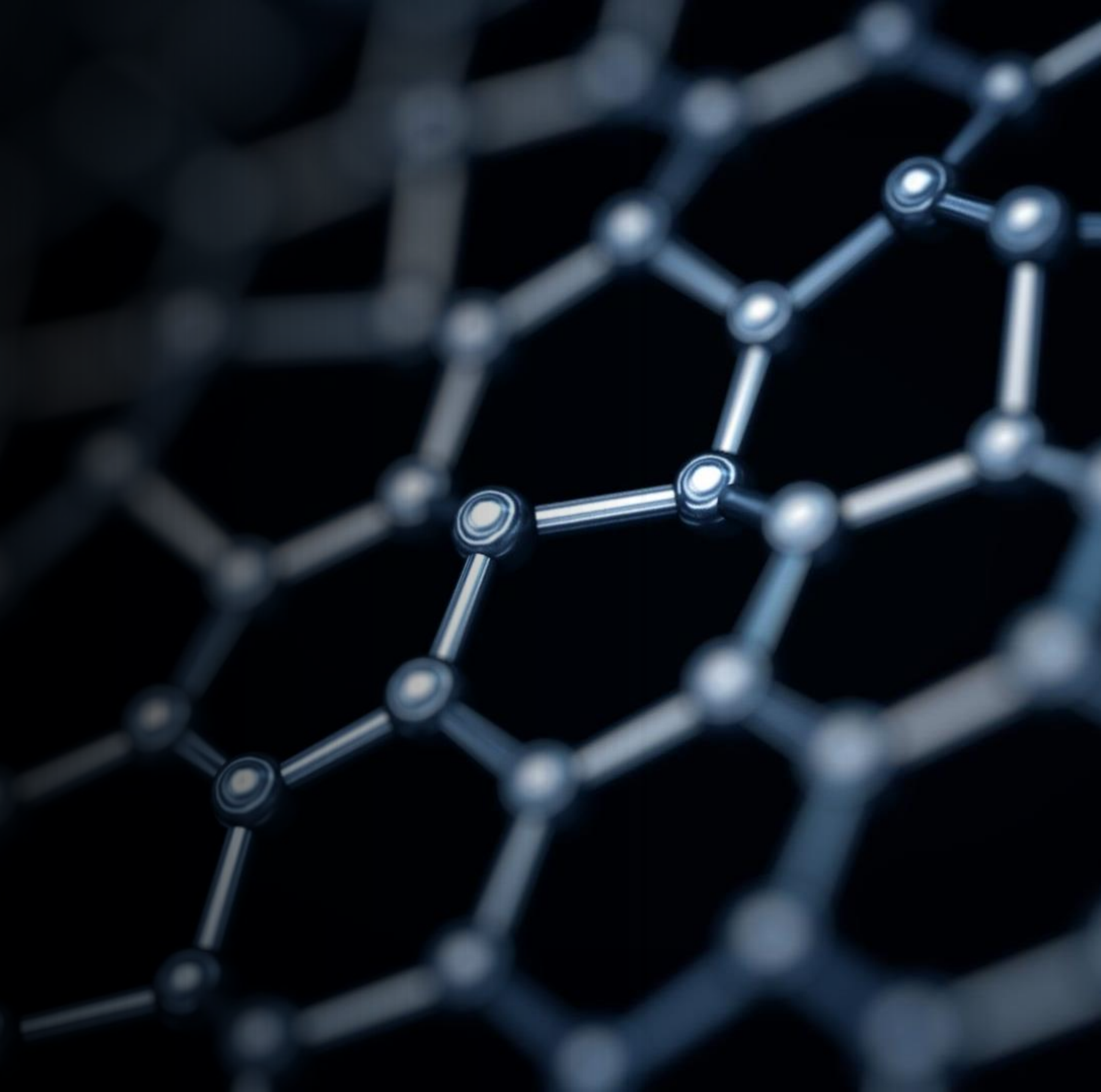
2. Kinematyka punktu materialnego

2.1. Ruch prostoliniowy jednostajny
2.2. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny
2.3. Ruch jednostajny po okręgu



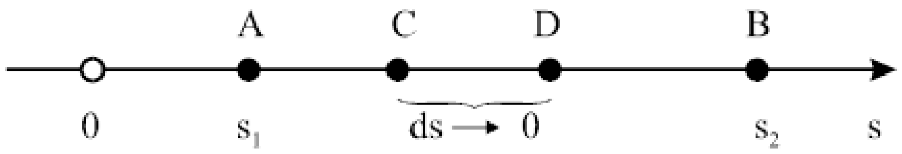
Kinematyka zajmuje się opisem ruchu ciał bez uwzględniania ich masy i bez rozpatrywania przyczyn, które ten ruch spowodowały.

Poruszające się ciało traktujemy jako **punkt materialny**, czyli punkt geometryczny, w którym skupiona jest cała masa ciała.

Co to jest ruch? Punkt materialny jest w ruchu jeżeli stwierdzimy, że zmienia się jego odległość względem innego ciała. Ruch jako pojęcie absolutne nie ma sensu. **Zawsze rozpatrujemy ruch względem jakiegoś innego ciała (układu)**. Układ, względem którego rozpatrujemy ruch będziemy nazywali **układem odniesienia**. Układem odniesienia może być drzewo, kamień, pociąg, Ziemia, Układ Słoneczny, Galaktyka. Położenie punktu w przestrzeni określamy za pomocą współrzędnych, przy czym liczba współrzędnych potrzebna do opisania położenia punktu jest równa liczbie wymiarów przestrzeni. Dla opisania położenia punktu materialnego, najczęściej w fizyce, stosujemy układy współrzędnych opisane w części pierwszej kursu.

2.1. Ruch prostoliniowy jednostajny

Ruchem prostoliniowym nazywamy ruch ciała (punktu materialnego) po torze będącym linią prostą. Rozważmy ruch ciała po prostej, którego położenie określa współrzędna *s*. Ruch rozważanego ciała opisuje zależność funkcyjna $s = s(t)$, np. $s = 5 \cdot t$



Prędkość średnia. Jeżeli w chwili t_1 ciało zajmuje położenie A (współrzędna s_1), a w chwili t_2 położenie B (współrzędna s_2), to prędkość średnia ruchu jest definiowana wzorem

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Prędkość średnia jest więc ilorazem przebytej drogi i czasu trwania ruchu.

Ze powyższego wzoru można określić główną jednostkę prędkości [m/s]. Oprócz różnych jednostek wielokrotnych, jak np. [km/s], [mm/s], jest też dopuszczalna (często powszechnie stosowana) jednostka [km/h] (kilometr na godzinę).

Prędkość chwilowa jest definiowana tym samym ilorazem przy $\Delta t \to 0$ (im mniejsze Δt tym dokładniej ją wyznaczymy).

W ruchu jednostajnym prędkość średnia jest zawsze równa prędkości chwilowej.

Czyli w ruchu jednostajnym prostoliniowym łatwo możemy obliczyć:

Prędkość $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Drogę $s \;\; = v \cdot t$

Czas ruchu $t = \frac{s}{v}$

Przykład 2.1.
Samochód na autostradzie porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością υ = 100 *km/godz*.
W jakim czasie t przebędzie on drogę s = 50 *km*?

Rozwiązanie:
Korzystamy z ostatniego z powyższych równań

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50\ km}{100\ km/godz} = 0{,}5\ godz.$$

Odpowiedź: Samochód przebędzie drogę s = 50 *km* w czasie 0,5 godziny.

Przykład 2.2.
Z miejscowości A oddalonej w linii prostej o 90 km od miejscowości B, wyjeżdża pociąg pospieszny jadąc w kierunku B z prędkością 54 km/godz. Po 10 minutach z miejscowości B wyjeżdża pociąg osobowy jadący w kierunku A z prędkością 36 km/godz. Obliczyć po jakim czasie i w jakiej odległości od miejscowości A nastąpiło spotkanie pociągów?

<u>Rozwiązanie:</u>

Oznaczamy i zamieniamy dane do jednostek układu SI:

AB = a = 90 *km* = 90000 *m*; $v_1 = 54\frac{km}{godz} = \frac{54\cdot 1000}{3600} = 15\frac{m}{s}$; $v_2 = 10\frac{m}{s}$; t_1 = 600 *s*

Pierwszy pociąg rusza z A i w czasie t_1 przejeżdża $s_0 = v_1 \cdot t_1$.

Kiedy rusza drugi pociąg z B odległość tych pociągów jest $s_1 = a - s_0$

Pociągi zbliżają się do siebie z prędkością $v = v_1 + v_2$ i mają do pokonania drogę równą odległości s_1

Czas wspólnej jazdy pociągów wynosi: $t_w = \frac{s_1}{v} = \frac{a - v_1 t_1}{v_1 + v_2} = \frac{90000 - 15\cdot 600}{15+10} = \frac{81000}{25} = 3240\ s = 54\ min$,

czyli łączny czas jazdy pociągu ze stacji A wynosi $t = t_w + t_1 = 3840\ s$,

a przebyta w tym czasie droga – czyli odległość miejsca spotkania pociągów od stacji A wynosi

$$s = v_1 \cdot t = 15\ {}^{m}/_{s} \cdot 3840\ s = 57600\ m = 57{,}6\ km.$$

<u>Odpowiedź:</u> Pociągi spotkają się po 54 minutach w odległości 57,6 *km* od miejscowości A.

2.2. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

Jeżeli prędkość ciała zależy od czasu, to ruch nazywamy zmiennym. Niech w chwili t_1 prędkość ciała wynosi v_1, a w chwili t_2 niech wynosi v_2. Przyspieszeniem średnim ruchu nazywamy iloraz różnicowy prędkości i czasu, co zapisujemy

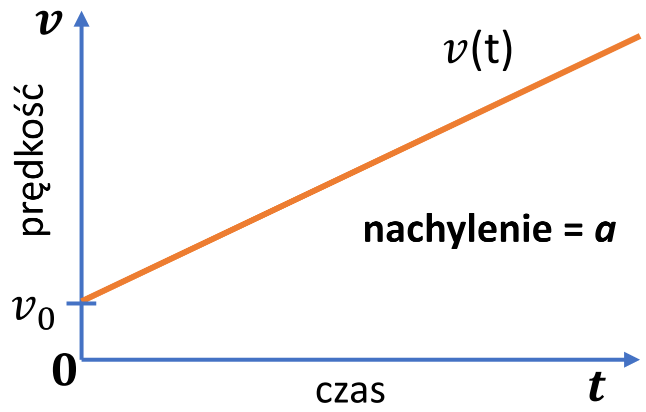
$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

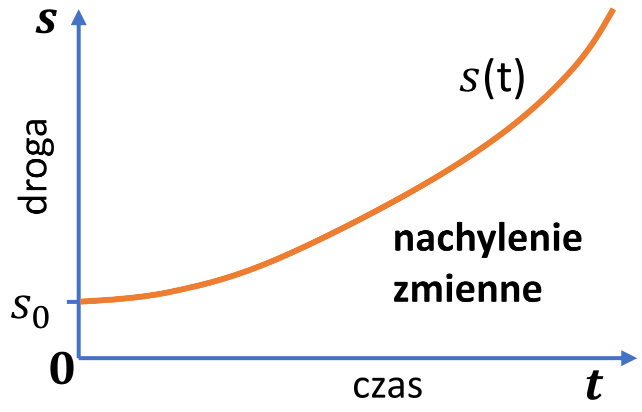
W ruchu jednostajnie zmiennym przyspieszenie ruchu jest stałe w czasie.

Prędkość w ruchu **jednostajnie przyspieszonym** jest wyrażona wzorem $v = v_0 + at$

Droga w ruchu **jednostajnie przyspieszonym** jest wyrażona wzorem $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$

Widać więc, że prędkość rośnie liniowo z czasem ruchu, natomiast wykres drogi $s(t)$ jest parabolą.





Ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony

Jeżeli przyspieszenie jest zwrócone w przeciwną stronę do prędkości ruchu ciała, to wartość prędkości będzie coraz mniejsza i ruch będzie ruchem opóźnionym. Ponieważ prędkość ciała v_2 w chwili t_2 jest mniejsza od v_1, to przyspieszenie staje się ujemne:

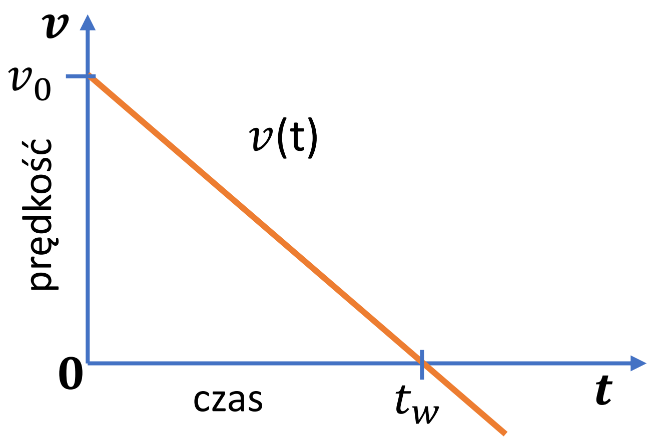
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} < 0$$

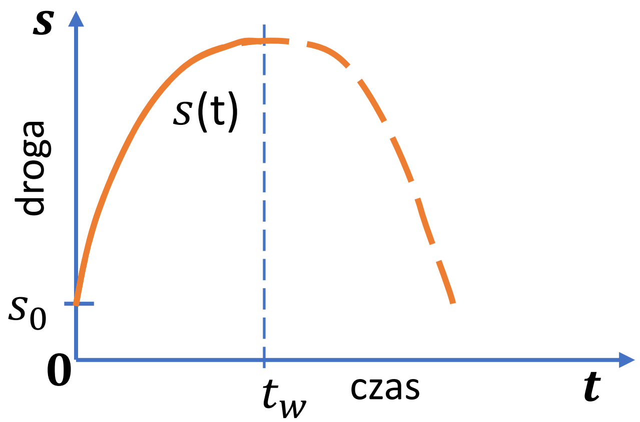
Wzory na prędkość i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym przechodzą na wzory dla ruchu jednostajnie opóźnionego, gdy zmienimy znak przy module *a* na ujemny.

Prędkość w ruchu **jednostajnie opóźnionym** jest wyrażona wzorem: $v = v_0 + at = v_0 - |a|t$

Droga w ruchu **jednostajnie opóźnionym** jest wyrażona wzorem: $s = s_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2} = s_0 + v_0 t - \frac{|a|t^2}{2}$

Widać więc, że prędkość maleje liniowo z czasem ruchu, natomiast wykres drogi $s(t)$ jest parabolą zwróconą ramionami do dołu. Czas t_w to czas w którym prędkość maleje do zera (czas hamowania lub czas wznoszenia).





Przykład 2.3.

Samochód jadący z prędkością υ_o=54 km/godz. w pewnej chwili zaczyna hamować (czyli porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym). Po upływie czasu t_1=5 s od chwili rozpoczęcia hamowania prędkość samochodu wynosi υ = 18 km/godz. Obliczyć opóźnienie samochodu, drogę hamowania i czas po jakim się zatrzyma?

<u>Rozwiązanie:</u>

Przeliczamy dane na jednostki SI $\quad v_o = 54\ km/godz = 15\frac{m}{s}; \qquad v = 18\ km/godz = 5\frac{m}{s}$

Czyli opóźnienie ruchu wynosi $\quad a = \frac{v - v_o}{t_1} = \frac{(5-15)m/s}{5\ s} = -2\frac{m}{s^2}$

Obliczamy czas hamowania – gdy samochód się zatrzyma jego prędkość wynosi v = 0

$$v = v_o + at \qquad 0 = v_o + at \qquad t = \frac{-v_o}{a} = \frac{-15\ m/s}{-2\ m/s^2} = 7{,}5\ s$$

Czyli droga hamowania $\quad s = v_o \cdot t + \frac{at^2}{2}$

Wynosi

$$s = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 7{,}5\ s + \frac{-2\frac{m}{s^2} \cdot (7{,}5)^2\ s^2}{2} = (112{,}50 - 56{,}25)\ m$$

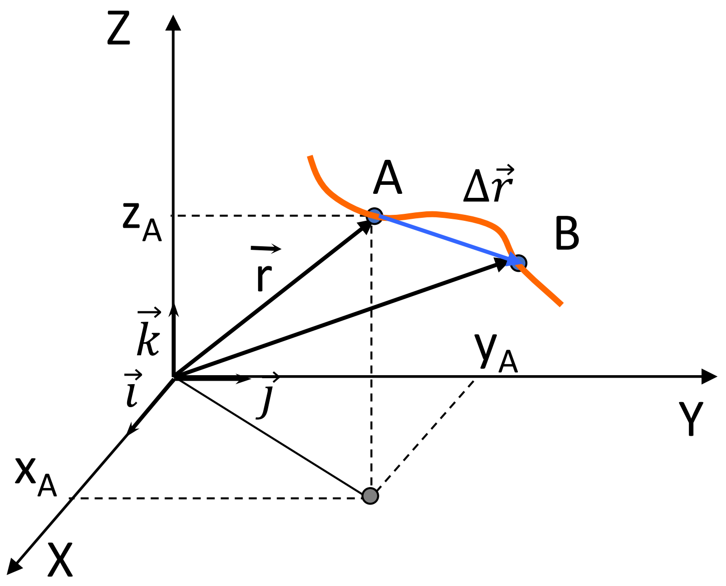
$$s = 56{,}25\ m$$

<u>Odpowiedź</u>: Opóźnienie ruchu a = 2 m/s^2; czas hamowania t = 7,5 s; droga hamowania s = 56,25 m.

Ruch w trzech wymiarach

Chcąc opisać ruch punktu materialnego musimy wybrać układ odniesienia.

Następnie wybieramy najdogodniejszy dla opisu matematycznego danego problemu układ współrzędnych i uzupełniamy go o zegar mierzący czas.



- Przy wyborze układu Kartezjańskiego położenie cząstki określamy przez podanie współrzędnych punktu materialnego (**wektora położenia**) w postaci:

$$\vec{r} = (x, y, z) = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

- **Ruch** – zmiana położenia względem układu odniesienia w czasie $\vec{r}(t)$ czyli:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)$$

- Eliminując czas z tych równań otrzymujemy **tor** punktu zwany **trajektorią** – linię którą zakreśla poruszająca się cząstka.

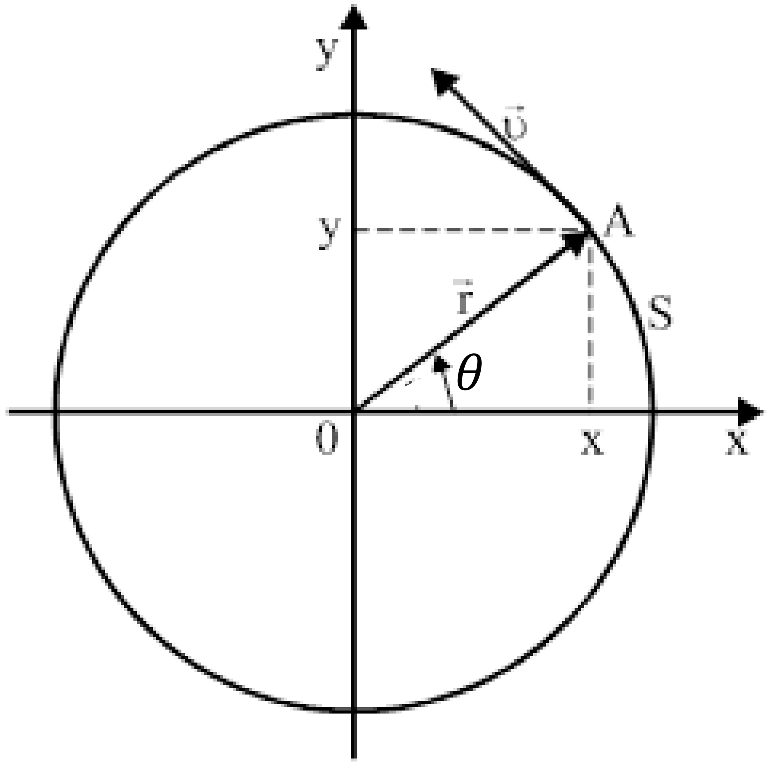
- Jeżeli ciało przemieściło się z punktu A do punktu B to jego **przemieszczenie** wynosi:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Jeżeli $\vec{r}_A = (2, 3, 2.5)$ $\quad \vec{r}_B = (1, 4, 2)$ $\quad$ to $\quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1-2,\ 4-3,\ 2-2.5) = (-1, 1, -0.5)$

2.3. Ruch jednostajny po okręgu

Ruch po okręgu jest szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego zachodzącego w dwóch wymiarach. Obierzmy układ współrzędnych 0xy tak, by początek układu znajdował się w środku koła o promieniu r.



Droga kątowa. Położenie punktu A na okręgu można wtedy jednoznacznie określić za pomocą kąta θ, który nosi nazwę **drogi kątowej**. Jednostką drogi kątowej jest radian [rad].

Drogę liniową **s** przebytą przez ciało po łuku koła można wyrazić za pomocą drogi kątowej następująco $s = \theta \cdot r$

Kąt θ jest wyrażony w radianach (porównaj wzór na obwód okręgu $l = 2\pi r$)

Prędkość kątowa $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ w ruchu jednostajnym po okręgu jest stała.
Prędkość liniowa w tym ruchu zmienia swój kierunek. Natomiast jej wartość (składowa styczna do toru) jest stała i równa $v = \omega \cdot r$

Okres ruchu to czas *T* potrzebny na przebycie drogi kątowej $\theta = 2\pi$. Dla ruchu jednostajnego po okręgu $T = \frac{2\pi}{\omega}[s]$

Częstotliwością f ruchu po okręgu nazywamy liczbę obiegów punktu po okręgu w jednostce czasu, zatem $f = \frac{1}{T}\ \left[\frac{1}{s} = Hz\right]$