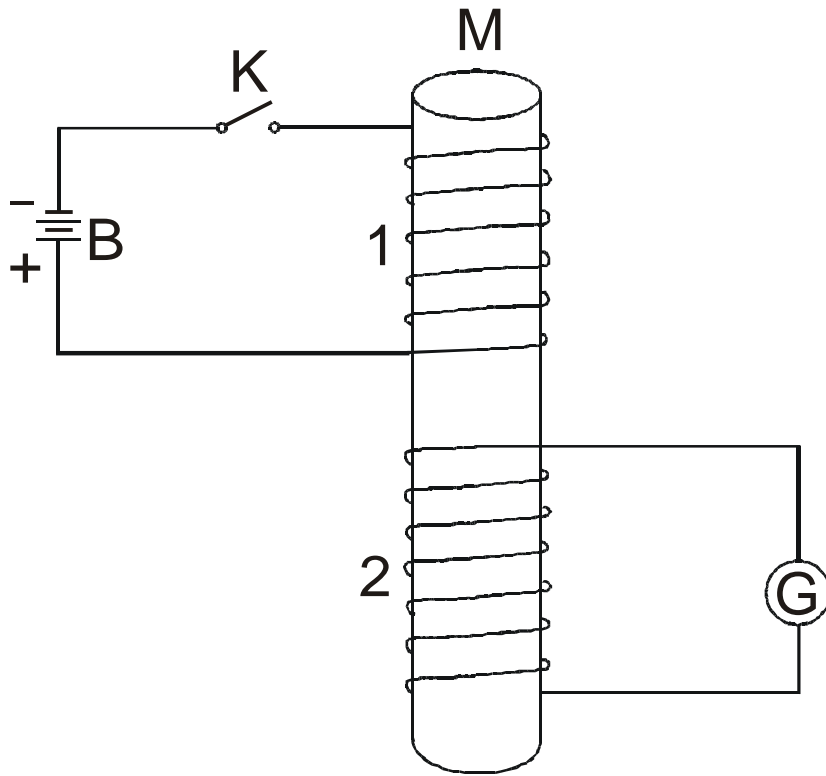


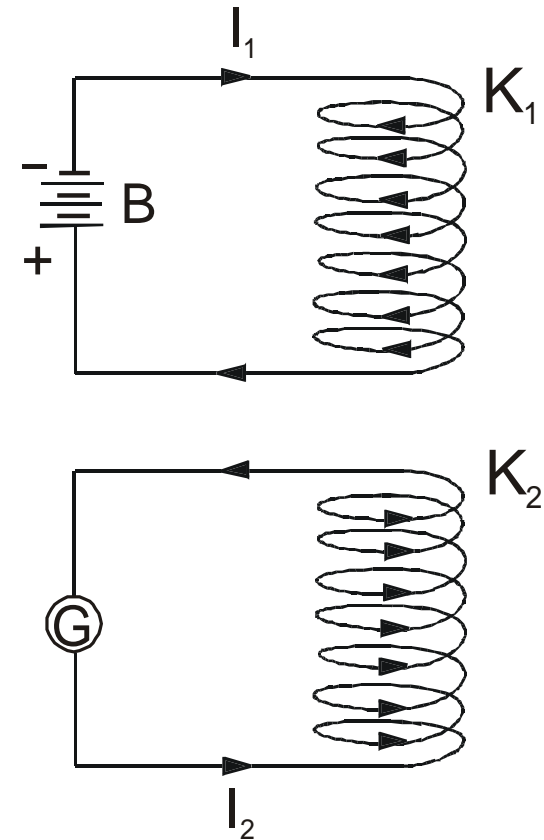
INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA

W 1831 roku, po dziesięciu latach wytrwałych prób, M. Faradayowi udało się wykazać i określić w jaki sposób zmienne pole magnetyczne powoduje powstanie pola elektrycznego. Wykonał eksperyment, który miał w następstwie olbrzymie znaczenie dla rozwoju fizyki i techniki.

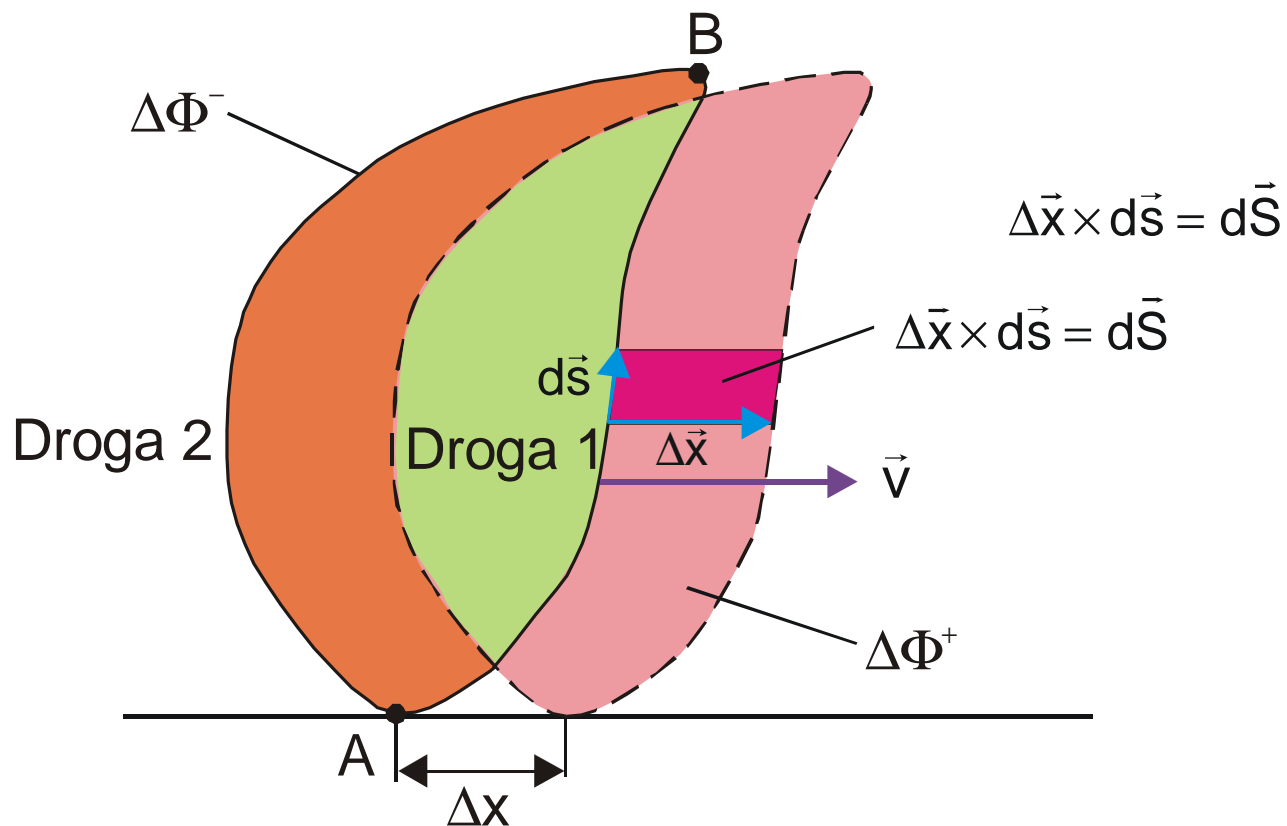
Prawo Faradaya



Rys. 7.1. Doświadczenie Faraday'a prowadzące do odkrycia zjawiska indukcji.



Rys. 7.2. Powstanie prądu indukcyjnego I_2 w czasie ruchu cewki z prądem I_1 .



Rys. 7.3. Zamknięty kontur porusza się z prędkością $\dot{\vec{v}}$ wzdłuż kierunku osi x. Linia przerywaną zaznaczono położenie konturu po czasie Dt .

Praca wykonana przeciwko siłom magnetycznym przy przemieszczeniu ładunku q na odległość $d\vec{S}$ wynosi

$$dW = \mathbf{F}_{mag} \cdot d\mathbf{r} = (q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})d\mathbf{r} = q\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B}\right)d\mathbf{r}$$

Stosując tożsamość wektorową

$$\dot{\mathbf{a}} \times \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{b}} \times \dot{\mathbf{c}}$$

mamy

$$dW = -q \frac{(\dot{\mathbf{B}} \times D \dot{\mathbf{x}}) d\dot{\mathbf{s}}}{dt} = -\frac{\dot{\mathbf{B}}(d\dot{\mathbf{x}} \times d\dot{\mathbf{s}})}{dt}$$

Z rys 7.3 zauważamy, że $d\dot{\mathbf{x}} \times d\dot{\mathbf{s}} = d\dot{\mathbf{S}}$, wówczas

$$dW = -q \frac{\dot{\mathbf{B}} \cdot d\dot{\mathbf{S}}}{dt}$$

Całkowitzą pracę wykonaną przy przemieszczaniu ładunku q z punktu A do punktu B po drodze 1 konturu zapiszemy w postaci

$$W_{AB1} = \int_A^B dW = -q \frac{\int_A^B \dot{\mathbf{B}} \cdot d\dot{\mathbf{S}}}{dt} = -q \frac{dF^+}{dt}$$

Analogiczna praca wykonana przy przemieszczeniu ładunku po drodze 2 z punktu B do punktu A

$$W_{BA2} = \int_B^A dW = q \frac{dF^-}{dt}$$

Praca zużyta na przemieszczenie jednostkowego ładunku po całym konturze

$$W = W_{AB1} + W_{BA2} = -q \left(\frac{dF^+}{dt} - \frac{dF^-}{dt} \right)$$

a ponieważ $dF^+ - dF^-$ oznacza zmianę strumienia magnetycznego przez powierzchnię ograniczoną konturem ABA, więc

$$W = -q \frac{dF_B}{dt}$$

Ponieważ siłę elektromotoryczną określamy jako pracę zużyta na przemieszczenie jednostkowego ładunku, więc

$$SEM = \frac{W}{q} = - \frac{dF_B}{dt} \quad (7.1)$$

SEM mierzona jest w woltach (J/C) i stanowi energię przypadającą na jednostkowy ładunek, dostarczoną elektronowi przewodnictwa przy obejściu obwodu.

Jeżeli źródło pola magnetycznego porusza się i powoduje zmianę strumienia obejmowanego przez kontur, to w konturze powstaje pole elektryczne

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{dF_B}{dt} \quad (7.2)$$

Bardziej ogólne równanie (7.2), słuszne dla dowolnego domniemanego obwodu zamkniętego w przestrzeni, można również zapisać w postaci

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

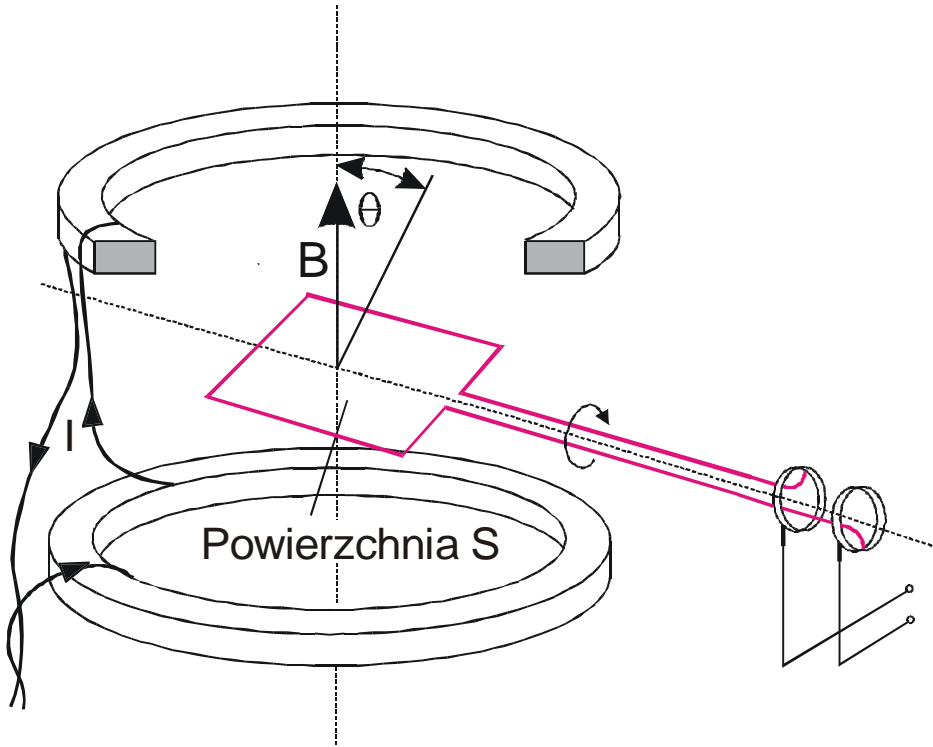
Ponieważ granice całkowania po $d\mathbf{S}$ nie zmieniają się w czasie, można przejść z różniczkowaniem pod znak całki

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.3)$$

Pole elektryczne wzbudzone przez zmienne pole magnetyczne jest polem wirowym.

Faraday uważany jest za jednego z twórców elektrotechniki.

Najpospolitszą częścią urządzeń elektrycznych jest pętla lub cewka obracająca się ze stałą prędkością w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (rys. 7.4).



Składowa indukcji \dot{B} prostopadła do powierzchni pętli wynosi

$$B \sin Q.$$

Więc strumień indukcji płynący przez pętłę w chwili t jest równy

$$F_B(t) = SB \sin(\omega t + a)$$

gdzie S jest powierzchnią pętli.

Indukowana siła elektromotoryczna wynosi

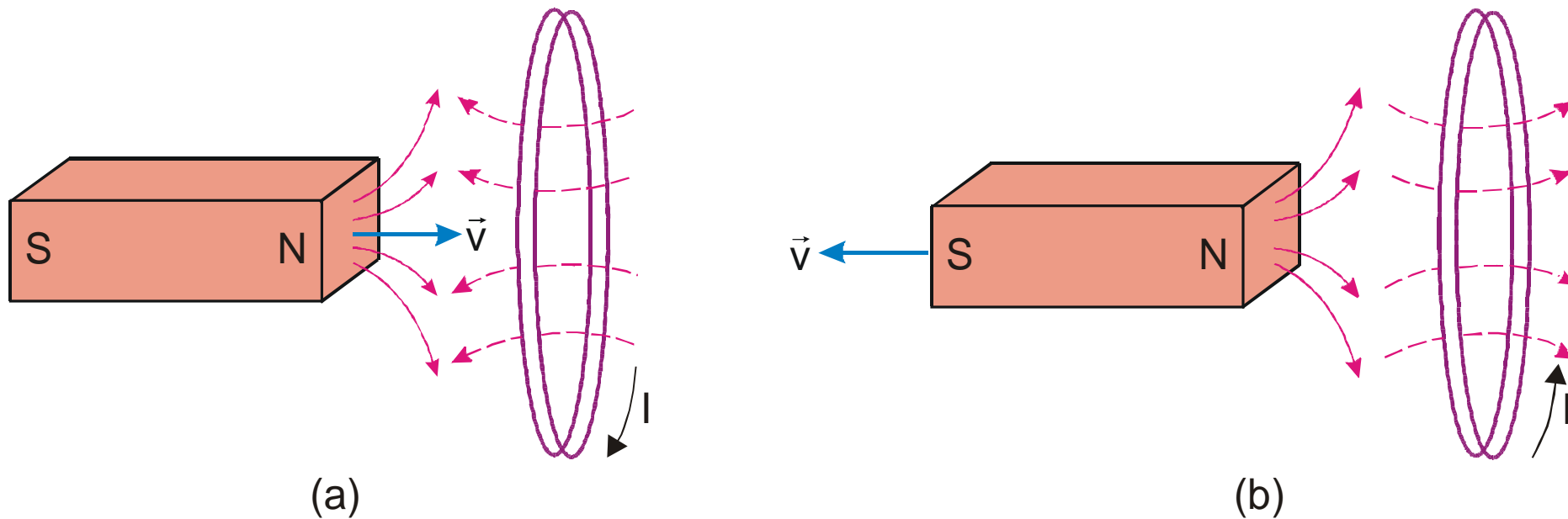
$$SEM = -SB\omega \cos(\omega t + a) \quad (7.4)$$

Rys. 7.4. Dwie cewki wytwarzają w przybliżeniu jednorodne pole magnetyczne o indukcji \dot{B} . Pętla obraca się z prędkością kątową ω . Indukuje się w niej sinusoidalna SEM.

Reguła Lenza

W 1834 roku Lenz ustalił następującą regułę: **prąd indukowany w obwodzie ma zawsze taki kierunek, że wytworzony przez ten strumień magnetyczny przez powierzchnię ograniczoną przez ten obwód przeciwdziała zmianom strumienia, które wywołały pojawienie się prądu indukowanego.**

Matematycznym wyrazem reguły Lenza jest znak "–" w równaniach (7.1)–(7.3).



Rys. 7.5. Ilustracja reguły Lenza.

Reguła Lenza jest konsekwencją spełnienia prawa zachowania energii.

Jeżeli rezystancja obwodu (rys. 7.3) wynosi R , na pracę źródła prądu w czasie dt ($EIdt$) składa się praca na ciepło Joule'a (I^2Rdt) i praca związana z przemieszczeniem obwodu w polu magnetycznym (IdF_B). Mamy więc

$$E I dt = I^2 R dt + I dF_B$$

stąd

$$I = \frac{1}{R} \left(E - \frac{dF_B}{dt} \right) = \frac{1}{R} (E + E_i)$$

gdzie $E_i = -dF_B / dt$ jest indukowaną siłą elektromotoryczną.

Obwód zamknięty prądu indukowanego tworzy się samorzutnie w przewodniku. Nazywamy je prądami wirowymi (prądy Foucaulta).

Indukcyjność. Samoindukcja

Zgodnie z prawem B-S-L,

$$F_B = LI \quad (7.5)$$

gdzie L nazywamy indukcyjnością obwodu.

Powstanie SEM w przewodzącym obwodzie, na skutek zmiany natężenia prądu w tym obwodzie, nazywamy samoindukcją.

Jednostka indukcyjności – henr (H): jest to indukcyjność takiego obwodu, kiedy przy prądzie 1A strumień magnetyczny samoindukcji wynosi 1Wb, bowiem $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb}/1\text{A} = 1 \text{ Vs}/\text{A}$.

Indukcyjność solenoidu.

Zgodnie z (6.14) mamy

$$B = m_o m_r n I$$

gdzie $n = N/l$

Całkowity strumień płynący przez solenoid jest równy BSN , czyli

$$F_B = m_o m_r \frac{N^2 I}{l} S$$

Uwzględniając (7.5)

$$L = m_o m_r \frac{N^2 S}{l} \quad (7.6)$$

czyli indukcyjność solenoidu zależy od liczby zwojów solenoidu N , jego długości l , pola przekroju S i przenikalności magnetycznej rdzenia solenoidu m_r .

Indukcyjność obwodu zależy tylko od jego kształtu, rozmiarów i przenikalności magnetycznej ośrodka, w którym się znajduje. W tym sensie indukcyjność obwodu jest odpowiednikiem pojemności elektrycznej przewodnika.

Z prawa Faradaya otrzymujemy, że SEM samoindukcji

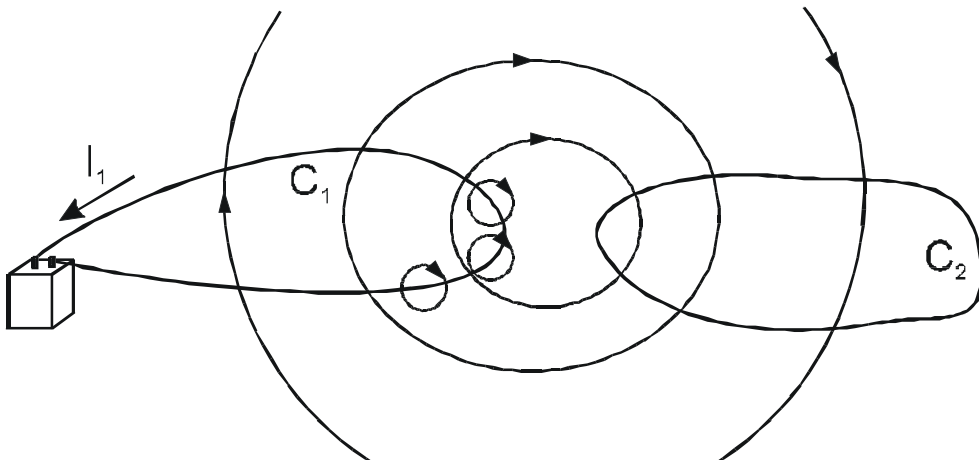
$$E_s = -\frac{dF_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

Jeżeli $L = const$ i

$$E_s = -L\frac{dI}{dt} \quad (7.7)$$

Znak "–" uwarunkowany regułą Lenza wskazuje, że obecność indukcyjności w obwodzie prowadzi do zwalniania zmian prądu, co przejawia się w bezwładności elektrycznej obwodu. W ten sposób indukcyjność obwodu stanowi miarę jego bezwładności wobec zmian prądu.

Indukcyjność wzajemna



Rys. 7.6. Prąd o natężeniu I_1 płynący w pętli C_1 wywołuje strumień F_{21} w pętli C_2 .

Strumień indukcji B_1 przez obwód C_2 wynosi

$$F_{21} = \int_{S_2} \dot{\vec{B}} \cdot d\dot{\vec{S}} = M_{21} I_1$$

Stałą M_{21} nazywamy indukcyjnością wzajemną.

$$E_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (7.8)$$

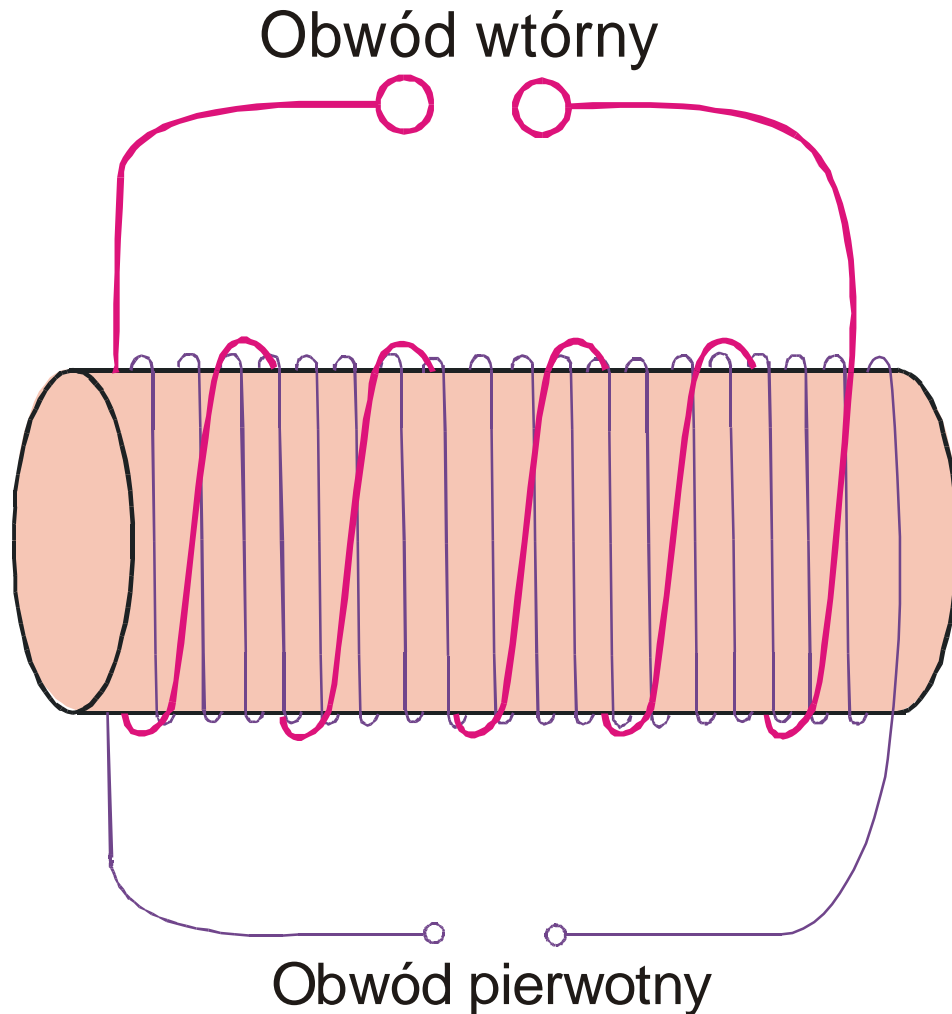
Siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie C_1 na skutek zmian natężenia prądu w obwodzie C_2

$$E_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (7.9)$$

Okazuje się, że dla dowolnych dwóch obwodów

$$M_{12} = M_{21}$$

Transformator



Rys. 7.7. Transformator

Niech n_1 oznacza ilość zwojów uzwojenia pierwotnego, a n_2 – ilość zwojów uzwojenia wtórnego. Wówczas zgodnie z (7.1)

$$V_2 = -n_2 \frac{dF_B}{dt}$$

Analogicznie SEM w obwodzie pierwotnym

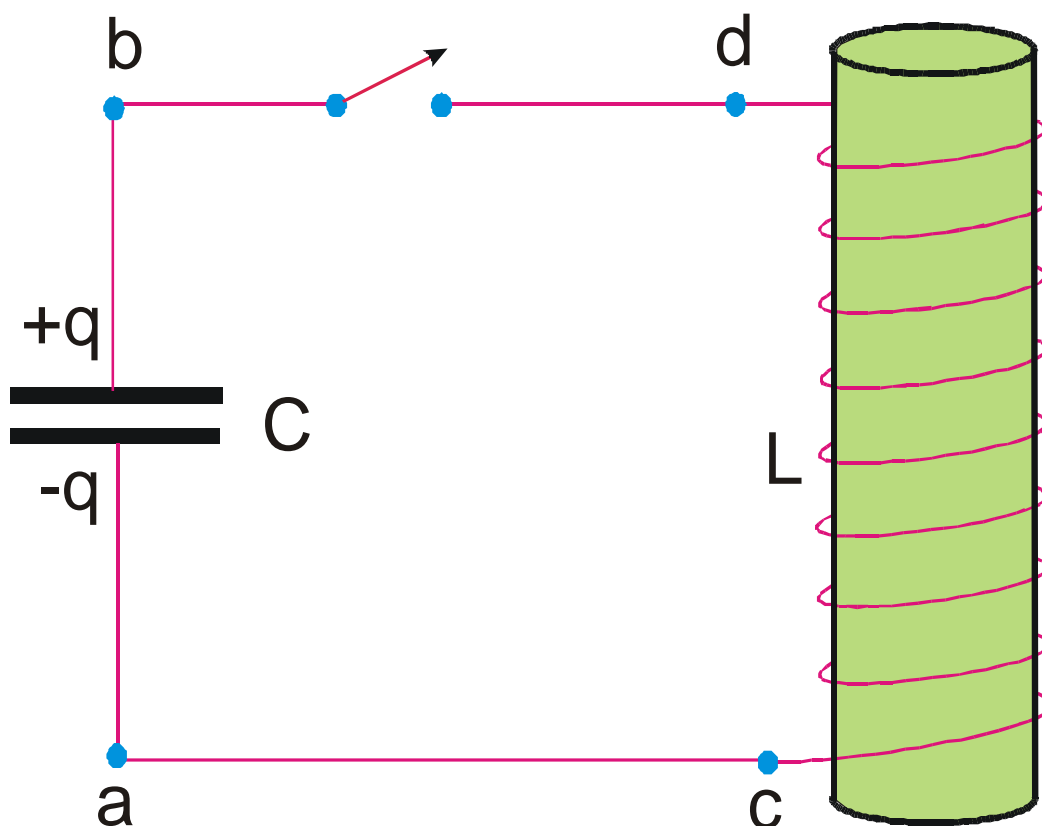
$$V_1 = -n_1 \frac{dF_B}{dt}$$

Stosunek napięć jest równy

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Kiedy do obwodu pierwotnego przykładamy napięcie zmienne V_{zm} , prąd wzrasta do chwili dopóki $n_1 dF_B / dt$ nie osiągnie wartości V_{zm} . Tak więc $V_{zm} = V_1$.

Energia pola magnetycznego



Rys. 7.8. Drgający obwód LC.

Rozważmy prosty obwód elektryczny (drgający LC), w którym pojemność i indukcyjność są połączone równolegle (rys. 7.8). Rezystancja obwodu jest zerowa.

W chwili $t = 0$ ładunek kondensatora wynosi q_0 (energia układu zmagazynowana jest w kondensatorze). Zgodnie z równaniem (4.35)

$$W = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

gdzie

$$V_0 = \frac{q_0}{C}.$$

Ładunek dq płynący przez cewkę przyjmuje energię Vdq , gdzie $V = -L dl/dt$. Wobec tego energia tracona przez ładunek i przyjmowana przez cewkę wynosi

$$dW = \left(L \frac{dl}{dt} \right) dq = L dl \frac{dq}{dt} = L |dl|$$

Jeżeli prąd rośnie od zera do I_0 , to energia gromadzona w cewce indukcyjnej wynosi

$$W = \int_0^{I_0} LI \, dI = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (7.12)$$

W przypadku długiego solenoidu

$$B = \mu_0 \mu_r NI / l \quad \text{i} \quad L = \mu_0 \mu_r N^2 S / l$$

Uzależniając I od B i wstawiając wzór na L , z wyrażenia (7.12) otrzymujemy

$$W = \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} B^2 S l$$

Gęstość energii pola magnetycznego

$$w = \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} B^2 \quad (7.13)$$

Można udowodnić, że dla cewki indukcyjnej dowolnego kształtu całka po $B^2/2\mu_0\mu_r$ w całej przestrzeni jest równa $L I^2/2$, gdzie L jest indukcyjnością cewki. $B^2/2\mu_0\mu_r$ jest energią zmagazynowaną w jednostce objętości pola magnetycznego.

W przypadku ogólnym, pola elektryczne i magnetyczne mogą jednocześnie występować w przestrzeni, a **całkowita gęstość energii pola elektromagnetycznego wynosi**

$$w = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \right) \quad (7.14)$$

Równania Maxwella

Prawo Faradaya

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dF_B}{dt}$$

Prawo Ampera (wzór (6.3))

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = m_o \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Wykażemy teraz, że w przypadku zmieniającego się pola elektrycznego ostatnie równanie należy zmodyfikować.

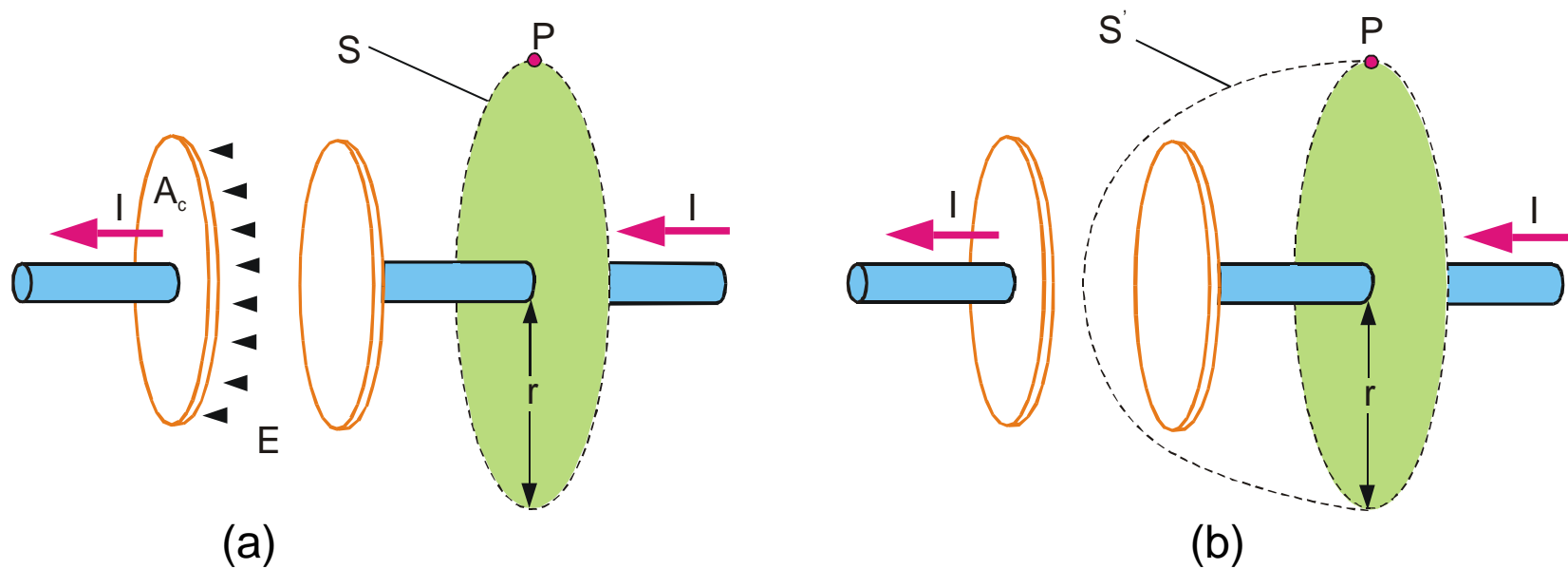
Prąd przesunięcia

Z Rys. 7.9a zgodnie z prawem Ampera

$$\oint_{\text{po okręgu}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = m_o \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = m_o I$$

czyli $B 2\pi r = m_o I$, a stąd

$$B = \frac{m_o I}{2\pi r} \quad (7.15)$$



Rys. 7.9.

Prawo Ampera powinno być spełnione również dla powierzchni S' na rys. 7.9b. Jednakże w tym przypadku mamy

$$\int_{S'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

To przeczy poprzedniemu wynikowi (7.15). W 1860 roku Maxwell doszedł do wniosku, że wyrażenie na prawo Ampera przytoczone poprzednio jest niesłuszne w przypadku zmiennego pola elektrycznego. Niepoprawność zapisu można usunąć dodając do prawej strony równania (6.3) dodatkowe wyrażenie

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = m_o \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c^2} \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.16)$$

Udowodnimy, że równanie to prowadzi do jednoznacznej wartości B w punkcie P niezależnie od postaci powierzchni całkowania S lub S' .

Dla części powierzchni S' pomiędzy płytkami kondensatora pole elektryczne

$$E = \frac{Q}{e_0 A_c}$$

Różniczkując to wyrażenie względem t mamy

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{e_0 A_c} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{e_0 A_c} I$$

Całkowanie po powierzchni S' daje

$$\int_{S'} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{I}{e_0}$$

co dalej prowadzi do związku

$$B_{2p} r = \frac{1}{c^2} \frac{I}{e_0}$$

Ponieważ $1/c^2 = m_0 e_0$, więc

$$B = \frac{m_0 I}{2p r}$$

Otrzymaliśmy więc wynik identyczny jak przy całkowaniu po powierzchni S .

Pierwszy człon po prawej stronie wzoru (7.16) przedstawia realny prąd płynący przez powierzchnię rozpiętą na zamkniętym konturze. Drugi człon można interpretować jako prąd związany ze zmianą natężenia pola elektrycznego. **Maxwell nazwał go prądem przesunięcia.** Prąd ten jest przedłużeniem prądu przewodzenia wpływającego do kondensatora i jest mu równy. **Prąd przesunięcia zapewnia więc ciągłość obwodów zawierających kondensatory.**

Odcinki bezprzewodowe obwodów elektrycznych mogą być wypełnione dielektrykiem. Wtedy równanie (7.16) przyjmuje postać.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (7.17)$$

a więc gęstość prądu przesunięcia ma ogólną postać

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.18)$$

Ponieważ $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e$, więc

$$\mathbf{j}_p = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (7.19)$$

Składnik $\partial \mathbf{P}_e / \partial t$ wyraża część gęstości prądu w dielektryku (przesunięcie ładunków lub obrót dipoli) i nosi nazwę gęstości prądu polaryzacyjnego. **Zatem \mathbf{j}_p stanowi sumę gęstości prądu przesunięcia w próżni $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ i prądu polaryzacyjnego.**

Równania Maxwella w postaci całkowej

1. Uogólnione prawo Faradaya (7.3)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne, które może wywoływać prąd elektryczny

2. Uogólnione prawo Ampera (7.17)

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

prąd elektryczny lub zmienne pole elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne

3. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego (4.45)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$$

ładunek elektryczny wytwarza pole elektryczne

4. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego (6.5)

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

nie istnieje w przyrodzie ładunek magnetyczny, pole magnetyczne jest bezźródłowe

Związki (4.43) i (6.28) między wektorami elektrycznymi i magnetycznymi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

- Równania Maxwella stanowią fundamentalną podstawę teorii zjawisk elektromagnetycznych, podobnie jak zasady dynamiki Newtona są podstawą mechaniki.
- Można znaleźć pola $\dot{\mathbf{E}}$ i $\dot{\mathbf{B}}$ w dowolnym punkcie przestrzeni i w dowolnej chwili czasu, jeżeli znane są współrzędne i prędkości ładunków wytwarzających pola.
- Równania Maxwella są niesymetryczne względem pól elektrycznego i magnetycznego (istnieją ładunki elektryczne a brak jest ładunków magnetycznych).

Dla pól stacjonarnych równania Maxwella przyjmują postać

$$\oint_C \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_S \dot{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{S} = \int r dV$$

$$\int_C \dot{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \dot{\mathbf{j}} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

W tym przypadku pola elektryczne i magnetyczne są niezależne.

Teoria Maxwella jest teorią makroskopową. Nie jest w stanie wyjaśnić tych zjawisk, w których przejawia się wewnętrzna budowa ciała.

Równania Maxwella w postaci różniczkowej

Istnieją dwa twierdzenia analizy wektorowej: twierdzenie Stokesa (wzór (1.49)) i twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego (wzór (1.50))

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{V}$$

Stosując te twierdzenia można uzyskać układ równań Maxwella w postaci różniczkowej:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.20)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.21)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = r \quad (7.22)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (7.23)$$

Jeżeli ładunek i prądy w danym ośrodku rozmieszczone są w sposób ciągły, to obydwie formy równań Maxwella (całkowa i różniczkowa) są ekwiwalentne.

Jeżeli jednak istnieją powierzchnie, na których zachodzi skokowa zmiana tych wielkości, to całkowa forma równań jest bardziej ogólna.