

# DRGANIA I FALE

- **Ruchem drgający** – ruch lub zmianę stanu, które charakteryzuje powtarzalność w czasie wartości wielkości fizycznych, określających ten ruch lub stan.
- **Fale** – różnego rodzaju zaburzenia stanu materii lub pola rozchodzące się w przestrzeni.
- Wspólną cechą wszystkich zjawisk falowych jest zdolność przenoszenia energii.

## Drganie harmoniczne

*Jeżeli układ, na który nie działają zmienne siły zewnętrzne, zostaje wprowadzony w drgania na skutek jakiegokolwiek początkowego odchylenia od położenia równowagi, to takie drgania nazywamy swobodnymi.*

*Ruch drgający nazywamy okresowym (periodycznym), jeżeli wartości wielkości fizycznych zmieniające się podczas drgań, powtarzają się w pewnych odstępach czasu.*

Dla drgań harmonicznych zależność drgań wielkości fizycznej od czasu  $t$  opisujemy

$$s = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (8.1)$$

gdzie

$A$  – amplituda,

$\omega_0$  – częstość kątowa,

$\phi$  – faza początkowa drgań,

$\omega_0 t + \phi$  – faza drgań w chwili czasu  $t$ .

**Określone stany układu powtarzają się w odstępie czasu  $T$  nazywanym okresem drgań, w którym faza drgań wzrasta o  $2\pi$ , t.j.**

$$\omega_o(t + T) + \phi = (\omega_o t + \phi) + 2\pi$$

stąd

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} \quad (8.2)$$

Częstotliwość drgań

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (8.3)$$

Porównując (8.2) i (8.3) otrzymujemy

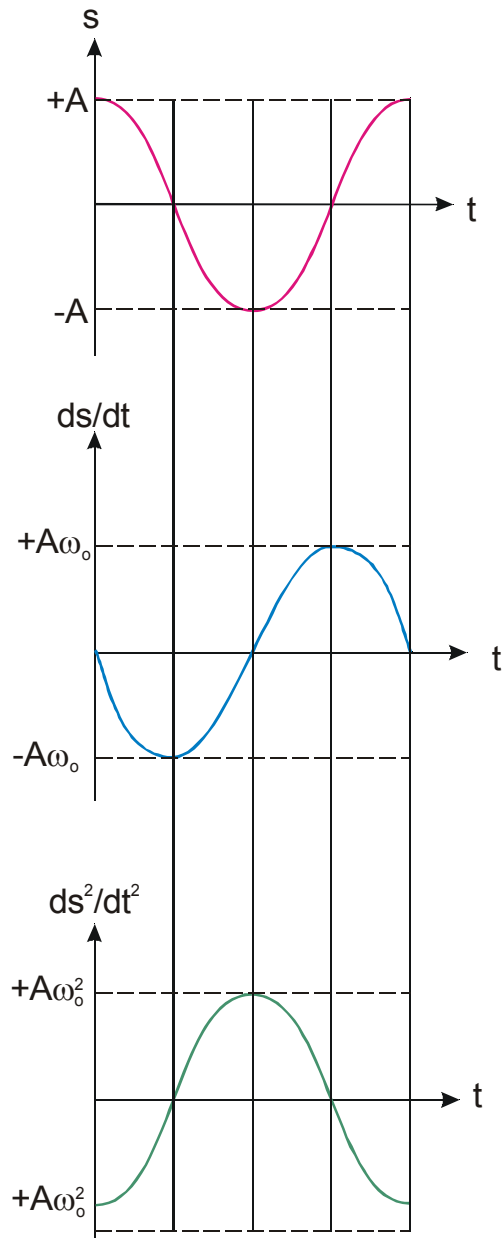
$$\omega_o = 2\pi \nu \quad (8.4)$$

Jednostką częstotliwości jest hertz (1Hz) – jest to częstotliwość periodycznych drgań w których jeden cykl wykonywany jest w 1s.

Pierwszą i druga pochodna po czasie wielkości  $s$

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_o \sin(\omega_o t + \phi) = A\omega_o \cos\left(\omega_o t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.5)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_o^2 \cos(\omega_o t + \phi) = -A\omega_o^2 \cos(\omega_o t + \phi + \pi) \quad (8.6)$$



Faza prędkości (8.5) różni się od fazy wychylenia o  $\pi/2$ , a faza przyspieszenia o  $\pi$ .

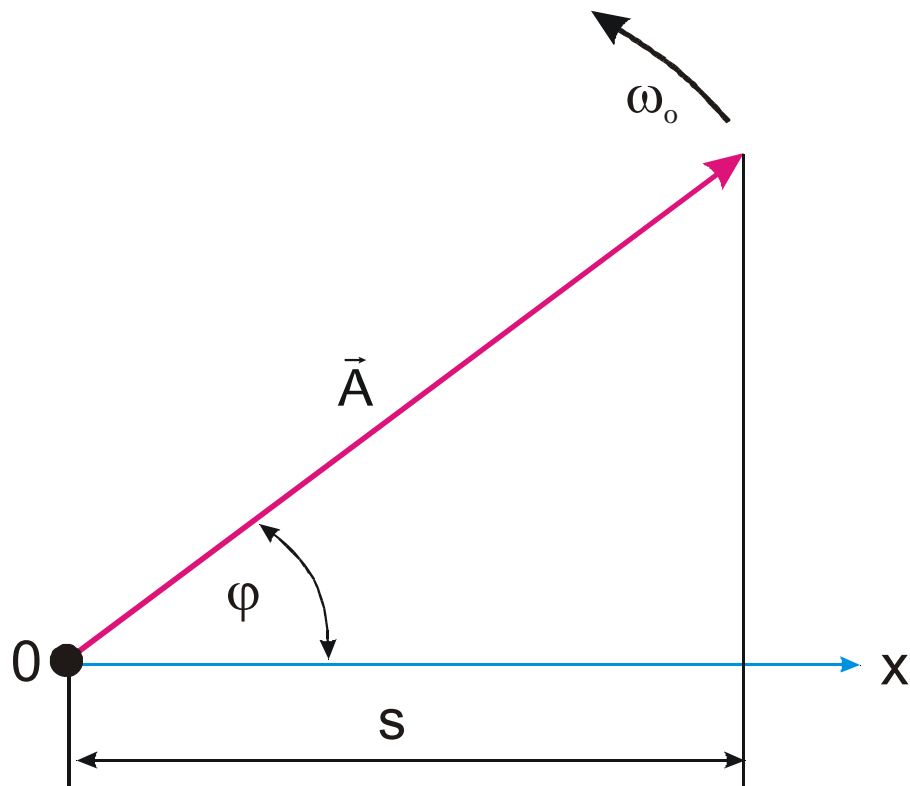
W chwili czasu gdy  $s = 0$ ,  $ds/dt$  przyjmuje największą wartość; podczas gdy  $s$  przyjmuje maksymalną ujemną wartość, to  $d^2s/dt^2$  przyjmuje największą dodatnią wartość (rys. 8.1).

Ze związku (8.6) wynika równanie różniczkowe drgań harmoniczných

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (8.7)$$

**Rys. 8.1. Zależność  $s$ ,  $ds/dt$  i  $d^2s/dt^2$  od  $t$  dla drgań harmoniczných o okresie  $T = 2\pi / \omega_0$ .**

## Metoda wykresów fazowych



Rys. 8.2. Metoda wykresów fazowych.

**Druga metoda opisu drgań harmoniczych**  
(liczby zespolone).

$$\bar{s} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)} \quad (8.8)$$

Część rzeczywista tego wyrażenia

$$\text{Re} \bar{s} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = s$$

przedstawia drganie harmoniczne.

Przyjmuje się, że **drgająca wielkość s równa jest części rzeczywistej wyrażenia zespolonego** (8.8), czyli

$$s = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)} \quad (8.9)$$

# Mechaniczne drgania harmoniczne

Oscylatorem harmonicznym nazywamy układ opisywany równaniem (8.7).

Przykłady oscylatora harmonicznego:

- wahadło sprężynowe, fizyczne i matematyczne,
- drgające obwody elektryczne.

Wahadło sprężynowe wykonuje drgania harmoniczne pod wpływem siły sprężystości  $F = -kx$ , gdzie  $k$  jest współczynnikiem sprężystości.

Równanie ruchu dla wahadła

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{czyli} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Porównując to wyrażenie do równania (8.7) wynika, że wahadło sprężynowe wykonuje drgania harmoniczne  $x = A \cos(\omega_o t + \varphi)$  z częstością kołową

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.10)$$

i okresem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8.11)$$

Wzór (8.11) jest słuszny dla drgań sprężystych w których spełnione jest prawo Hooke'a, kiedy masa sprężyny jest mała w porównaniu z masą ciała.

Siła działająca na masę  $m$  wynosi

$$F = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2 x$$

i jest proporcjonalna do przesunięcia  $x$  z położenia równowagi i skierowana w przeciwną stronę.

### Energia kinetyczna

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] \quad (8.12)$$

### Energia potencjalna

$$U = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{kx^2}{2}$$

czyli

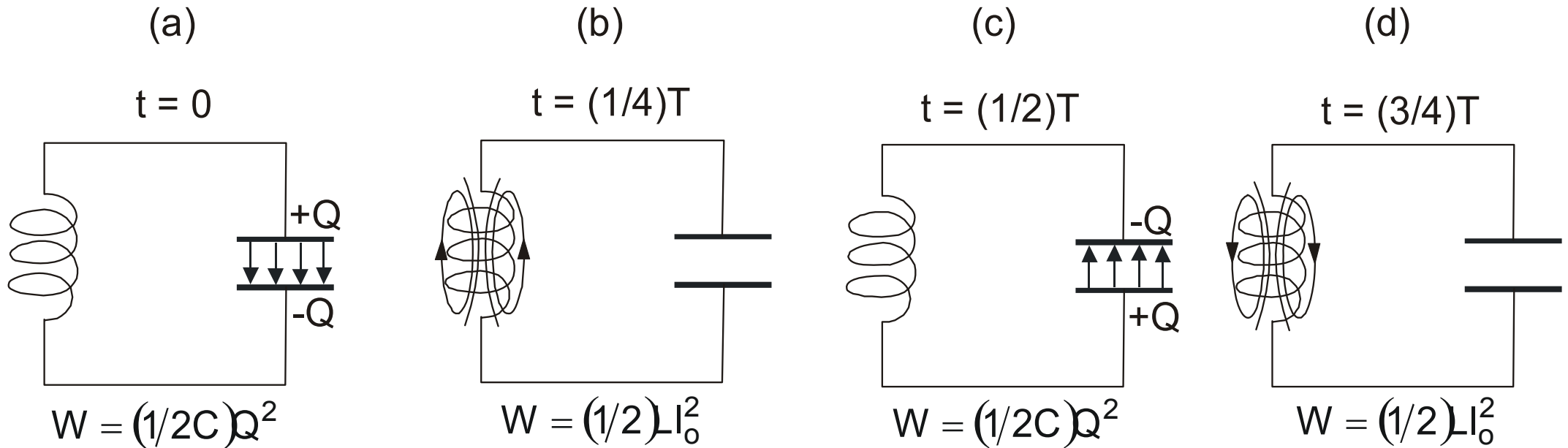
$$U = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] \quad (8.13)$$

### Energię całkowita

$$W = K + U = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

$U$  i  $K$  zmieniają się z częstością  $2\omega_0$ . Ponieważ wartości średnie  $\langle \sin^2 \alpha \rangle$  i  $\langle \cos^2 \alpha \rangle$  są równe  $1/2$ , więc  $\langle K \rangle = \langle U \rangle = W/2$ .

# Elektryczne drgania harmoniczne



Rys. 8.3. Przebieg drgań elektrycznych w obwodzie LC.

Rozważmy obwód elektryczny *RLC* zawierający cewkę o indukcyjności  $L$ , kondensator o pojemności  $C$  i rezystor o rezystancji  $R$ . Z prawa Kirchoffa mamy

$$IR + V_c = E_s$$

gdzie:

$IR$  – napięcie na rezystorze,

$V_c = Q / C$  – napięcie na kondensatorze, a

$E_s = -Ldi / dt$  SEM indukcji.

Więc

$$L \frac{dl}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

A ponieważ  $I = dQ/dt$  oraz  $dl / dt = d^2Q / dt^2$ , otrzymujemy

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (8.15)$$

Jeżeli  $R = 0$  to otrzymujemy równanie różniczkowe swobodnych drgań harmoniczných

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Ładunek wykonuje drgania harmoniczne

$$Q = Q_o \cos(\omega_o t + \varphi) \quad (8.16)$$

Częstość drgań własnych

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.17)$$

Okres drgań

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (8.18)$$



Natężenie prądu

$$I = dQ / dt = -\omega_o Q_o \sin(\omega_o t + \varphi) = I_o \cos\left(\omega_o t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.19)$$

gdzie  $I_o = \omega_o Q_o$  – amplituda natężenia prądu.

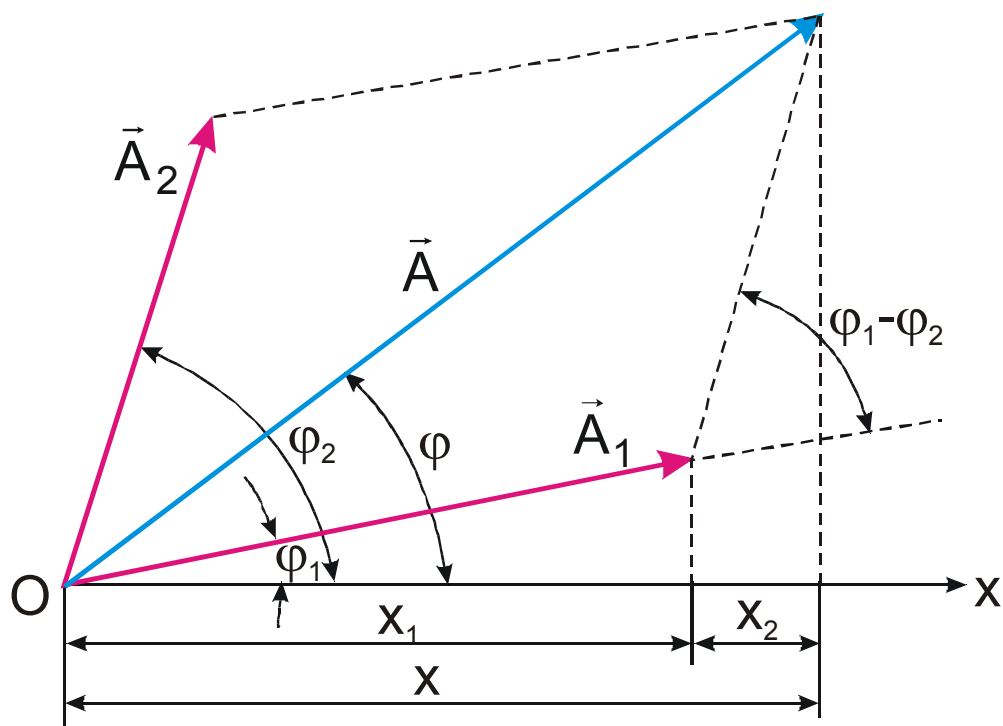
Napięcie na kondensatorze

$$V_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q_o}{C} \cos(\omega_o t + \varphi) = V_o \cos(\omega_o t + \varphi) \quad (8.20)$$

gdzie  $V_o = Q_o / C$  – amplituda napięcia.

Z wyrażeń (8.16) i (8.19) wynika, że **drżania prądu / wyprzedzają w fazie drżania ładunku Q o  $\pi/2$ : kiedy prąd osiąga maksymalną wartość, ładunek (napięcie) przyjmuje zerową wartość i na odwrót.**

## Składanie drgań harmoniczych równoległych o jednakowej częstości. Dudnienie



**Rys. 8.4. Wektorowa metoda składania drgań.**

Dokonyamy złożenia drgań harmoniczych o jednakowych częstościach

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Równanie drgania wypadkowego ma postać

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (8.21)$$

gdzie amplituda  $A$  i faza  $\varphi$  są określone wyrażeniami

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (8.22)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (8.23)$$

Ciało biorące udział w dwóch drganiach harmonicznym o jednakowych kierunkach wykonuje także drgania harmoniczne w tym kierunku i o tej samej częstotliwości co drgania składowe.

Amplituda drgania wypadkowego:

- gdy  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), wówczas  $A = A_1 + A_2$
- gdy  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi(2m + 1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), wówczas  $A = |A_1 + A_2|$

## Dudnienie

Rozważmy dwa dodawane drgania równoległe nieznacznie różniące się częstotliwościami drgań. Niech amplitudy składanych drgań będą równe  $A$ , a ich częstości kołowe  $\omega$  i  $\omega + \Delta\omega$  przy czym  $\Delta\omega \ll \omega$ . Przyjmijmy, że fazy początkowe drgań są zerowe, wówczas

$$x_1 = A \cos \omega t$$

$$x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t$$

Uwzględniając że  $\Delta\omega / 2 \ll \omega$ , znajdujemy

$$x = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (8.24)$$

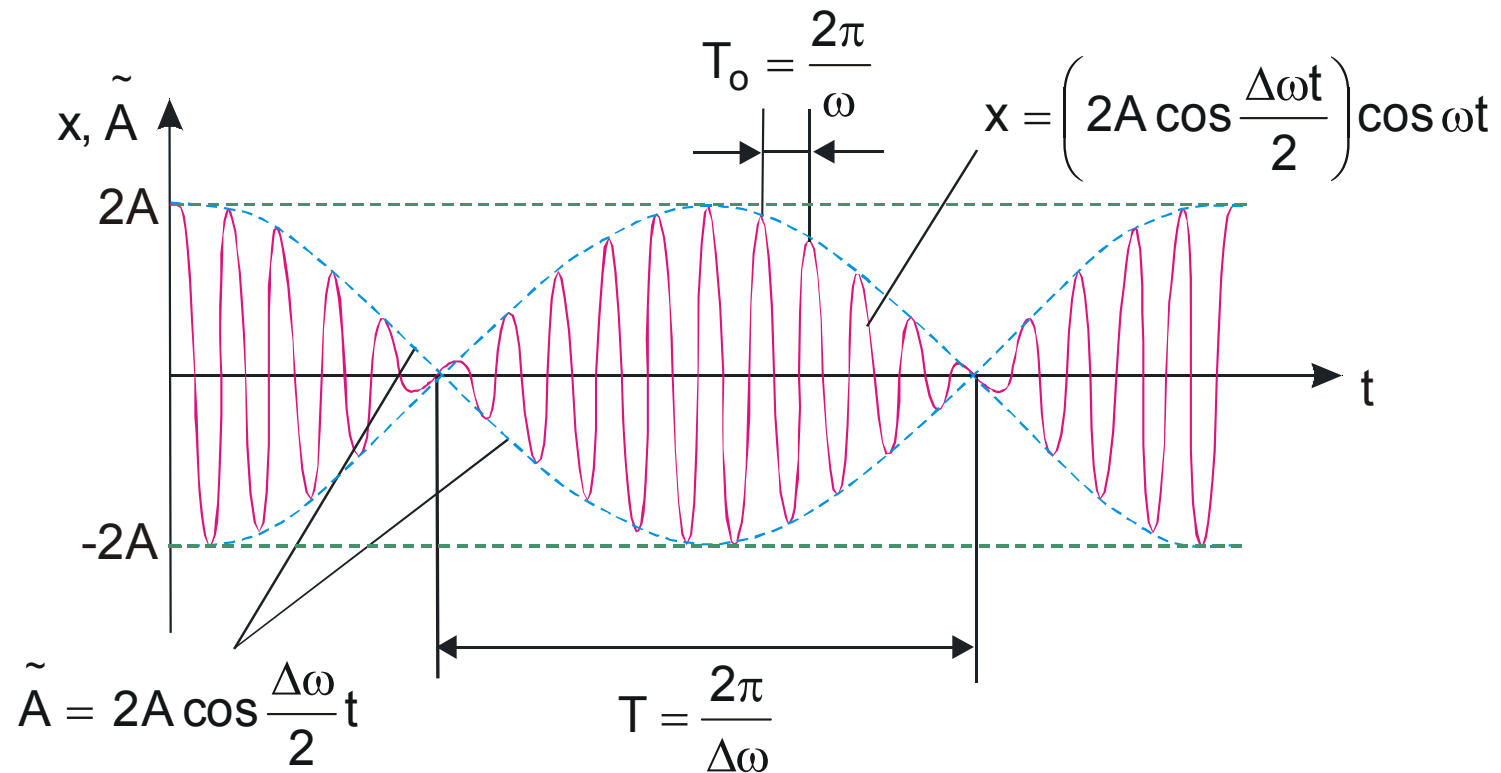
Otrzymane wyrażenie jest iloczynem modulowanej amplitudy

$$\tilde{A} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (8.25)$$

o okresie dudnień

$$T_o = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

i szybko zmieniającego się członu  $\cos\omega t$ .



**Rys. 8.5. Nałożenie się drgań harmoniczych o zbliżonych częstościach kołowych daje w wyniku dudnienie.**

## Składanie drgań wzajemnie prostopadłych

Rozważmy złożenie dwóch drgań harmoniczných o jednakowej częstotliwości  $\omega$ , zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych wzdłuż osi  $x$  i  $y$ . Dla prostoty przyjmujemy, że faza początkowa pierwszego drgania jest zerowa:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega t \\y &= B \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}\tag{8.26}$$

Zapisując drganie składowe w postaci

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t ; \quad \frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

i uwzględniając, że

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

otrzymujemy po prostych przekształceniach równanie elipsy

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi\tag{8.27}$$

Otrzymaliśmy przypadek tak zwanych drgań eliptycznie spolaryzowanych.

Orientacja osi elipsy i jej rozmiary zależą od amplitud drgań składowych i różnicy faz  $\varphi$ .

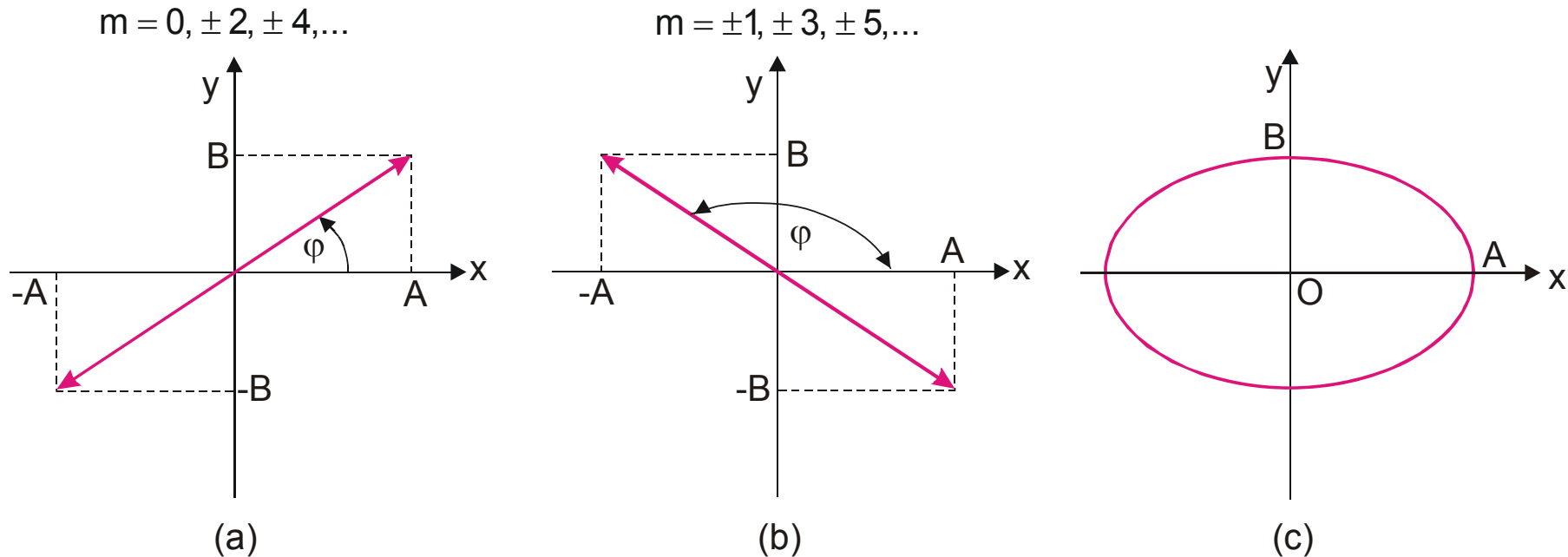
Rozpatrzmy niektóre szczególne przypadki:

- $\varphi = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

w tym przypadku elipsa degeneruje się do odcinka prostej

$$y = \pm \frac{B}{A} x \quad (8.28)$$

gdzie znak + odpowiada zeru i parzystym wartościom  $m$  (rys. 8.6a), a znak – nieparzystym wartościom  $m$  (rys. 8.6b). Wypadkowe drganie stanowi drganie harmoniczne o częstości  $\omega$  i amplitudzie  $\sqrt{1 - (x/A)^2}$  zachodzące wzdłuż prostej nachylonej pod kątem  $\varphi = \arctg[(B/A)\cos m\pi]$ . W tym przypadku mamy drgania liniowo spolaryzowane.



**Rys. 8.6. Superpozycja drgań harmoniczných wzajemnie prostopadłych o różnych amplitudach i jednakowych częstościach.**

$$\varphi = (2m + 1)\pi/2 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

w tym przypadku otrzymujemy

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (8.29)$$

Jest to równanie elipsy, której osie pokrywają się z osiami współrzędnych, a jej półosie są równe odpowiednim amplitudom (rys. 8.6c).

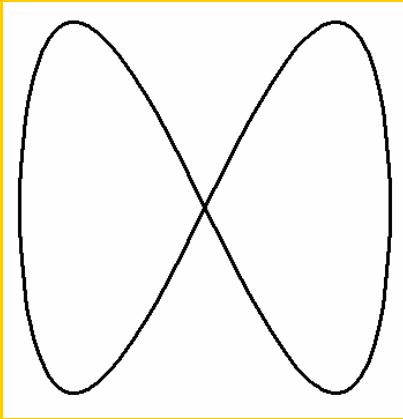
Złożenie drgań harmoniczných o różnych częstościach daje w wyniku skomplikowane krzywe, zwane krzywymi Lissajous. Kształt tych krzywych zależy od stosunku amplitud, częstości i początkowych faz drgań.

## Krzywe Lissajous: przykład

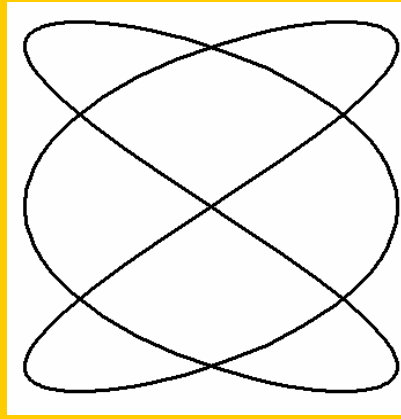
$$x = A(\sin \omega_1 t + \varphi)$$

$$y = A \sin(\omega_2 t)$$

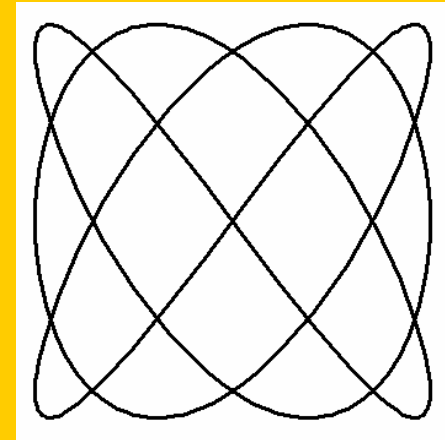
Poniżej zamieszczono przykłady krzywych Lissajous o parametrach  $\varphi = \pi/2$ .



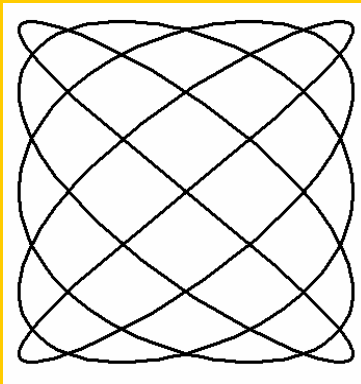
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}$$



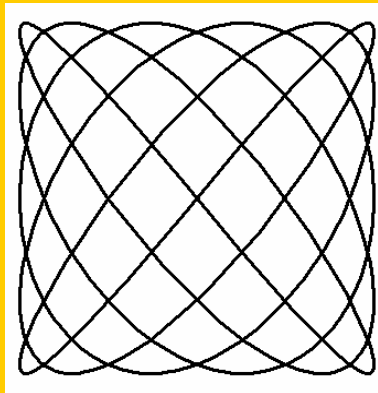
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$$



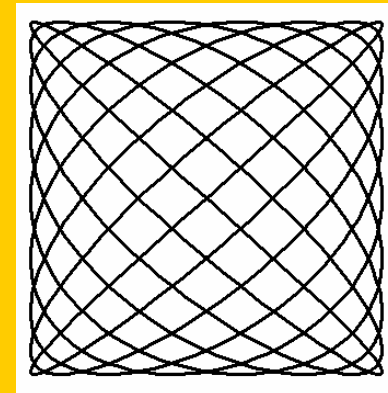
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4}{3}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4}{5}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{6}{5}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{8}{9}$$



## Drgania swobodne tłumione

Wszystkie rzeczywiste układy drgające są układami rozpraszającymi energię. W wielu przypadkach zanikania drgań mechanicznych siły tarcia są proporcjonalne do prędkości

$$F_t = -rv$$

gdzie  $r$  jest współczynnikiem oporu. Wówczas równanie ruchu

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - r \frac{ds}{dt}$$

gdzie  $m$  jest masą ciała drgającego,  $ks$  siłą zwrotną sprężyny a  $r(ds/dt)$  siłą tarcia. Otrzymujemy więc

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{ds}{dt} + \frac{k}{m} s = 0 \quad (8.30)$$

czyli

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 0 \quad (8.31)$$

gdzie

$\delta = \text{const}$  jest współczynnikiem pochłaniania,

$\omega_o$  częstością nietłumionych drgań swobodnych układu ( $\delta = 0$ ).

Rozwiązaniem równania (8.31) jest

$$s = e^{-\delta t} u \quad (8.32)$$

Po znalezieniu pierwszej i drugiej pochodnej wyrażenia (8.32) i podstawieniu do (8.31) otrzymujemy

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\omega_o^2 - \delta^2) u = 0 \quad (8.33)$$

Kiedy ten współczynnik  $(\omega_o^2 - \delta^2)$  jest dodatni

$$\omega^2 = (\omega_o^2 - \delta^2) \quad (8.34)$$

to rozwiązaniem równania (8.33) jest

$$u = A_o \cos(\omega t + \varphi)$$

Wobec tego rozwiązaniem równania (8.33) w przypadku małego tłumienia  $(\delta^2 < \omega_o^2)$  jest

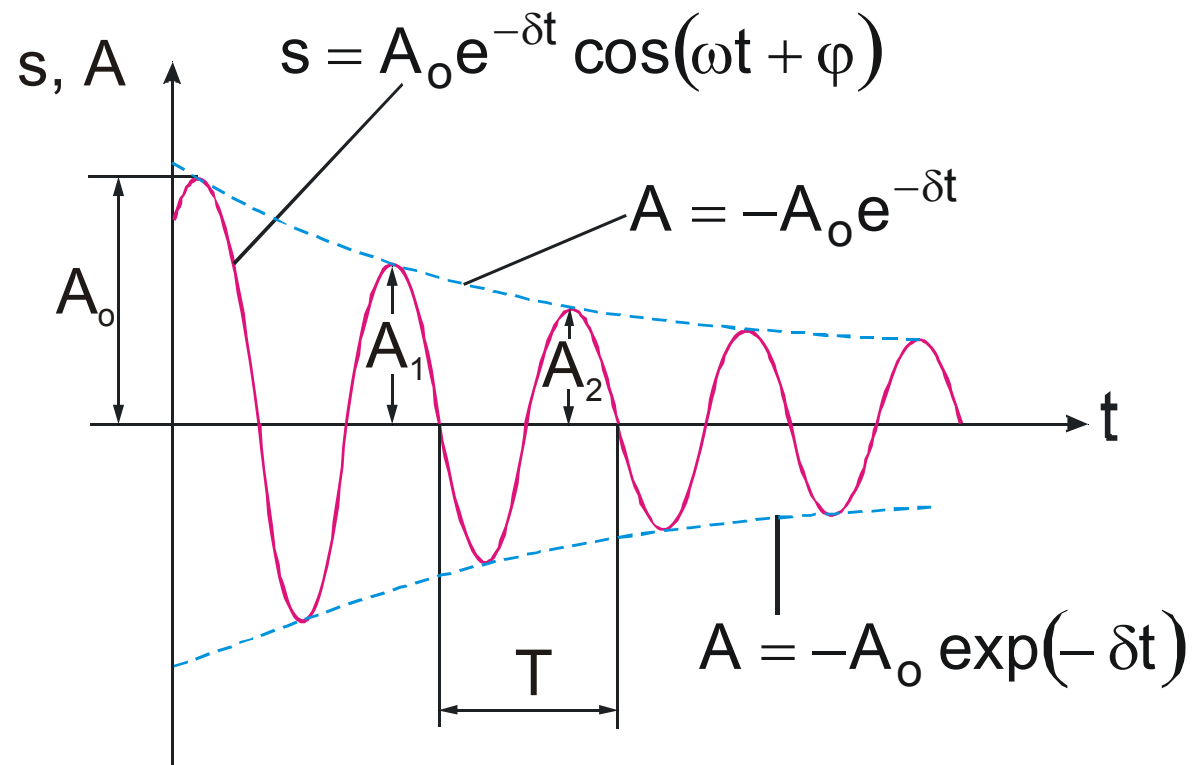
$$s = A_o e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.35)$$

gdzie

$$A = A_o e^{-\delta t} \quad (8.36)$$

jest amplitudą drgań tłumionych, a  $A_o$  – amplitudą początkową.

**Okres czasu  $\tau = 1/\delta$  w ciągu którego amplituda drgań tłumionych zmniejsza się e razy, nazywamy czasem relaksacji.**



**Rys. 8.7. Drgania swobodne tłumione.**

Drgania tłumione nie są harmonicznymi, ponieważ drgania nie powtarzają się. Dlatego wielkość  $\omega$  możemy tylko umownie nazwać częstością kołową drgań tłumionych

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Jeżeli  $A(t)$  i  $A(t+T)$  są amplitudami dwóch kolejnych drgań odpowiadających chwilom czasu różniących się o umowny okres drgań, to stosunek

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

nazywamy **dekrementem tłumienia**, a jego logarytm

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} \quad (8.37)$$

**logarytmicznym dekrementem tłumienia.**

W celu scharakteryzowania drgającego układu wprowadzono pojęcie dobroci  $Q$ , która dla małych wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia jest równa

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (8.38)$$

Dla wahadła sprężynowego, porównując równanie (8.30) z równaniem (8.31) mamy

$$\delta = \frac{r}{2m} \quad (8.39)$$

oraz

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$$

Dobroć wahadła sprężynowego zgodnie z (8.38) wnosi

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{r} r$$

Analogiczne wyrażenie możemy otrzymać dla swobodnych tłumionych drgań ładunku w obwodzie *RLC*. Równanie to ma postać (8.15), w związku z tym współczynnik tłumienia

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (8.40)$$

Równanie różniczkowe (8.15) możemy zapisać w sposób analogiczny do (8.31)

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_o^2 Q = 0$$

Drgania ładunku zachodzą według prawa

$$Q = Q_o e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$


z częstością kołową

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (8.41)$$

mniejszą od częstości drgań swobodnych (porównaj z (8.17)). Dla  $R = 0$  wyrażenie (8.41) przechodzi w (8.17). Dobroć obwodu drgającego

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.42)$$

Gdy  $\delta$  wzrasta, to okres drgań tłumionych również rośnie i przy  $\delta = \omega_0$  przyjmuje wartość nieskończoną, tj. ruch drgający przestaje być periodycznym. W tym przypadku wielkość drgająca asymptotycznie zbliża się do zera, kiedy  $t \rightarrow \infty$ . Proces ten nazywamy **aperiodycznym**.



## Drgania wymuszone

Ażeby w układzie drgającym otrzymać drgania nietłumione, należy kompensować straty energii. Czynnikiem wymuszający

$$X = X_o \cos \omega t$$

W przypadku drgań mechanicznych rolę  $X(t)$  odgrywa siła wymuszająca

$$F = F_o \cos \omega t \quad (8.43)$$

Z uwzględnieniem siły (8.43) prawo ruchu dla wahadła sprężynowego zapiszemy w postaci

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - r \frac{ds}{dt} + F_o \cos \omega t$$

Stąd otrzymujemy równanie w bardziej ogólnej formie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = \frac{F_o}{m} \cos \omega t \quad (8.44)$$

W przypadku elektrycznego obwodu drgającego, to rolę  $X(t)$  odgrywa periodycznie zmieniająca się  $SEM$  lub zmienne napięcie

$$V = V_o \cos \omega t.$$

Wówczas równanie (8.15) możemy napisać w postaci

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{V_0}{L} \cos \omega t \quad (8.45)$$

Stosując (8.17) i (8.40) otrzymujemy

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{V_0}{L} \cos \omega t \quad (8.46)$$

***Drgania powstające pod wpływem zewnętrznej, periodycznie zmieniającej się siły, lub pod wpływem periodycznie zmieniającej się SEM, nazywamy odpowiednio wymuszonymi drganiami mechanicznymi lub elektrycznymi.***

Równania (8.44) i (8.46) można sprowadzić do liniowego niejednorodnego równania różniczkowego

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t \quad (8.47)$$

Rozwiązanie tego równania stanowi suma ogólnego rozwiązania (8.35) równania jednorodnego (8.31) i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego.

W celu rozwiązania równania (8.47), zamienimy prawą stronę równania na wielkość zespoloną  $s = s_0 e^{i\eta t}$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 e^{i\omega t} \quad (8.48)$$



Szczególnego rozwiązania tego równania będziemy poszukiwać w postaci

$$s = s_o e^{i\eta t}$$

Podstawiając wyrażenia dla  $s$  i jego pochodnych do równania (8.48), otrzymujemy

$$s = s_o e^{i\eta t} (-\eta^2 + 2i\delta\eta + \omega_o^2) = x_o e^{i\omega t}$$

Ponieważ równość ta musi być spełniona dla każdej chwili czasu, więc  $\eta = \omega$ . Z równania tego również można określić  $s_o$ . Mnożąc licznik i mianownik wyrażenia  $s_o$  przez  $(\omega_o^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)$ , otrzymujemy

$$s_o = \frac{x_o}{(\omega_o^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} = x_o \frac{(\omega_o^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

To złożone wyrażenie wygodniej jest przedstawić w formie

$$s_o = A e^{-i\varphi}$$

gdzie

$$A = \frac{x_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (8.49)$$

oraz

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad (8.50)$$

Tak więc rozwiązanie równania (8.48) w postaci zespolonej ma postać

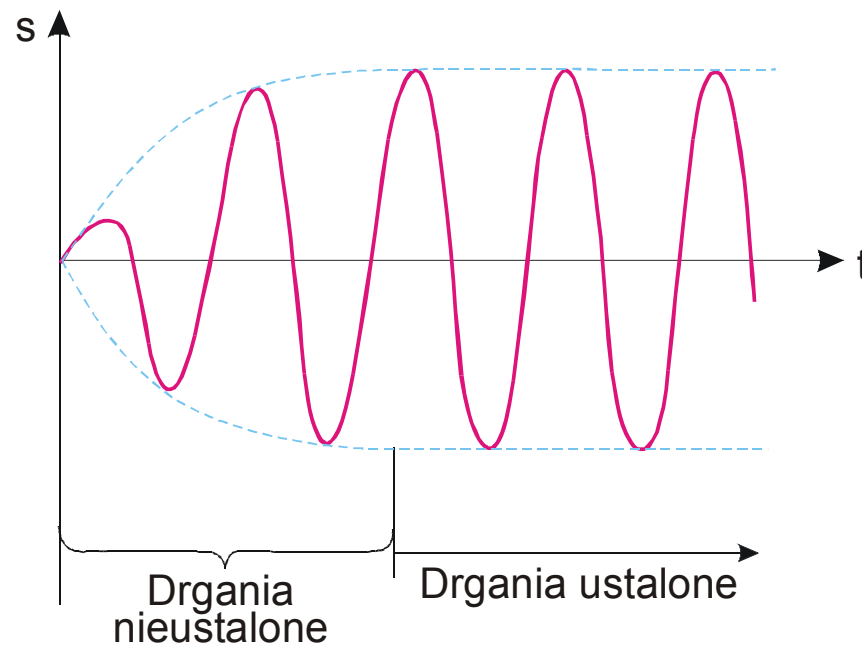
$$s = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$$

natomiast jego rzeczywista część jest równa

$$s = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (8.51)$$

Składowa ogólnego rozwiązania równania (8.48) stanowiąca ogólne rozwiązanie równania jednorodnego [patrz (8.31)] odgrywa istotną rolę tylko w początkowym stadium procesu (przy ustalaniu się drgań) do chwili kiedy amplituda drgań wymuszonych osiąga wartość (8.49).

W stanie ustalonym, drgania wymuszone przebiegają z częstością  $\omega$  i są drganiami harmonicznymi, a ich amplituda i faza określone są wzorami (8.49) i (8.50) zależnymi od  $\omega$ .



**Rys. 8.8. Drgania wymuszone**

W przypadku drgań elektromagnetycznych uwzględniając, że

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} \quad [\text{zob. (8.17)}]$$

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad [\text{zob. (8.40)}]$$

wyrażenia (8.49), (8.50) i (8.51) mają postać

$$Q_o = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (8.52)$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{R}{1/(\omega C) - \omega L} \quad (8.53)$$

Różniczkując

$$Q = Q_o \cos(\omega t - \varphi)$$

względem  $t$ , otrzymamy natężenie prądu w obwodzie dla drgań ustalonych

$$I_o = -\omega Q_o \sin(\omega t - \alpha) = I_o \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.54)$$

gdzie

$$I_o = \omega Q_o = \frac{\omega V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (8.55)$$

Wyrażenie (8.54) można zapisać w postaci

$$I = I_o \cos(\omega t - \varphi)$$

gdzie  $\varphi = \alpha - \pi / 2$  oznacza przesunięcie fazowe pomiędzy prądem i napięciem. Zgodnie z wyrażeniem (8.53)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \quad (8.56)$$

Z wyrażenia (8.56) wynika, że prąd opóźniony jest w fazie względem napięcia ( $\varphi > 0$ ) gdy  $\omega L > 1/(\omega C)$  i wyprzedza napięcie ( $\varphi < 0$ ) gdy  $\omega L < 1/(\omega C)$ .

## Amplituda i faza drgań wymuszonych. Rezonans

Z wyrażenia (8.49) wynika, że amplituda może przyjąć pewną maksymalną wartość. Maksimum funkcji uzyskamy różniczkując to wyrażenie względem  $\omega$  i przyrównując do zera

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0$$

Równość ta jest spełniona dla

$$\omega = 0 \text{ i } \omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Tak więc, częstotliwość rezonansowa

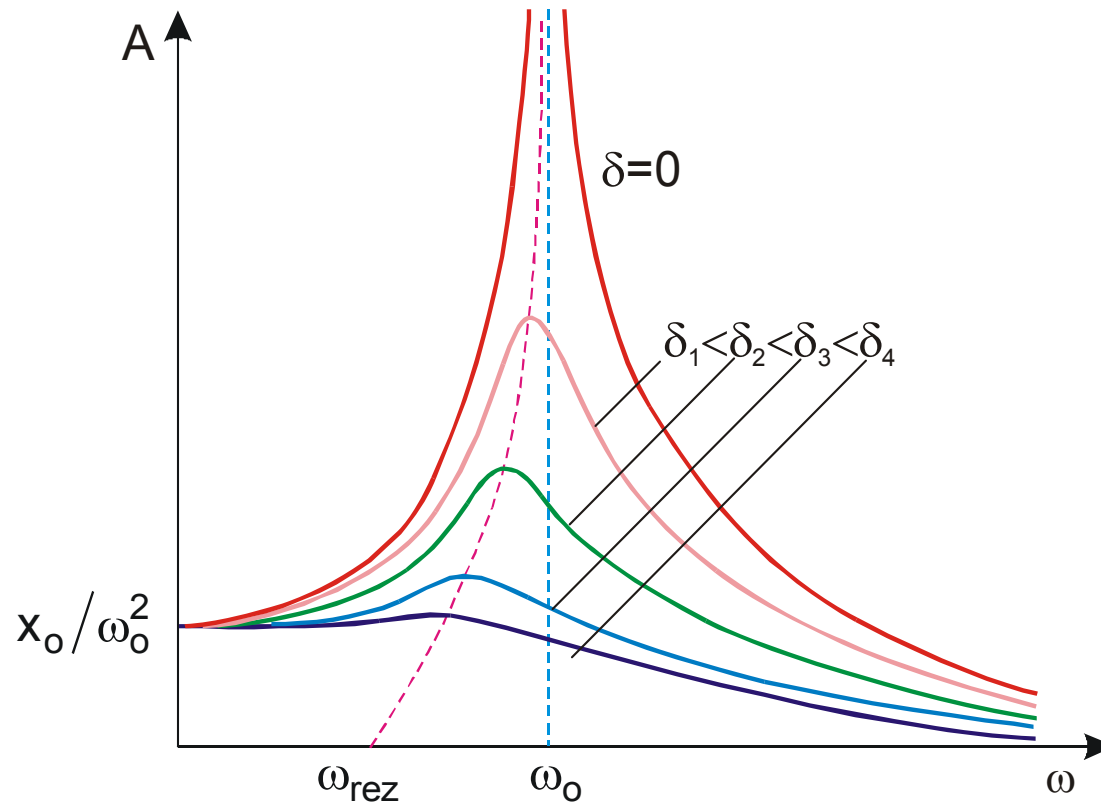
$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (8.57)$$

**Zjawisko silnego wzrastania amplitudy drgań wymuszonych przy zbliżaniu się częstości siły wymuszającej do częstości  $\omega_{rez}$  nazywamy rezonansem.**

Podstawiając (8.57) do (8.49), otrzymujemy

$$A_{rez} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (8.58)$$

Jeżeli  $\omega \rightarrow 0$ , to wszystkie krzywe przyjmują jedną wartość, różną od zera  $x_0 / \omega_0^2$  nazywaną odchyleniem statycznym.



**Rys. 8.9. Krzywe rezonansu dla różnych wartości współczynnika tłumienia.**

Zjawisko rezonansu może być zjawiskiem pożytecznym jak i szkodliwym.

Przykłady zastosowań:

- akustyka (instrumenty)
- odbiorniki radiowe i telewizyjne

Katastrofy



## **Katastrofa mostu w Tacoma** (USA, 7 listopada 1940) [http://pl.wikipedia.org/wiki/Most\\_Tacoma](http://pl.wikipedia.org/wiki/Most_Tacoma)

Most ten był mostem wiszącym, którego główne przęsło miało 840 m długości, przy szerokości jedynie 12 m, co było powodem jego niebywałej wiotkości. Już w trakcie budowy, pracujący robotnicy doznawali mdłości wynikających z dużych ugięć mostu. Po oddaniu do eksploatacji, stał się on prawdziwą atrakcją turystyczną, ze względu na niesamowite wrażenia towarzyszące przejazdowi przez most, tak iż nazwany został potocznie "galopującą Gertie".

Po czterech miesiącach istnienia, rano 7 listopada 1940 r. huraganowy wiatr wiejący od oceanu (56-67 km/h), spowodował wprowadzenie mostu w drgania, odpowiadające ruchowi falowemu. Początkowo (godz. 7:00), był to ruch pomostu w płaszczyźnie pionowej (podnoszenie i opadanie o amplitudzie ok. 90 cm z częstotnością 36 razy na minutę), później ok. godz. 10:00 rytmiczne wznoszenie i opadanie zamieniło się w dwufalowy ruch skręcający 14 cykli na minutę z wychyleniem do 8,4 m, przy skręceniu dochodzącym do 45 stopni. Ok. 10:30 nastąpiło pierwsze załamanie jednej z płyt pomostu, a ok. 11:00 most rozpadł się ostatecznie.

# Prąd zmienny

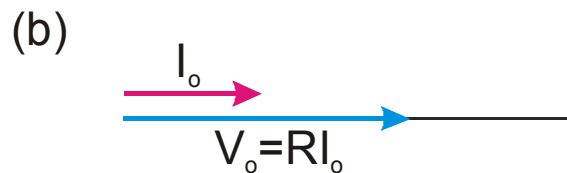
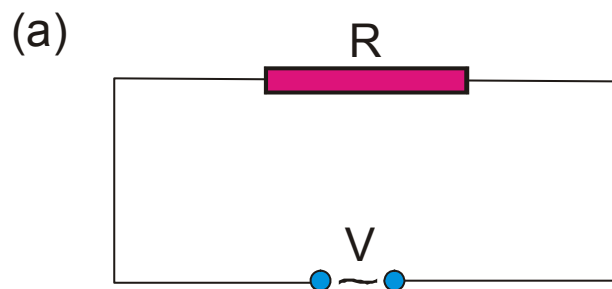
Rozważmy wymuszone drganie elektromagnetyczne zachodzące w obwodzie  $RLC$ .

Prąd zmienny można traktować jako kwasistacjonarny, co oznacza, że chwilowe wartości natężenia prądu we wszystkich przekrojach obwodu są praktycznie jednakowe; spełnione jest prawo Ohma i prawa Kirchhoffa.

Napięcie zmienne

$$V = V_o \cos \omega t \quad (8.59)$$

## Obwód zawierający rezystancję



Prąd płynący przez rezystor określony jest prawem Ohma

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_o}{R} \cos \omega t = I_o \cos \omega t$$

gdzie

$$I_o = \frac{V_o}{R}$$

Rys. 8.10. (a) schemat obwodu; (b) wykres fazowy.

**Przesunięcie fazowe pomiędzy  $I_o$  i  $V_o$  jest zerowe.**



## Obwód zawierający indukcyjność

SEM samoindukcji

$$E_s = -L \frac{dl}{dt}$$

Wówczas prawo Ohma dla rozważanego obwodu ma postać

$$V_o \cos \omega t - L \frac{dl}{dt} = 0$$

stąd

$$L \frac{dl}{dt} = V_o \cos \omega t \quad (8.60)$$

Tak więc spadek napięcia na cewce indukcyjnej

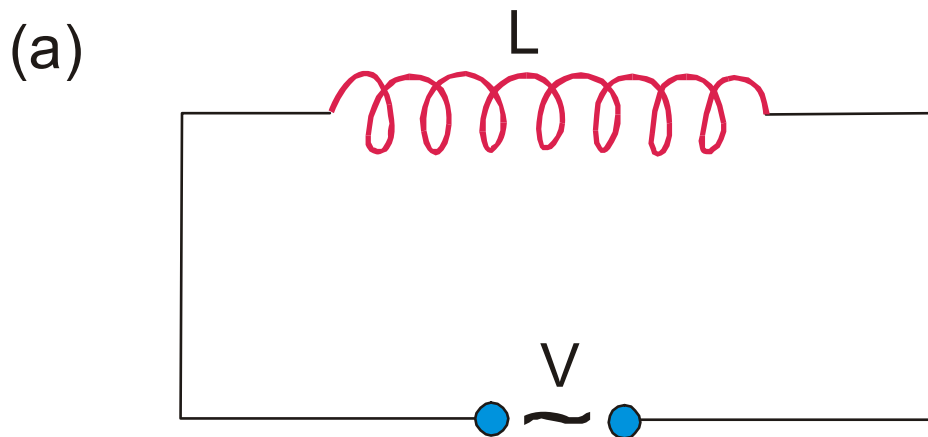
$$V_L = L \frac{dl}{dt} \quad (8.61)$$

Z równania (8.60) wynika, że

$$dl = \frac{V_o}{L} \cos \omega t dt$$

lub po scałkowaniu

$$l = \frac{V_o}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_o}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_o \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (8.62)$$



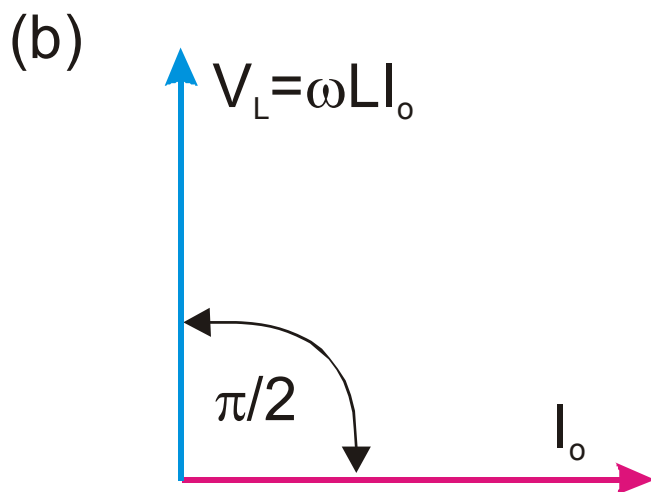
gdzie

$$I_o = \frac{V_o}{\omega L}$$

**Wielkość**

$$R_L = \omega L \quad (8.63)$$

**nazywamy reaktancją indukcyjną.**



Podstawiając  $V_o = \omega L I_o$  w wyrażenie (8.60) i uwzględniając (8.61), otrzymujemy spadek napięcia na cewce indukcyjnej

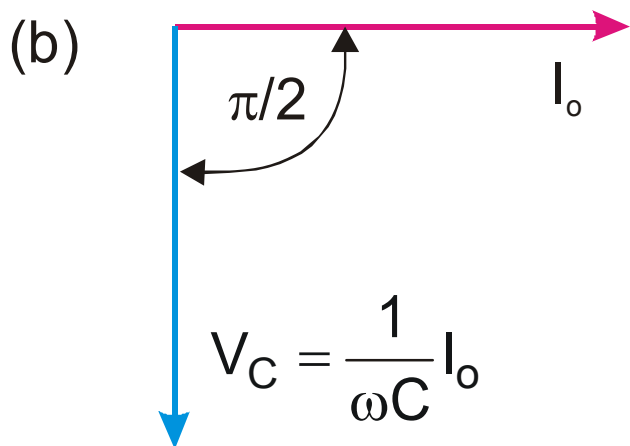
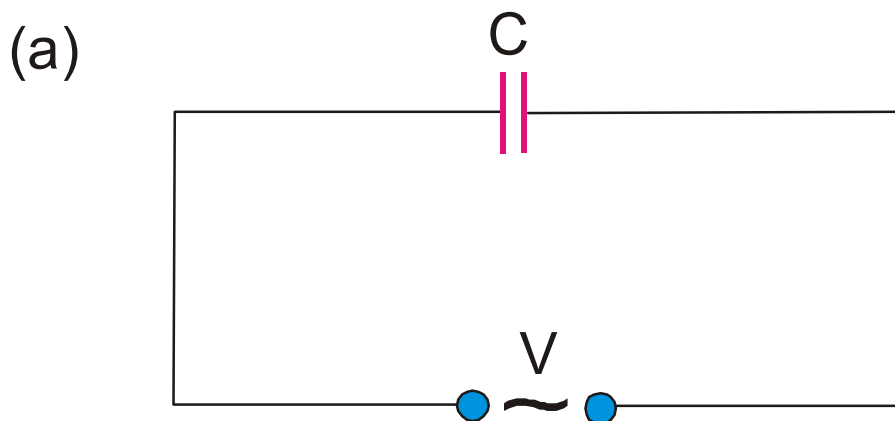
$$V_L = \omega L I_o \cos \omega t \quad (8.64)$$

**Spadek napięcia  $V_L$  wyprzedza w fazie prąd  $I$  płynący przez cewkę o kąt  $\pi/2$ , co pokazano na wykresie fazowym (rys. 8.11b).**

**Rys. 8.11. Obwód zawierający indukcyjność: (a) schemat obwodu; (b) wykres fazowy.**

## Obwód zawierający pojemność

Jeżeli napięcie zmienne (8.59) przyłożymy do kondensatora, to z upływem czasu kondensator będzie przeładowywał się a w obwodzie popłynie prąd zmienny.



Rys. 8.12. Obwód zawierający kondensator: (a) schemat obwodu, (b) wykres fazowy.

$$\frac{Q}{C} = V_c = V_o \cos \omega t$$

Natężenie prądu

$$I = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_o \sin \omega t = I_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.65)$$

gdzie

$$I_o = \omega C V_o = \left[ \frac{V_o}{1/(\omega C)} \right]$$

**Wielkość**

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

**nazywamy reaktancją pojemnościową.**

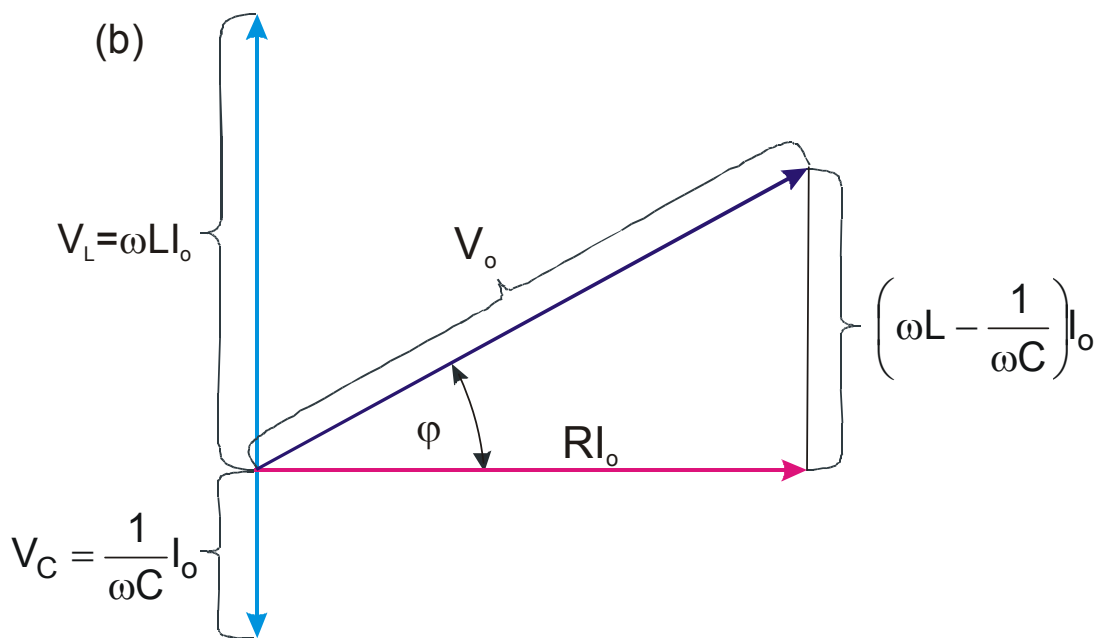
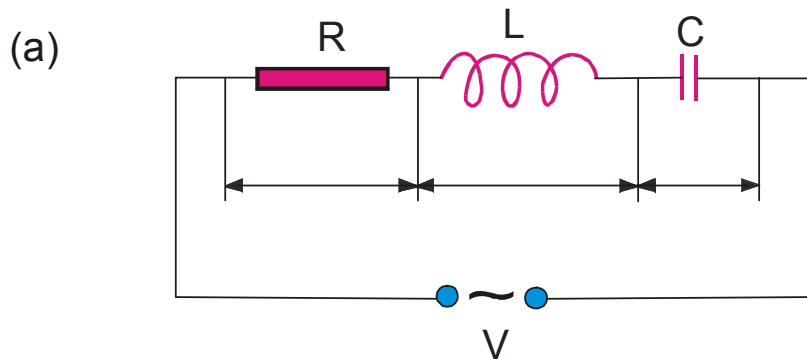
Dla prądu stałego ( $\omega = 0$ )  $R_C = \infty$ , co oznacza, że prąd stały nie płynie przez kondensator.

Spadek napięcia na kondensatorze

$$V_c = \frac{1}{\omega C} I_o \cos \omega t \quad (8.66)$$

**Spadek napięcia  $V_c$  opóźniony jest w fazie o  $\pi/2$  w porównaniu z prądem  $I$ .**

# Obwód RLC



**Rys. 8.13. Obwód RLC: (a) schemat obwodu; (b) wykres fazowy.**

Amplituda przyłożonego napięcia  $V_o$  jest równa sumie geometrycznej amplitud tych spadków napięć.

Z rysunku wynika, że

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \quad (8.67)$$

Z trójkąta prostokątnego otrzymujemy

$$(R I_o)^2 + \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_o \right]^2 = V_o^2$$

stąd amplituda prądu ma wartość

$$I_o = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (8.68)$$

co jest zgodne z (8.55).

Tak więc, jeżeli napięcie w obwodzie zmienia się według prawa

$$V = V_o \cos \omega t$$

to w obwodzie płynie prąd

$$I = I_o \cos(\omega t - \varphi) \quad (8.69)$$

gdzie  $\varphi$  i  $I_o$  określone są wzorami (8.67) i (8.68). Wielkość

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (8.70)$$

nazywamy impedancją obwodu, a **wielkość**

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

**nazywamy reaktancją.**

Zauważmy, że impedancja obwodu  $RLC$  osiąga minimum, gdy

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

czyli gdy

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.71)$$

Częstość tę nazywamy rezonansową i oznaczamy przez  $\omega_o$ .

## Moc wydzielana w obwodzie prądu zmiennego

Chwilowa wartość mocy rozpraszanej w obwodzie

$$P(t) = V(t)I(t)$$

gdzie

$$V(t) = V_o \cos \omega t \quad \text{a} \quad I(t) = I_o \cos(\omega t - \varphi)$$

$$P(t) = I_o V_o \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_o V_o (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)$$

Uwzględniając, że

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2 \quad , \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0,$$

otrzymamy

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_o V_o \cos \varphi \quad (8.72)$$

Z wykresu fazowego (rys. 8.13) wynika, że  $V_o \cos \varphi = R I_o$ , dlatego

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_o^2$$

Taką moc wydziela prąd stały  $I = I_o / \sqrt{2}$

## Wielkości

$$I = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \quad ; \quad V = \frac{V_o}{\sqrt{2}}$$

nazywamy odpowiednio wartościami skutecznymi prądu i napięcia.

Uwzględniając to

$$\langle P \rangle = IV \cos \varphi \quad (8.73)$$

gdzie czynnik  $\cos \varphi$  nazywamy "współczynnikiem mocy".

**Moc wydzielana w obwodzie prądu zmiennego zależy nie tylko od natężenia prądu i napięcia, ale również od przesunięcia fazowego między nimi.**



# Procesy falowe

***Falami nazywamy różnego rodzaju rozchodzące się w przestrzeni zaburzenia stanu materii lub pola.***

Fale akustyczne – drgania ciśnienia

Fale elektromagnetyczne – drgania natężeń pola elektrycznego i magnetycznego.

Fale sprężyste – mechaniczne zaburzenia (odkształcenia) rozchodzące się w ośrodku sprężystym

***Fala sprężysta nazywa się podłużną, jeżeli drgania cząstek ośrodka są równoległe do kierunku rozchodzenia się fal. Jeżeli cząsteczki ośrodka drgają w płaszczyznach prostopadłych do kierunku rozchodzenia się fali, to fala taka nazywa się poprzeczną.***

- Fale poprzeczne propagują się tylko w ośrodku który charakteryzuje się sprężystością postaci (ciała stałe).
- Fale podłużne związane są z odkształceniem objętościowym ośrodka i dlatego mogą się rozchodzić zarówno w ciałach stałych, jak i w cieczech i gazach.
- Rozchodzenie się fal sprężystych nie jest związane z przenoszeniem materii.

***Miejsce geometryczne punktów do których dochodzą drgania w danej chwili  $t$ , nazywamy czołem fali.***

***Miejsce geometryczne punktów drgających w jednakowej fazie nazywamy powierzchnią falową.***



Powierzchni falowych można przeprowadzić bardzo dużo, natomiast w danej chwili czasu jest to tylko jedno czoło fali.

Powierzchnie falowe mogą mieć dowolne kształty: fala płaska, kulista.

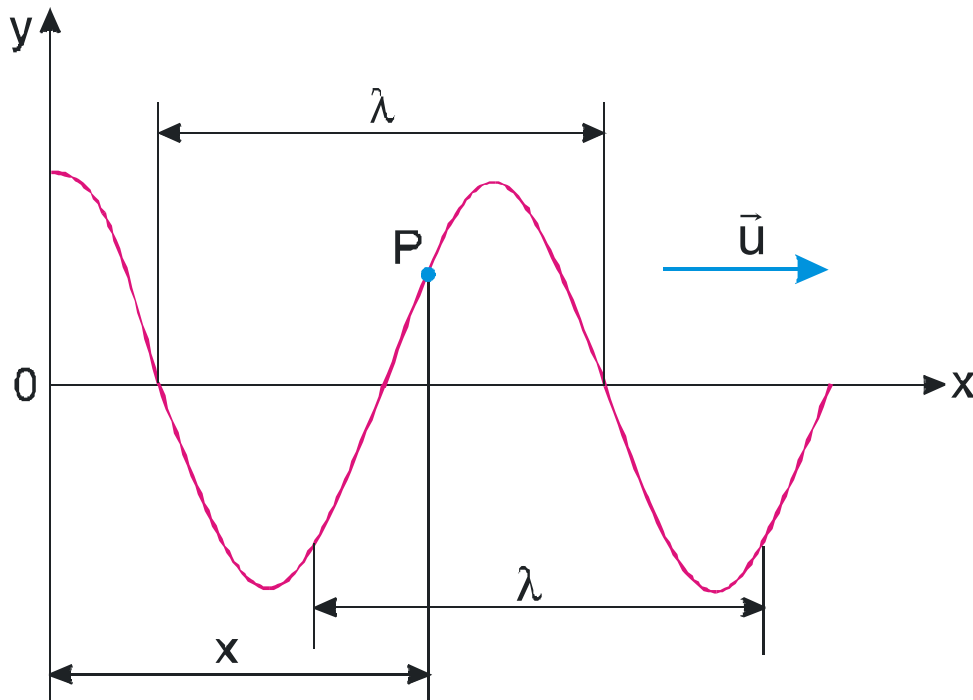


# Fale biegnące

Falami biegnącymi nazywamy fale, które (w odróżnieniu od fal stojących) przenoszą energię.

## Fala na strunie

- zakładamy, że oś  $x$  jest zgodna z kierunkiem propagacji fali,
- powierzchnie falowe są prostopadłe do osi  $x$ ,
- przemieszczenie  $y = y(x, t)$ .



Rys. 8.14. Fala biegnąca po strunie.

Jeżeli drganie w płaszczyźnie  $x = 0$  opiszemy funkcją  $y = A \cos \omega t$ , to drganie punktu P jest opóźnione o czas  $\tau = x/u$  potrzebny dla przemieszczenia fali. Wówczas równanie drgań cząstek leżących w odległości  $x$  ma postać

$$y(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \quad (8.74)$$

**Jest to równanie fali biegnącej.**

Jeżeli fala płaska propaguje się w kierunku przeciwnym, to

$$y(x, t) = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{u} \right)$$

W ogólnym przypadku równanie płaskiej sinusoidalnej fali, ma postać

$$y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (8.75)$$

gdzie:

$A$  – amplituda fali,

$\omega$  – częstość kołowa,

$\varphi_0$  – faza początkowa, natomiast

$[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  oznacza całkowitą fazę fali.

Liczba falowa

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u} \quad (8.76)$$

Uwzględniając to

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (8.77)$$

W postaci funkcji zespolonej

$$y(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

gdzie sens fizyczny ma jedynie część rzeczywista.

Założmy, że w procesie falowym faza jest stała, to jest

$$\omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 = \text{const} \quad (8.78)$$

Różniczkując to wyrażenie otrzymujemy  $dt - (1/u)dx = 0$ , skąd

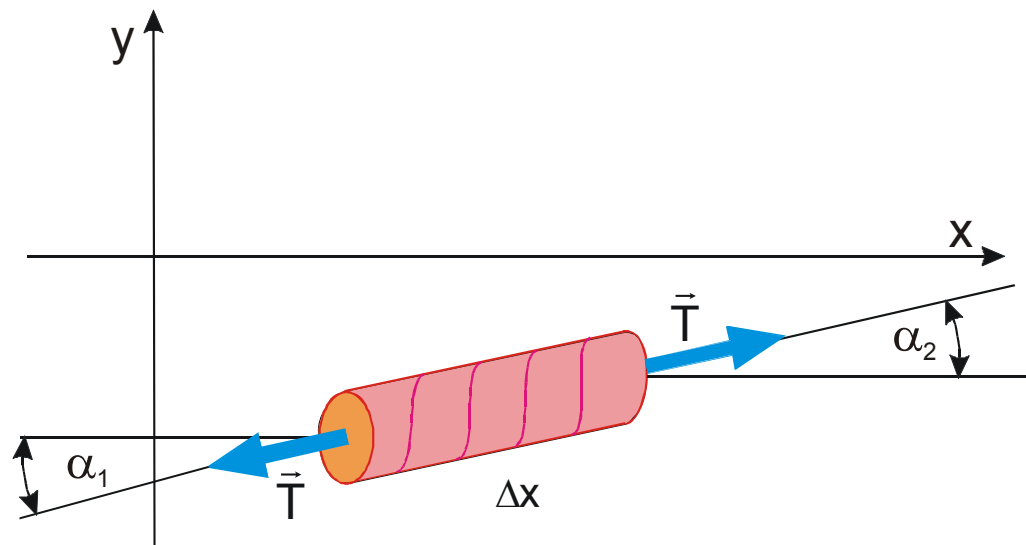
$$\frac{dx}{dt} = u \quad (8.79)$$

Prędkość  $u$  propagacji fali jak prędkością przemieszczania się fazy fali. Z tego powodu prędkość tę nazywamy prędkością fazową.

Z wyrażenia (8.76) wynika, że

$$u = \frac{\omega}{k} \quad (8.80)$$

co oznacza, że **prędkość fal sinusoidalnych zależy od ich częstości. To zjawisko nazywamy dyspersją fal, a ośrodek w którym obserwowana jest dyspersja fal nazywamy ośrodkiem dyspersyjnym.**



**Rys. 8.15. Siły działające na element  $\Delta x$  struny.**

Teraz znajdziemy relację określającą zależność prędkości fali na strunie od  $T$  i  $\mu$ . Dla małych kątów

$$\sin \alpha = \alpha = \partial y / \partial x.$$

Siła wypadkowa działająca na element struny w kierunku pionowym jest równa iloczynowi masy elementu struny  $\mu \Delta x$  przez przyspieszenie pionowe  $\partial^2 y / \partial t^2$ . Wobec tego

$$F_{wyp} = T \alpha_1 - T \alpha_2 = (\mu \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Podstawiając  $\alpha = \partial y / \partial x$ , otrzymamy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8.81)$$

**Jest to różniczkowe równanie falowe struny.**

Prędkość fali można określić podstawiając w (8.81) odpowiednie pochodne funkcji  $y(x, t)$  określonej równaniem (8.77).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \end{aligned}$$

Uwzględniając te wyrażenia w (8.81), mamy

$$k^2 = \frac{\mu}{T} \omega^2$$

skąd znajdujemy

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (8.82)$$

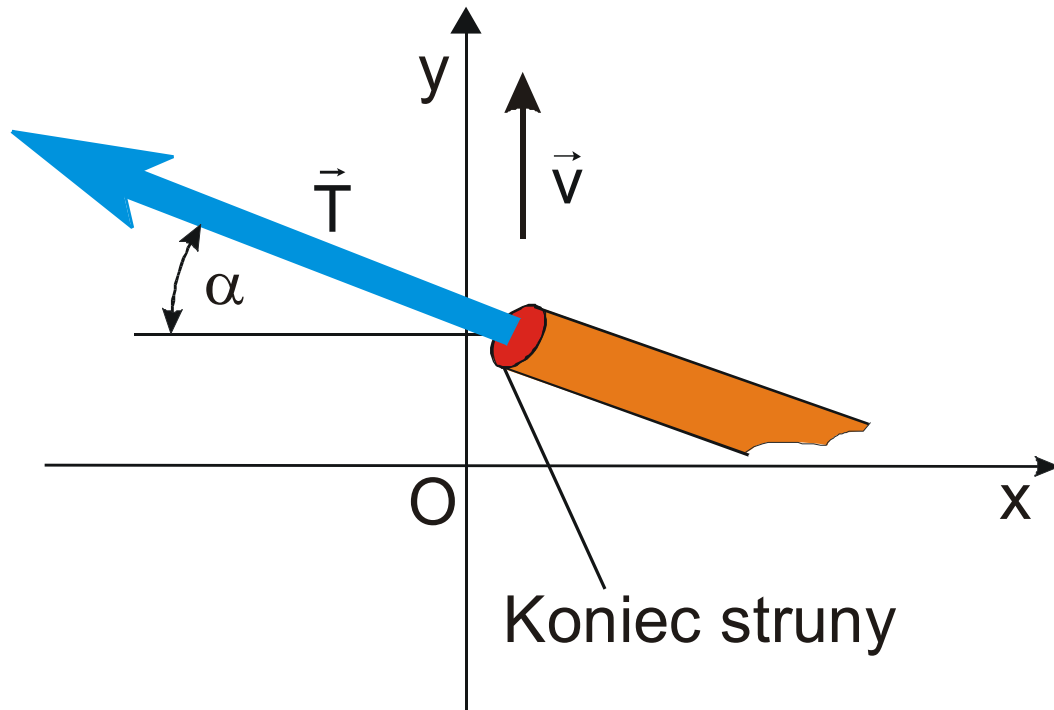
Podstawiając do równania (8.81) w miejsce wyrażenia  $\mu/T$  parametr  $1/u^2$ , otrzymamy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8.83)$$

**Jest to równanie falowe.** Jego rozwiązaniem jest wyrażenie (8.77)

# Przenoszenie energii przez fale

Energia dostarczona do jednego końca struny, przenoszona z prędkością fali może być przyjęta i pochłonięta na drugim końcu.



**Rys. 8.16. Koniec struny odciągnięty do góry celem wzbudzenia fali biegnącej.**

Moc

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \sin \alpha$$

kładąc  $v = \partial y / \partial t$ . Dla małego kąta  $\sin \alpha = -\partial y / \partial x$ . Tak więc

$$P = -T \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

a ponieważ  $y = A \cos \omega(t - x/u)$ , więc

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \frac{\omega}{u} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

Chwilowa moc przekazywana w chwili czasu  $t$  w punkcie  $x = 0$

$$P = TA^2 \frac{\omega^2}{u} \sin^2 \omega t$$

Średnia wartość mocy jest dwukrotnie mniejsza ( $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$ )

$$\langle P \rangle = \frac{T\omega^2}{2u} A^2 \quad (8.84)$$

**Średnia wartość przenoszonej mocy nazywana jest natężeniem fali.**

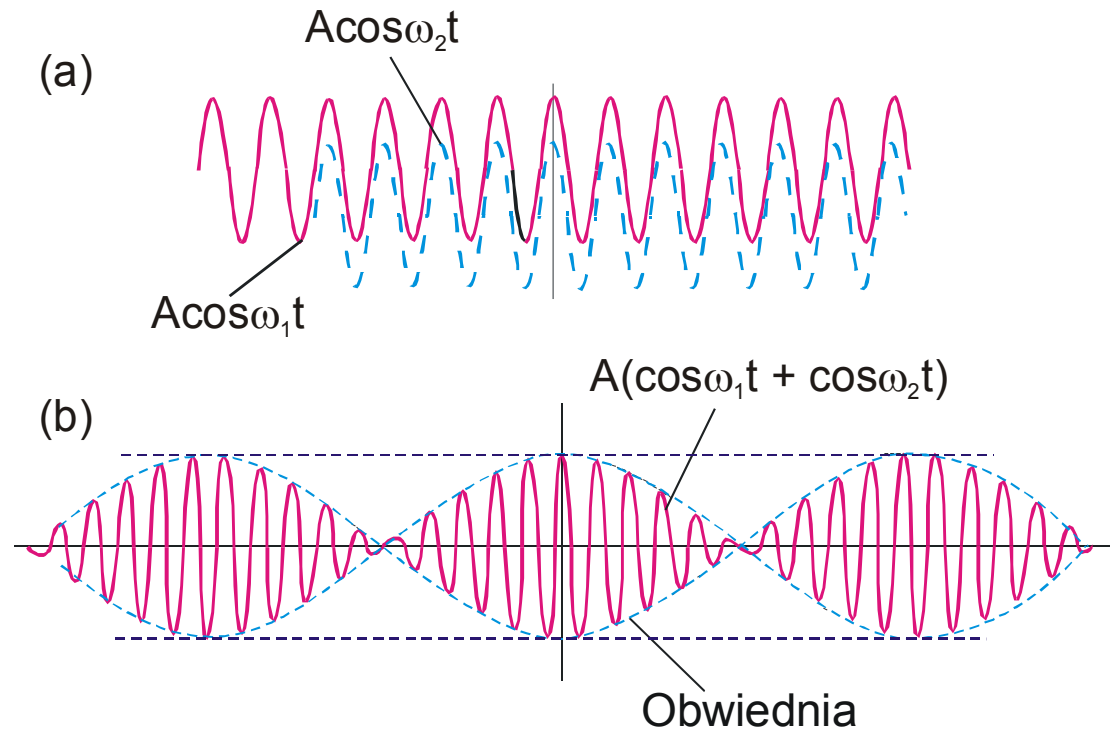
Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu jej amplitudy.





## Paczka falowa. Prędkość grupowa

Jeżeli ośrodek jest liniowy, to spełniona jest zasada superpozycji (nakładania) fal: **wypadkowe wzbudzenie w dowolnym punkcie ośrodka liniowego przy jednoczesnej propagacji kilku fal jest równe sumie wzbudzeń wywołanych przez każdą z tych fal z osobna.**



**Rys. 8.17. (a) Dwie fale monochromatyczne o nieznacznie różniących się częstościach, będących w fazie w początku układu współrzędnych. (b) Suma dwóch fal monochromatycznych.**

Dodawanie fal monochromatycznych o różnych lecz zbliżonych częstościach. Z upływem czasu fale będą "rozbiegać się" fazowo jedna względem drugiej. Przyjmijmy

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad , \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Wówczas suma

$$S(t) = A \cos(\bar{\omega} + \Delta\omega)t + A \cos(\bar{\omega} - \Delta\omega)t$$

Wyrażenie to możemy przekształcić

$$S(t) = 2A \cos[(\Delta\omega)t] \cos \bar{\omega}t = A(t) \cos \bar{\omega}t \quad (8.85)$$

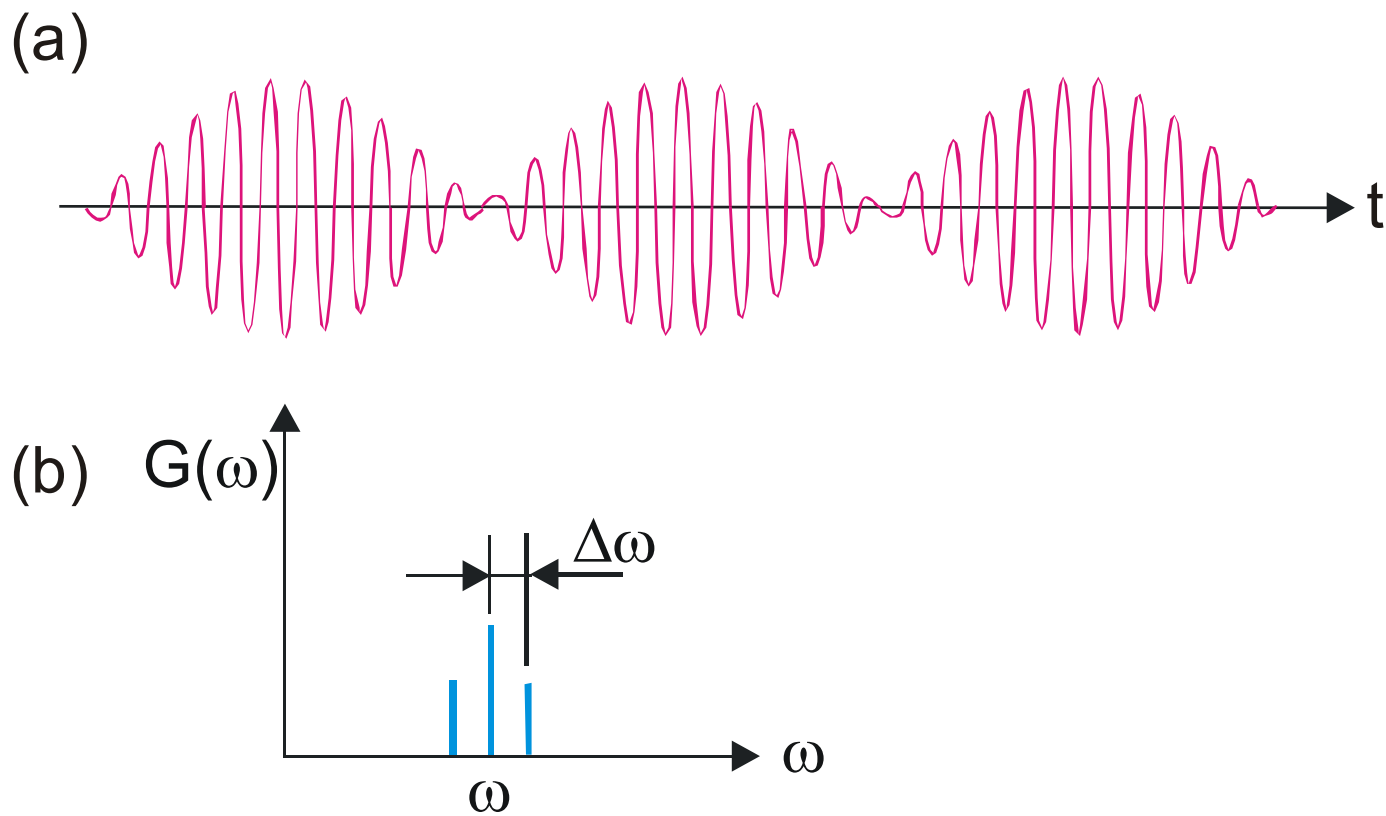
**gdzie**

$$A(t) = 2A \cos(\Delta\omega)t$$

**jest obwiednią, czyli funkcją modelującą.**

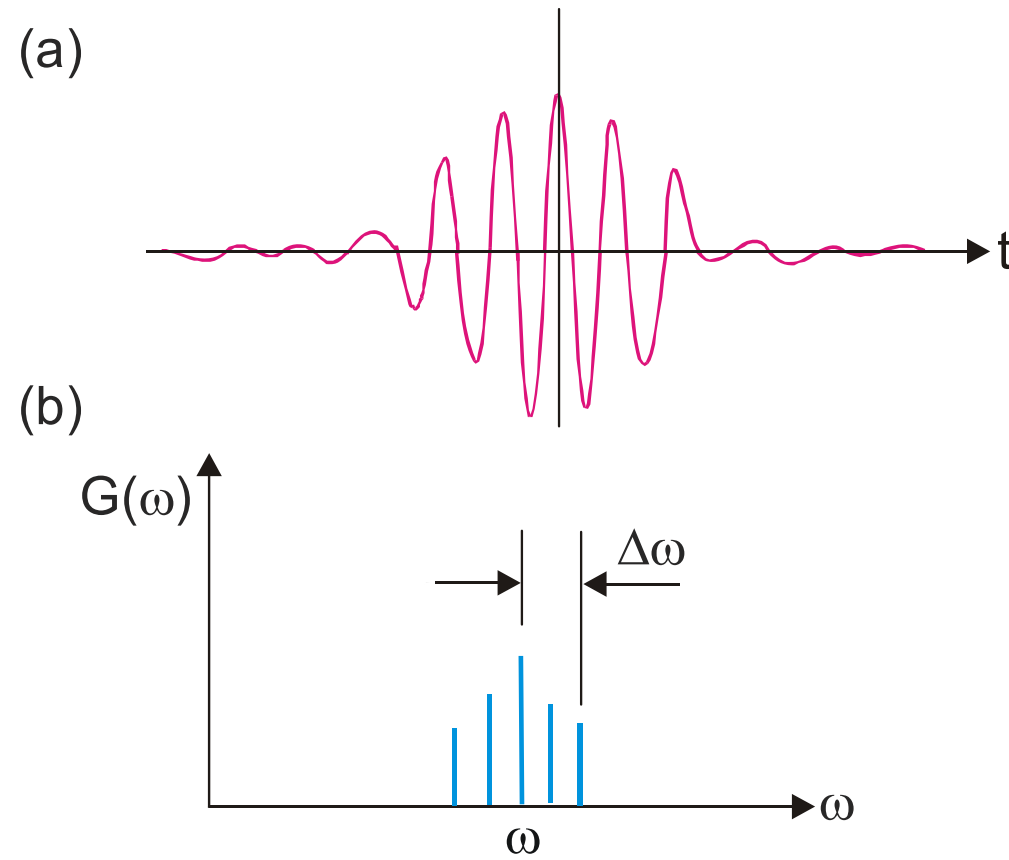
Dodamy większą liczbę fal monochromatycznych o nieznacznie różniących się częstościach.

Poprzez dobór fal monochromatycznych o zbliżonych częstościach można zbudować paczkę falową.



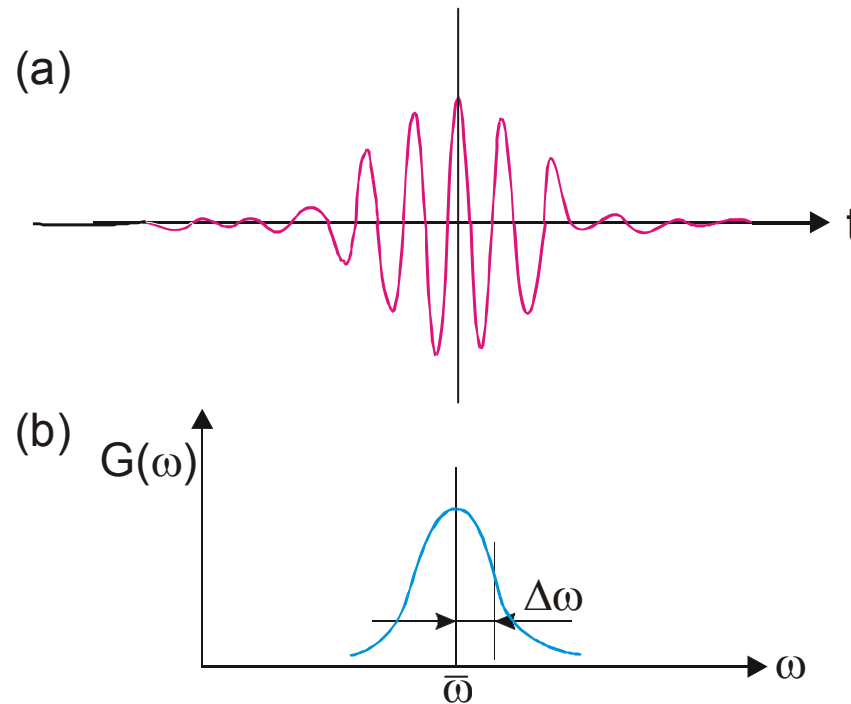
**Rys. 8.18. (a) Suma trzech fal monochromatycznych. (b) Względny rozkład amplitud.**

Funkcja  $G(\omega)$  charakteryzuje względne intensywności trzech sumowanych fal monochromatycznych.



**Rys. 8.19. (a) Suma pięciu fal monochromatycznych. (b) Względny rozkład amplitud.**

W celu uformowania pojedynczej paczki falowej dokonuje się sumowania nieskończenie wielu fal monochromatycznych o zbliżonych częstościach.



**Rys. 8.20. (a) Suma nieskończonej liczby fal monochromatycznych. (b) Względny rozkład amplitud.  $G(\omega)$  - funkcja gaussowska ze średnią wartością  $\bar{\omega}$  i odchyleniem średniokwadratowym  $\Delta\omega$ .**

Funkcja gaussowska  $G(\omega)$  charakteryzuje względne amplitudy pojedynczych składowych monochromatycznych

$$G(\omega) = \exp\left[-\frac{(\bar{\omega} - \omega)^2}{2(\Delta\omega)^2}\right] \quad (8.87)$$

gdzie  $\Delta\omega$  odchylenie średniokwadratowe – rozrzut częstości.

Aby obliczyć całkę

$$\int G(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (8.88)$$

skorzystamy z tablic całek

$$\int \exp\left[-\frac{(\bar{\omega} - \omega)^2}{2(\Delta\omega)^2}\right] \cos \omega t d\omega = \sqrt{2\pi} \exp\left[-\left(\frac{t^2}{2}\right)(\Delta\omega)^2\right] \cos \bar{\omega} t \quad (8.89)$$

Jest to fala monochromatyczna  $\cos \bar{\omega} t$  zmodulowana gaussowską obwiednią  $\exp\left[-\left(t^2/2\right)(\Delta\omega)^2\right]$ .

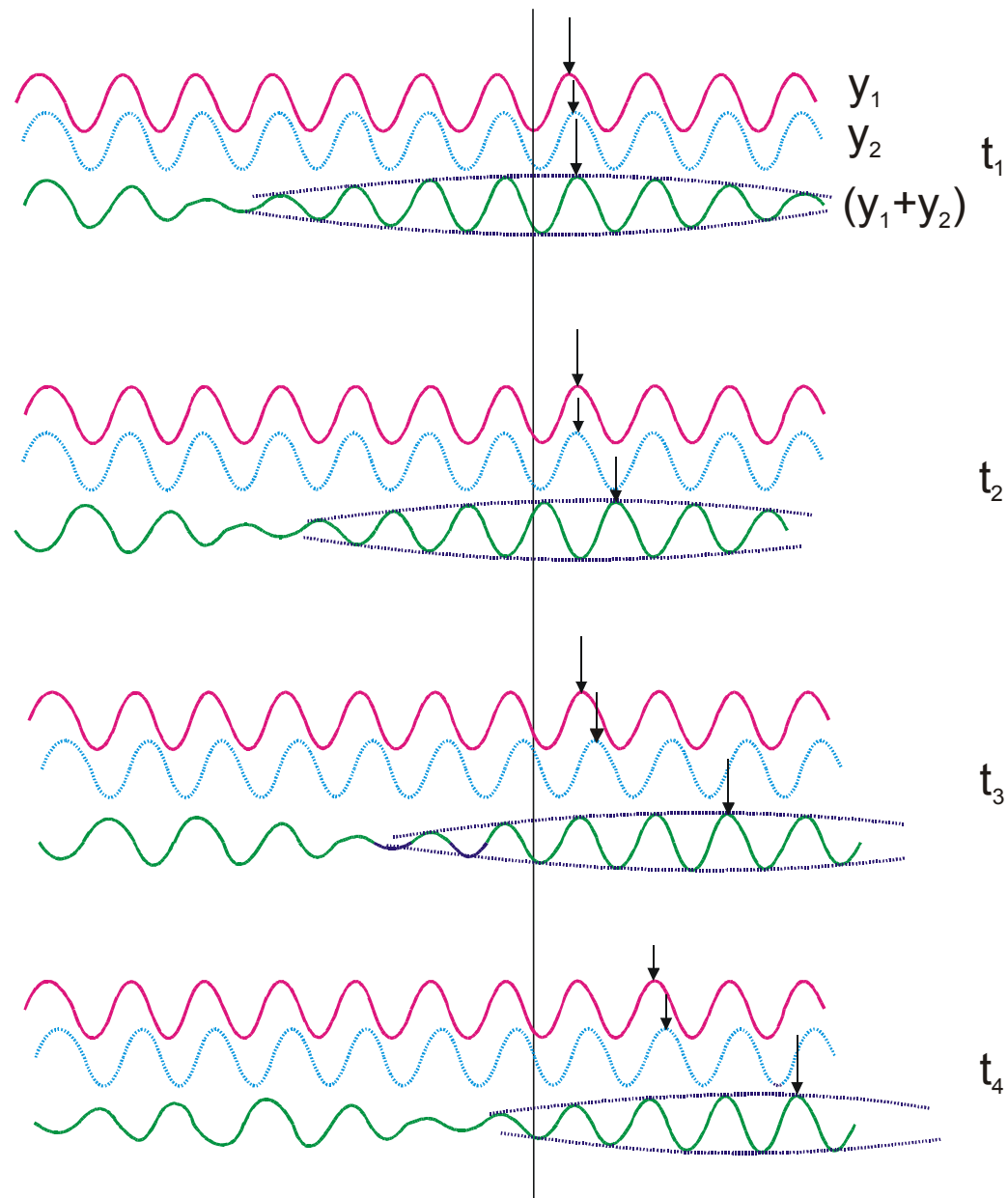
Odchylenie średniokwadratowe dla tej funkcji

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta\omega} \quad (8.90)$$

nazywane jest szerokością paczki falowej

**Rozrzut częstości składowych monochromatycznych równy jest odwrotności szerokości paczki falowej. Funkcja  $G(\omega)$  nazywana jest transformatą (obrazem) Fouriera paczki falowej.**

Prędkość paczki falowej, czyli prędkość obwiedni, nazwana jest prędkością grupową. Prędkość grupowa może znacznie różnić się od prędkości fazowej, z którą rozchodzą się składowe monochromatyczne.



**Rys. 8.21.** Dwie fale monochromatyczne  $y_1$  i  $y_2$  poruszają się w prawo z nieznacznie różniącymi się prędkościami. Obwiednia sumy  $y_1$  i  $y_2$  przemieszcza się w prawo z podwójną prędkością. Przytoczono cztery kolejne położenia odpowiadające chwilom czasu  $t_1, \dots, t_4$ . Strzałkami zaznaczono położenie grzbietów w różnych chwilach czasu.

Superpozycja dwóch fal biegnących

$$y(x, t) = A \cos[(\bar{\omega} + \Delta\omega)t - (\bar{k} + \Delta k)x] + A \cos[(\bar{\omega} - \Delta\omega)t - (\bar{k} - \Delta k)x]$$

gdzie  $\bar{k} = 2\pi / \lambda$  jest średnią liczbą falową.

Stosując dla  $\cos \alpha + \cos \beta$  trygonometryczną formę dodawania,

$$y(x, t) = 2A \cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x] \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x)$$

Obwiednie możemy opisać w postaci

$$A(x, t) = 2A \cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x].$$

Maksimum funkcji jest przyjmowane gdy

$$(\Delta\omega)t - (\Delta k)x = 0$$

to jest przy

$$\frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Jest to prędkość przemieszczania się grzbietu obwiedni czyli prędkość grupowa.

Jeżeli mamy zbiór fal monochromatycznych o zbliżonych częstościach, przy czym  $\omega = \omega(k)$ , to prędkość grupowa

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{8.91}$$



$$v_g = \frac{d(uk)}{dk} = u + k \frac{du}{dk} = u + k \left( \frac{du}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} \right) = u + k \left( -\frac{\lambda}{k} \right) \frac{du}{d\lambda}$$

$$v_g = u - \lambda \frac{du}{d\lambda} \quad (8.92)$$

$v_g$  może być mniejsze jak i większe od  $u$  w zależności od znaku  $du / d\lambda$ .

W ośrodkach niedispersyjnych  $du / d\lambda = 0$  i  $v_g = u$ .

W teorii względności udowadnia się, że prędkość grupowa  $v_g \leq c$ , podczas gdy dla prędkości fazowej nie ma ograniczenia.

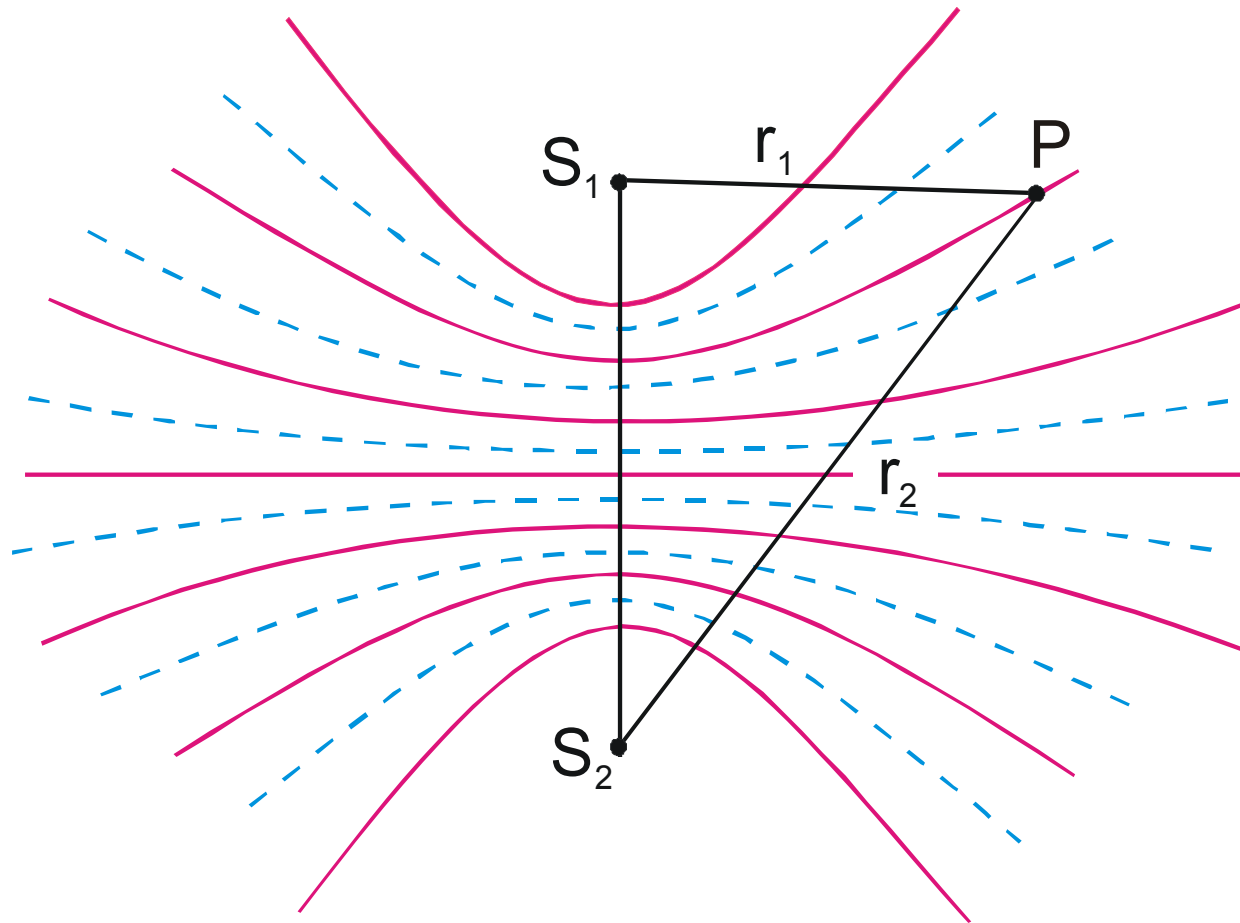
Przykłady rozchodzenia się fali z prędkością grupową:

- przechodzenie światła przez dielektryk,
- paczki falowe.

# Interferencja fal

*Fale nazywamy koherentnymi jeżeli różnica ich faz pozostaje stała w czasie.*

Superpozycja dwóch koherentnych fal sferycznych wzbudzonych źródłami punktowymi.



**Rys. 8.22. Interferencja koherentnych fal sferycznych.**

Równanie fali sferycznej

$$S(r, t) = \frac{A_o}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_o) \quad (8.93)$$

Amplituda fali sferycznej maleje jak  $1/r$  (gdy nie ma miejsca dysypacja energii). W wyniku superpozycji dwóch fal

$$S_1(r, t) = \frac{A_o}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1)$$

$$S_2(r, t) = \frac{A_o}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2)$$

Amplituda fali wypadkowej w punkcie P

$$A^2 = A_o^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}$$

Dla źródeł koherentnych  $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ , więc wynik interferencji fal zależy od wielkości  $\Delta = r_1 - r_2$  nazywanej różnicą dróg fal.

W punktach gdzie

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi \quad (8.94)$$

( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) obserwuje się **maksima interferencyjne**, a amplituda wypadkowa wynosi

$$A = \frac{A_o}{r_1} + \frac{A_o}{r_2}$$

W punktach gdzie

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm(2m + 1)\pi \quad m = 1, 2, \quad (8.95)$$

obserwuje się **minima interferencyjne**; amplituda wypadkowa

$$A = \left| \frac{A_o}{r_1} - \frac{A_o}{r_2} \right|$$

$m = 0, 1, 2, \dots$  nazywamy odpowiednio **rzędem interferencyjnego maksimum lub minimum**.

Warunki (8.94) i (8.95) sprowadzają się do tego, że

$$r_1 - r_2 = \text{const} \quad (8.96)$$

Jest to równanie hiperboli o ogniskach w punktach  $S_1$  i  $S_2$ .

# Fale stojące

Szczególnym przypadkiem interferencji są fale stojące.

Dwie fale sinusoidalne propagujące się w przeciwnych kierunkach wzdłuż osi  $x$  mają jednakowe amplitudy i częstotliwości.

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

Dodając te równania, otrzymamy

$$y_1 + y_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos(2\pi x / \lambda) \cos \omega t \quad (8.97)$$

W każdym punkcie fali stojącej zachodzą drgania o tej samej częstotliwości  $\omega$  z amplitudą  $A_{st} = |2A \cos(2\pi x / \lambda)|$ .

W punktach (**strzałki**) gdzie

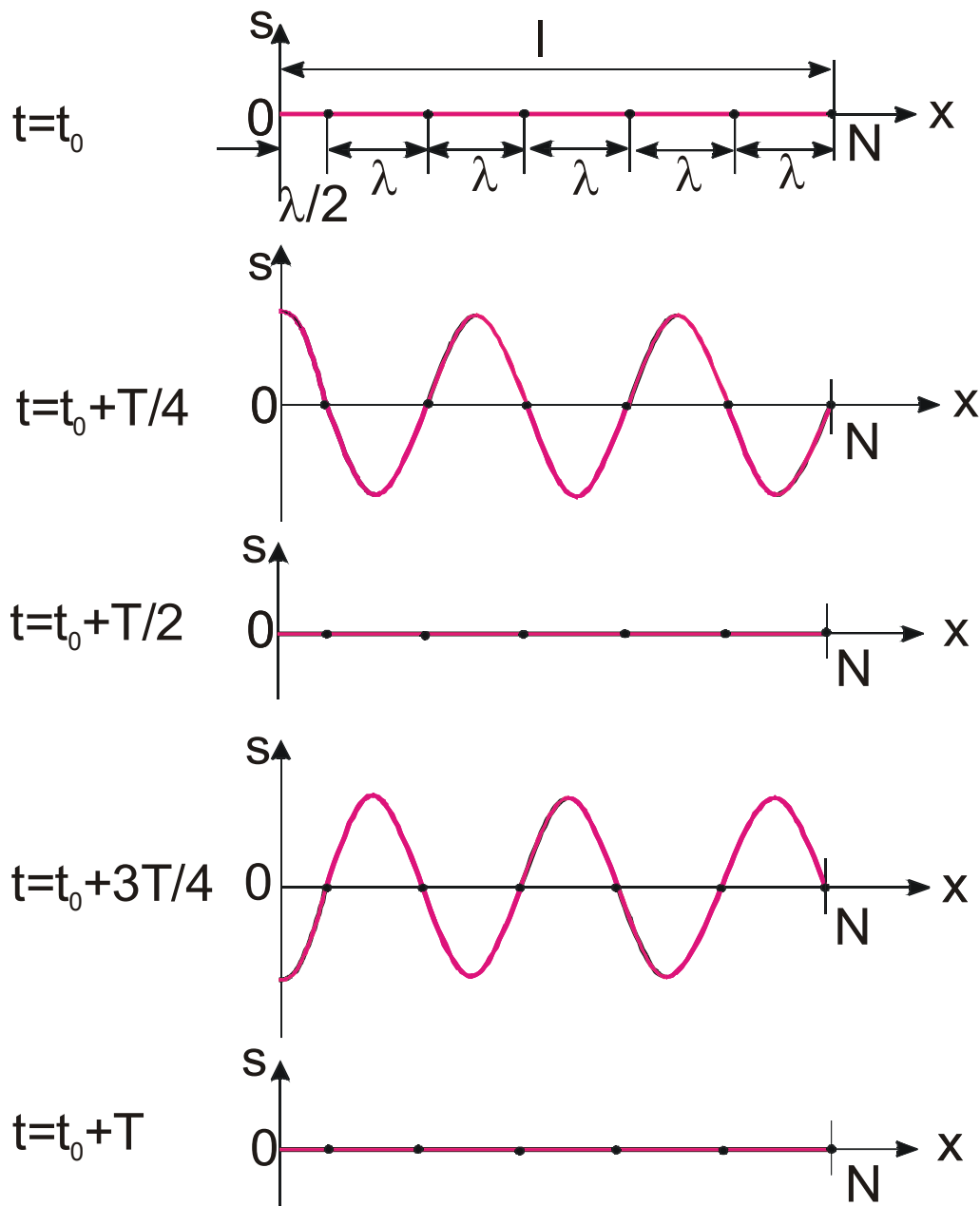
$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

amplituda fali stojącej osiąga maksimum równe  $2A$ .

W punktach (węzły) gdzie

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

amplituda fali stojącej jest zerowa.



Współrzędne strzałek i węzłów

$$x_s = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

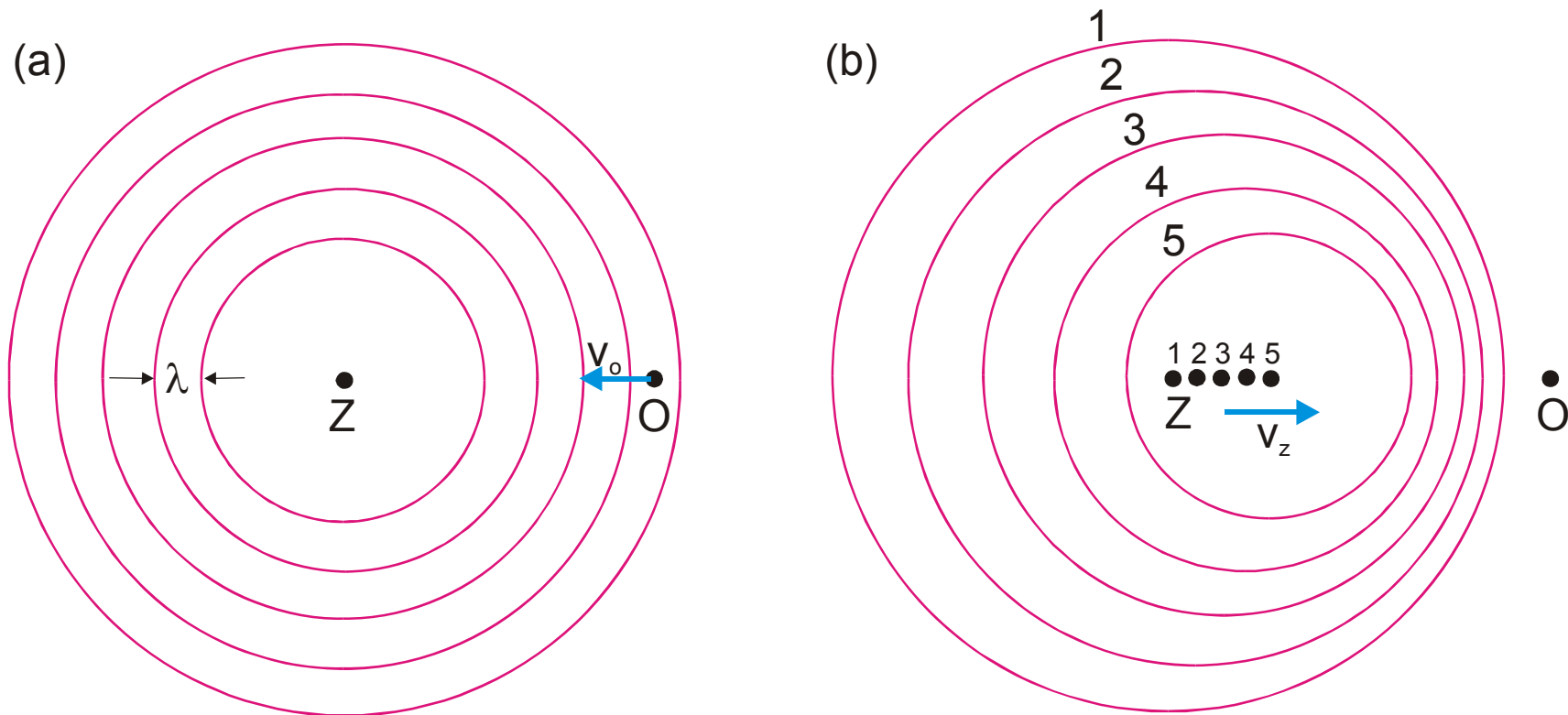
$$x_w = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

**Rys. 8.23. Fala stojąca.**

# Zjawisko Dopplera

Zmiana częstości wynikająca z wzajemnego ruchu obserwatora i źródła nazywa się zjawiskiem Dopplera.

Typowy przykład: dźwięk gwizdka zbliżającego się pociągu.



Rys. 8.24. Zjawisko Dopplera: a) źródło jest nieruchome (zbliżający się obserwator odbiera fale o większej częstości), b) źródło zbliża się do obserwatora (fala ma mniejszą długość z przodu, a większą z tyłu).

Gdyby obserwator nie poruszał się, to w ciągu czasu  $t$  rejestrowałby  $ut/\lambda$  fal. Ponieważ jednak porusza się w kierunku źródła z prędkością  $v_o$ , to w tym samym czasie  $t$  odbiera on  $v_o t/\lambda$  dodatkowych fal. Z tego powodu częstotliwość  $f'$  odbierana przez obserwatora

$$f' = \left( \frac{ut}{\lambda} + \frac{v_o t}{\lambda} \right) \frac{1}{t} = \frac{u + v_o}{\lambda} = \frac{(u + v)f}{u} = f \left( 1 + \frac{v_o}{u} \right) \quad (8.98)$$

Częstotliwość odbierana przez obserwatora jest większa od częstotliwości źródła. Gdy obserwator oddala się, to we wzorze (8.98) należy zmienić znak prędkości  $v_o$ , co powoduje, że częstotliwość ulega zmniejszeniu.

Gdy źródło porusza się względem nieruchomego obserwatora, występuje efekt skrócenia długości fali w kierunku obserwatora oraz wydłużenia długości fali w kierunku przeciwnym, co pokazano na rys. 8.24b.

Jeżeli częstotliwość źródła jest  $f$ , a jego prędkość  $v_z$ , to w czasie jednego okresu drgań źródło to przesuwa się o odcinek  $v_z/f$  i każda długość fali ulega skróceniu o ten odcinek. Długość fali dochodzącej do obserwatora wynosi więc

$$\lambda' = \frac{u}{f} - \frac{v_z}{f}$$

A stąd częstotliwość odbierana przez obserwatora

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{uf}{u - v_z} = f \frac{1}{1 - (v_z/u)} \quad (8.99)$$

Mamy więc efekt podobny jak w przypadku ruchu obserwatora; zbliżanie się źródła powoduje wzrost częstotliwości, a oddalanie ( $v_z < 0$ ) zmniejszenie się częstotliwości.



W przypadku gdy porusza się zarówno źródło dźwięku jak i obserwator, to należy traktować, że ruch źródła odbywa się niezależnie od ruchu obserwatora.

W przypadku fal akustycznych, stosunek prędkości obserwatora (lub źródła) do prędkości fazowej fali nazywa się liczbą Macha

$$m = \frac{v}{u}$$

Gdy źródło porusza się z prędkością przewyższającą prędkość dźwięku, to wytwarza ono falę uderzeniową o właściwościach odmiennych od poprzednio omawianych fal.

Zjawisko Dopplera dla fal elektromagnetycznych ma liczne praktyczne zastosowania, np.:

- w fizyce atomowej,
- w astronomii do określenia prędkości odległych świecących ciał niebieskich,
- w radiolokacji do pomiaru prędkości i odległości ruchomych obiektów.