

ELEMENTY FIZYKI STATYSTYCZNEJ

Przedmiot badań fizyki statystycznej – układy składające się z olbrzymiej ilości cząstek (ujawniają się specyficzne prawa statystyczne).

15.1. Termodynamiczny opis układu

Opis termodynamiczny układu – układ rozpatrujemy jako obiekt makroskopowy nie interesując się naturą cząstek z których on się składa.

Stan w którym układ może znajdować się dowolnie długo nosi nazwę stanu równowagi termodynamicznej. Stan taki jest określony przez zadany zbiór niezależnych parametrów fizycznych, tzw. parametrów stanu.

Podstawowymi parametrami stanu są: objętość układu V , ciśnienie p i temperatura T . Często jednak parametry te nie wystarczają do opisu stanu układu, np. dla układu składającego się z kilku substancji należy także podać ich koncentrację.

Każdą zmianę w układzie termodynamicznym, związaną ze zmianą choćby jednego z parametrów stanu, nazywamy procesem termodynamicznym.

U podstaw termodynamiki leżą dwie zasady termodynamiki.

Pierwsza zasada termodynamiki

Zbiór wszystkich postaci energii zawartej w układzie izolowanym nosi nazwę energii wewnętrznej układu U . Energia wewnętrzna jest funkcją stanu układu – każdemu stanowi układu odpowiada jedna i tylko jedna jednoznacznie określona wartość energii wewnętrznej.

Układ termodynamiczny może otrzymać lub oddać pewną ilość ciepła ΔQ , może wykonać pracę lub może być nad nim wykonana praca ΔW .

Pierwsza zasada termodynamiki:

Zmiana energii wewnętrznej układu jest równa sumie ilości ciepła i pracy wymienionej przez układ z otoczeniem.

$$\Delta Q = dU + \Delta W \quad (15.1)$$

gdzie:

ΔQ – ilość ciepła pobranego przez układ,

dU – zmiana energii wewnętrznej,

ΔW – praca wykonana przez układ przeciwko siłom zewnętrznym.

W odróżnieniu od energii wewnętrznej, praca ΔW i ciepło ΔQ zależą nie tylko od stanu początkowego i końcowego układu, lecz także od drogi po której nastąpiła zmiana stanu układu.

Druga zasada termodynamiki

Jeżeli w układzie termodynamicznym proces przebiega nieskończenie powoli ze stanu 1 do stanu 2 i z powrotem do stanu 1 przez te same pośrednie stany (bez jakichkolwiek zmian w otaczającym ośrodku), to tego rodzaju proces nazywamy odwracalnym.

Proces odwracalny jest procesem wyidealizowanym. Wszystkie rzeczywiste procesy są **nieodwracalne**. Nieodwracalne są procesy chłodzenia, mieszania, rozprężania gazów, itp. Procesy nieodwracalne mogą przebiegać tylko w jednym kierunku. Kryterium przebiegu procesów określa druga zasada termodynamiki.

Założmy, że przy nieskończenie małej zmianie stanu układu w temperaturze T układ uzyskuje ciepło ΔQ . Stosunek $\Delta Q/T$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji S , która podobnie jak energia wewnętrzna, zależy tylko od stanu układu

$$dS = \frac{\Delta Q}{T} \quad (15.2)$$

Funkcja ta nosi nazwę **entropii układu**.

Rozpatrzmy zmianę entropii w procesach nieodwracalnych. W przypadku wymiany ciepła między dwoma ciałami, ogólna zmiana entropii wynosi

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = Q \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

gdzie Q_1 – ilość ciepła pobranego przez pierwsze ciało, Q_2 – ilość ciepła oddanego przez drugie ciało. Ponieważ $Q_1 = Q_2 = Q$ oraz $T_1 < T_2$, więc

$$\Delta S > 0$$

Z nierówności tej wynika, że **w procesie nieodwracalnym zwiększa się entropia układu.**

W procesie odwracalnym $T_2 = T_1$ i $\Delta S = 0$. Zatem wzrost entropii przy nieodwracalnej wymianie ciepła jest większy niż przy odwracalnej.

Przypuśćmy, że ΔQ jest ilością ciepła jaką układ pobrał w temperaturze T . Gdyby ciepło to było pobrane w procesie odwracalnym, to przyrost entropii wynosiłby

$$\Delta S_{od} = \frac{\Delta Q}{T} \tag{15.3}$$

Natomiast w procesie nieodwracalnym przyrost entropii będzie większy od tej wielkości

$$\Delta S_{nieod} > \frac{\Delta Q}{T} \tag{15.4}$$

W przypadku układu izolowanego $\Delta Q = 0$, zatem

$$\Delta S_{nieod} > 0 \quad (15.5)$$

Związek (15.5) stanowi kryterium określające ukierunkowanie procesu nieodwracalnego w układzie izolowanym: ***proces nieodwracalny przebiega w kierunku wzrostu entropii.***

Łącząc związki (15.3) i (15.4) otrzymamy

$$dS \geq \frac{\Delta Q}{T} \quad (15.6)$$

Wzór (15.6) wyraża **drugą zasadę termodynamiki**: ***w procesach odwracalnych zachodzących w układzie izolowanym entropia pozostaje stała, a w nieodwracalnych wzrasta.***

Podstawiając ΔQ wyznaczone z (15.6) do (15.1) otrzymujemy podstawowy związek termodynamiczny, który łączy pierwszą i drugą zasadę termodynamiki

$$dU \leq TdS - \Delta W \quad (15.7)$$

Potencjał chemiczny

Ze związku (15.7) wynika, że energia wewnętrzna układu może zmieniać się kosztem wymiany ciepła i pracy. Jednakże energia układu może zmieniać się także w wyniku zmiany liczby cząstek N w układzie, bowiem każda ubywająca cząstka unosi z sobą określoną ilość energii. Dlatego dla procesów odwracalnych związek (15.7) w ogólnej postaci zapisujemy następująco:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (15.14)$$

Przyjeliśmy tutaj, że układ wykonuje pracę przeciwko ciśnieniu zewnętrznemu $\Delta W = p\Delta V$. Parametr μ nosi nazwę **potencjału chemicznego**, analogicznie do potencjału elektrostatycznego, który pomnożony przez zmianę ładunku dq (tzn. przez zmianę liczby naładowanych cząstek) wyraża zmianę energii elektrostatycznej ciała.

Z równania (15.14) znajdujemy

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} \quad (15.15)$$

Potencjał chemiczny wyraża zmianę energii wewnętrznej układu przy zmianie liczby jego cząstek o jednostkę w warunkach stałej entropii i objętości układu.

Rozważmy warunek równowagi układu, w którym całkowita liczba cząstek pozostaje stała, lecz cząstki te mogą przechodzić z jednego ciała do drugiego. Oznaczmy potencjał chemiczny gazu elektronowego w pierwszym metalu przez μ_1 , w drugim zaś przez μ_2 . Ponieważ objętość układu pozostaje stała, więc warunkiem jego równowagi jest

$$\mu_1 dN = \mu_2 dN$$

gdzie $\mu_1 dN$ oznacza przyrost energii swobodnej pierwszego przewodnika wskutek przejścia do niego dN elektronów z przewodnika drugiego, $\mu_2 dN$ – ubytek energii w drugim przewodniku. Skracając przez dN , znajdujemy

$$\mu_1 = \mu_2 \tag{15.18}$$

Warunkiem równowagi takiego układu jest równość potencjałów chemicznych obu przewodników.



15.2. Statystyczny opis układu

Drugą metodą opisu właściwości układu składającego się z wielkiej liczby cząstek jest metoda statystyczna.

Stan cząstki opisuje się przez zadanie trzech jej współrzędnych oraz jej składowych pędu. W dużych zespołach cząstek nie jest istotna każda cząstka oddzielnie. Układ jako całość podlega innym prawom niż prawa rządzące pojedynczą cząstką. Tymi prawami są prawa statystyczne.

Podstawową osobliwością statystycznych prawidłości jest ich probabilistyczny charakter.

Fizyka statystyczna zajmuje się szukaniem najbardziej prawdopodobnego rozkładu cząstek w zależności od ich energii. Rozkład ten nazywamy statystyczną funkcją rozkładu. Jest to funkcja parametryczna. Za parametry termodynamiczne wygodnie jest przyjąć temperaturę i potencjał chemiczny.

Jeżeli znana jest funkcja rozkładu, to możemy znaleźć wartości średnie poszczególnych wielkości fizycznych charakteryzujących cząstki; a więc ich średnią energię kinetyczną, średnią wartość pędu, średnią wartość prędkości, itp. Znajomość różnych średnich wartości parametrów cząstki umożliwia obliczenie niektórych makroskopowych parametrów układu; jak np. ciśnienia, przewodnictwa cieplnego, temperatury, współczynnika dyfuzji, itp.

W zależności od indywidualnych właściwości cząstek tworzących układ, podlegają one odpowiednim rozkładom. **Cząstki dzielimy na dwie grupy: fermiony i bozony.**

Fermiony charakteryzują się wyraźną dążnością do "samotności". Jeżeli dany stan już jest zajęty przez fermion, to żaden inny fermion danego rodzaju nie może zająć tego stanu. Jest to konsekwencją zasady Pauliego.

Bozony przeciwnie, charakteryzują się dążnością do "łączenia się". Mogą one nieograniczenie zapełniać ten stan; przy czym czynią to tym "chętniej", im więcej bozonów znajduje się w tym stanie.

Fermiony mają spin połówkowy ($\hbar/2, 3\hbar/2, \dots$), **bozony** zaś – **spin całkowity** ($0, \hbar, 2\hbar, \dots$).

Fermionami są: elektrony, protony, neutrony, neutrino i inne; a **bozonami** są: fotony, piony itp.

Fermionami są również jądra atomów pierwiastków chemicznych składające się z nieparzystej liczby nukleonów; bozonami zaś – jądra składające się z parzystej liczby nukleonów.

15.3. Układy niezwyrodniałe i zwyrodniałe

Specyficzne właściwości bozonów i fermionów mają zdecydowany wpływ na zachowanie się układu jako całości. Dla ujawnienia się tych specyficznych właściwości konieczne jest aby cząstki "spotykały się" ze sobą dostatecznie często.

Założmy, że na N jednakowych cząstek przypada G różnych stanów, w których może znajdować się pojedyncza cząstka. Za miarę częstości "spotkań" można przyjąć stosunek N/G . Cząstki będą spotykać się rzadko, jeśli spełniony jest warunek

$$\frac{N}{G} \ll 1 \quad (15.19)$$

W takich warunkach liczba nieobsadzonych stanów jest dużo większa od liczby cząstek, a wówczas specyficzne właściwości fermionów i bozonów nie mogą się ujawnić.

Układy tego rodzaju noszą nazwę niezwyrodniałych, a warunek (15.19) nazywa się warunkiem niezwyrodnienia.


Jeżeli liczba stanów G jest tego samego rzędu co liczba cząstek N , tzn. gdy spełniony jest warunek

$$\frac{N}{G} \geq 1 \quad (15.20)$$

wtedy zagadnienie jak są obsadzone stany staje się bardzo istotne. W tym przypadku specyficzne właściwości fermionów i bozonów przejawiają się w pełni, a to wywiera znaczny wpływ na właściwości układu jako całości. **Układy takie noszą nazwę zwyrodniałych.**

Układy zwyrodniałe mogą tworzyć tylko obiekty kwantowo-mechaniczne. Dla spełnienia warunku (15.20) konieczne jest, aby liczba możliwych stanów cząstek (liczba G) była w każdym przypadku skończona. Może to zachodzić tylko w takim przypadku, gdy parametry stanu cząstki zmieniają się w sposób dyskretny.

Obiekty klasyczne, dla których parametry stanów zmieniają się w sposób ciągły, **mogą tworzyć tylko układy niezwyrodniałe.** Układy niezwyrodniałe mogą tworzyć także obiekty kwantowo-mechaniczne, jeżeli tylko spełniony jest warunek (15.19).



15.4. Statystyki: klasyczna i kwantowa

Fizyka statystyczna, która bada właściwości układów niezwyrodniałych, nazywa się statystyką klasyczną lub statystyką Maxwella-Boltzmannna.

Fizyka statystyczna, która bada właściwości układów zwyrodniałych, nazywa się statystyką kwantową.

Statystykę kwantową bozonów nazywamy statystyką Bosego-Einsteina.

W statystykach kwantowych występują tylko obiekty kwantowe, podczas gdy w statystyce klasycznej mogą występować zarówno obiekty klasyczne jak i kwantowe.

Funkcja rozkładu elektronów (fermionów) określa prawdopodobieństwo obsadzenia stanów energetycznych. W przypadku statystyki klasycznej funkcją tą jest

$$f(E) = Ne^{-E/kT} \quad (15.23)$$

Jest to funkcja rozkładu Maxwella-Boltzmannna.

Nieprzydatność statystyki Maxwella-Boltzmannna do gazu elektronowego w metalach czy półprzewodnikach wynika z tego, że dla elektronów nie jest obojętne czy stan końcowy jest zajęty, czy też nie. W fizyce klasycznej nie obowiązuje zakaz Pauliego.

Okazuje się, że funkcja rozkładu dla układów kwantowych ma postać

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[\frac{(E - E_F)}{kT}\right] + 1} \quad 0 \leq f(E) \leq 1 \quad (15.28)$$

Jest to funkcja rozkładu Fermiego-Diraca. Jej wartość jest zawarta w przedziale między 0 a 1. Jest to zgodne z intuicją fizyczną, gdyż wartości 0 i 1 oznaczają stany puste i całkowicie obsadzone.

Rozkład Bosego-Einsteina ma postać

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[\frac{(E - E_F)}{kT}\right] - 1} \quad (15.30)$$

Rozkład ten nie ma ograniczenia od góry, tzn, że $f(E)$ może przybierać wartości dowolne.

Dla fotonów potencjał chemiczny jest równy zeru.



15.5. Gaz elektronów swobodnych

Wiele zjawisk fizycznych, zwłaszcza w ciałach stałych, jest uwarunkowanych elektronami swobodnymi. Przykładem może być przewodnictwo elektryczne i ciepłota metali. **Gaz elektronowy traktujemy jako gaz doskonały** stanowiący zbiór cząstek, których energia oddziaływania wzajemnego jest mała w porównaniu z ich energią kinetyczną.

15.5.1. Przestrzeń fazowa. Funkcja gęstości stanów

Dla cząstki wprowadzamy sześciowymiarową przestrzeń zwaną przestrzenią fazową Γ . Stan ruchu cząstki jest w każdej chwili dokładnie odtworzony przez punkt w przestrzeni fazowej. Jeśli mamy do czynienia z układem złożonym z n cząstek to musimy posługiwać się $6n$ -wymiarową przestrzenią fazową.

Dla pojedynczej cząstki element objętości $d\Gamma$ w przestrzeni Γ wynosi

$$d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z = d\Gamma_V d\Gamma_p \quad (15.31)$$

gdzie:

$d\Gamma_V = dx dy dz$ – element objętości w przestrzeni współrzędnych,

$d\Gamma_p = dp_x dp_y dp_z$ – element objętości w przestrzeni pędów.

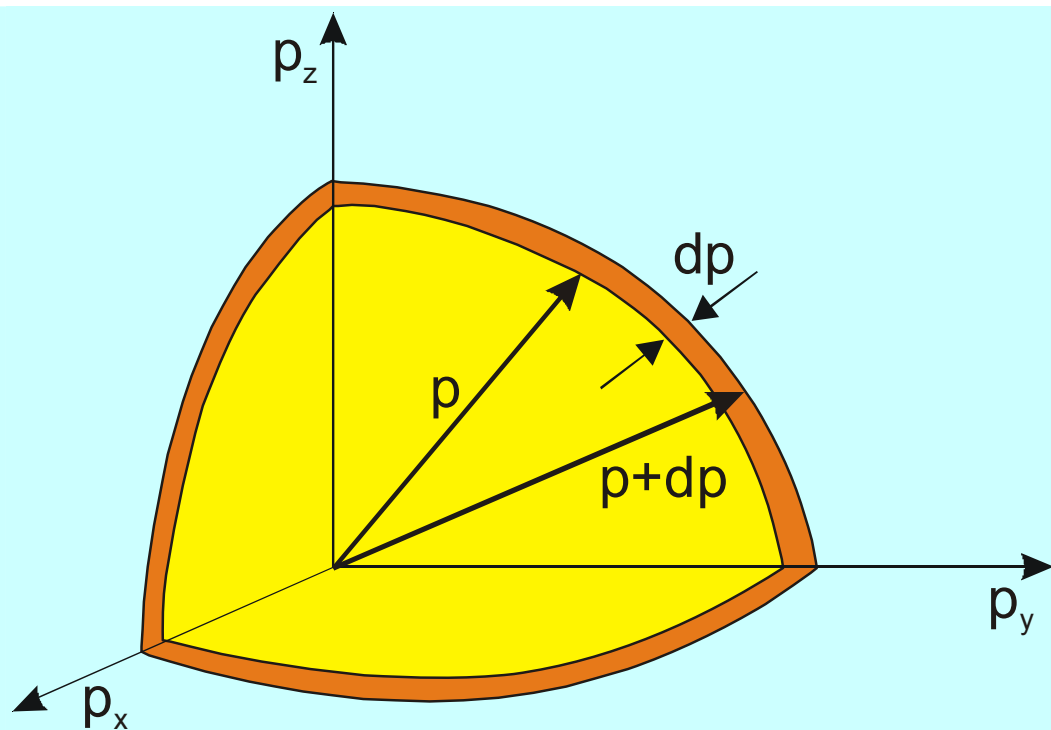
Pojedyncza cząstka ma współrzędne w przedziale od x do $x + dx$, od y do $y + dy$, od z do $z + dz$ oraz składowe pędu od p_x do $p_x + dp_x$, od p_y do $p_y + dp_y$, od p_z do $p_z + dp_z$.

Zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga, elektronowi możemy przypisać element objętości

$$d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z = h^3 \quad (15.32)$$

Element objętości $d\Gamma = h^3$ jest komórką fazową w przestrzeni Γ . W elemencie objętości h^3 mogą być dwa elektrony. Objętość komórki elementarnej dla elektronu wynosi zatem $h^3/2$.

Fakt, że elektronowi przypisuje się komórkę o objętości $h^3/2$ sprawia, że w określonym przedziale pędów (czy energii) znajduje się ściśle określona liczba komórek elementarnych.



Rys. 15.2. Element objętości w przestrzeni pędów.

Aby wyznaczyć tę liczbę, rozważymy w przestrzeni pędów dwie powierzchnie kuliste o promieniach p i $p + dp$ (rys. 15.2). Element objętości tej warstwy kulistej wynosi

$$d\Gamma_p = 4\pi p^2 dp$$

Ponieważ w przestrzeni pędów objętość komórki elementarnej wynosi

$$d\Gamma_p = \frac{h^3/2}{dx dy dz} = \frac{h^3/2}{d\Gamma_v}$$

więc w elemencie o objętości $4\pi p^2 dp$ liczba komórek elementarnych wynosi

$$\frac{4\pi p^2 dp}{d\Gamma_p} = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} d\Gamma_v$$

Dalsze rozważania przeprowadzimy dla jednostkowego elementu objętości w przestrzeni współrzędnych. Liczba komórek elementarnych znajdująca się w jednostce objętości w przedziale pędów od p do $p + dp$ wynosi

$$g(p)dp = \frac{8\pi p^2}{h^3} dp \quad (15.33)$$

Funkcję $g(p)$ nazywamy funkcją gęstości stanów w przestrzeni pędów. Jest to liczba komórek elementarnych (liczba stanów) w jednostce objętości w jednostkowym przedziale pędów.

W wielu zagadnieniach wygodniej jest posługiwać się gęstością stanów w przestrzeni energii. Jeżeli przyjmiemy, że $v/c \ll 1$, to dla elektronów swobodnych

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Zatem

$$p^2 = 2mE \quad dp = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{E}} dE$$

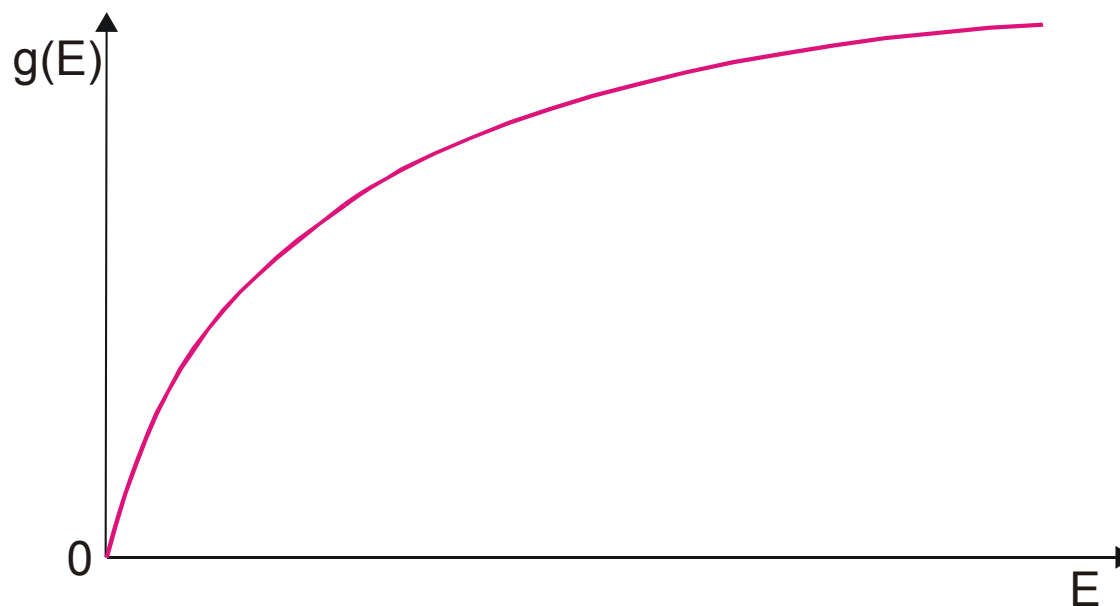
Podstawiając to do wzoru (15.33) otrzymamy wyrażenie na liczbę komórek elementarnych znajdujących się w jednostce objętości w przedziale energii od E do $E + dE$

$$g(E)dE = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE$$

Funkcję

$$g(E) = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (15.34)$$

nazywamy funkcją gęstości stanów w przestrzeni energii. Jest to liczba stanów (liczba komórek elementarnych) w jednostce objętości w jednostkowym przedziale energii.



Rys. 15.3. Zależność funkcji gęstości stanów od energii.

15.5.2. Gaz elektronowy

W 0 K elektrony zajmują komórki o możliwie najmniejszej energii aż do pewnej energii maksymalnej, która będzie funkcją koncentracji elektronów. **Maksymalną energię elektronów w 0 K nazywamy energią Fermiego**. Ponieważ w temperaturze 0 K są obsadzone wszystkie stany energetyczne poniżej energii Fermiego, dlatego liczba elektronów dn w jednostce objętości w przedziale energii od E do $E + dE$ jest równa liczbie komórek. Możemy więc zapisać

$$dn = g(E)dE = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE$$

Całkując otrzymujemy

$$n = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3} E_F^{3/2} \quad (15.35)$$

gdzie E_F jest energią Fermiego, a n – koncentracją elektronów.

W przestrzeni pędów elektrony będą znajdowały się wewnątrz kuli o promieniu $p_F = (2mE_F)^{1/2}$. **Powierzchnię tej kuli nazywa się powierzchnią Fermiego.**

Aby oszacować jakie są wartości energii Fermiego, rozpatrzmy gaz elektronowy w miedzi. Koncentracja elektronów w miedzi jest równa koncentracji atomów

$$n = \rho \frac{N_A}{m_A}$$

gdzie ρ jest gęstością, N_A – liczbą Avogadra, a m_A masą atomową. Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $n = 8.46 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Z wyrażenia (15.35) obliczymy

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (15.36)$$

otrzymując $E_F = 7.07 \text{ eV}$. Mając E_F możemy policzyć prędkość elektronów na poziomie Fermiego

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} \quad (15.37)$$

Dla rozpatrywanego przypadku $v_F = 1.57 \times 10^6 \text{ m/s}$.

Nawet w temperaturze 0 K, elektrony mają bardzo duże energie i poruszają się z olbrzymimi prędkościami [mają energie setki razy większe od energii ruchów termicznych w temperaturze pokojowej (0.039 eV)].

Energia termiczna $3kT/2$ jest nawet w temperaturach stosunkowo wysokich znacznie mniejsza od E_F . Oznacza to, że prawdopodobieństwo obsadzenia stanów o $E < E_F$ jest mniejsze od jedności, natomiast prawdopodobieństwo obsadzenia stanów o $E > E_F$ jest większe od zera.

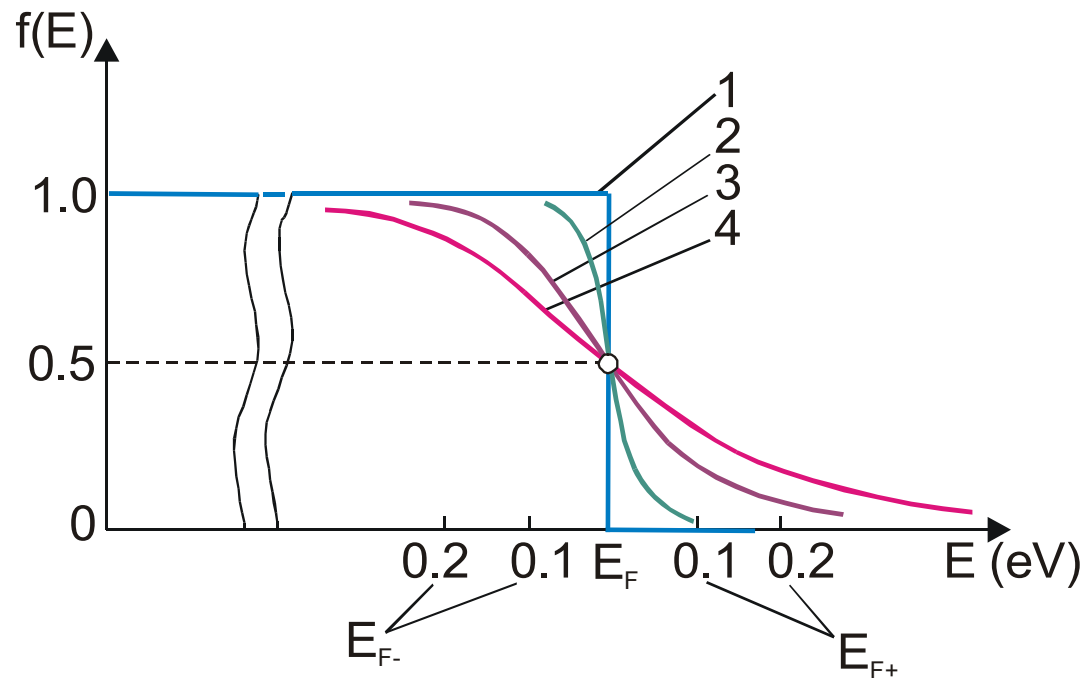
Dla $T > 0$ K mamy

$$\frac{1}{2} < f(E) < 1 \quad \text{dla } E < E_F$$

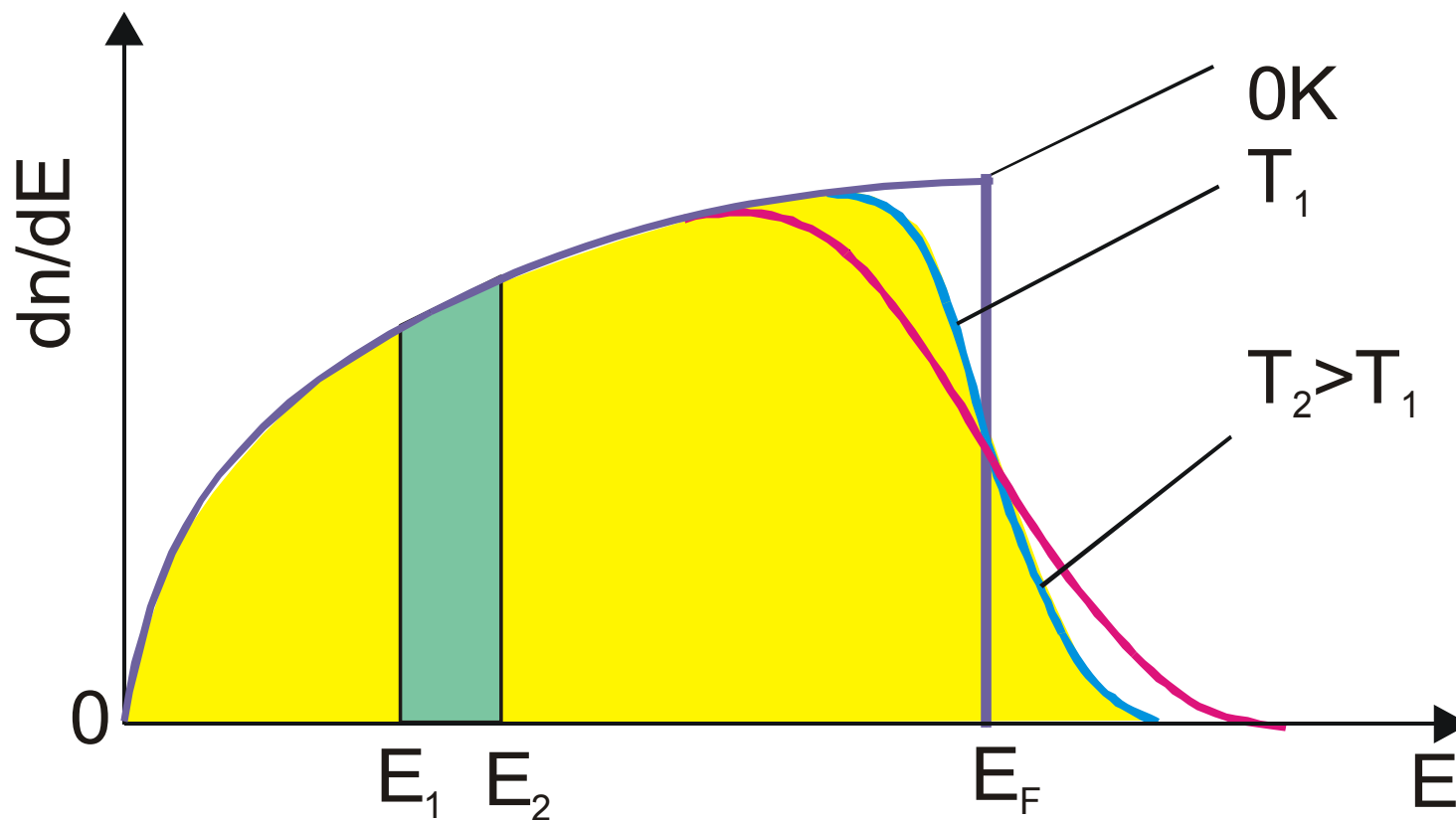
$$f(E) = \frac{1}{2} \quad \text{dla } E = E_F$$

$$0 < f(E) < \frac{1}{2} \quad \text{dla } E > E_F$$

W temperaturze $T > 0$ K, **poziom Fermiego określamy jako poziom energetyczny, którego prawdopodobieństwo obsadzenia wynosi 1/2**. Przedział energii w którym funkcja rozkładu zmienia się od jedności do zera wynosi kilka kT . Na rys.15.4 przedstawiono przebieg funkcji $f(E)$ dla kilku temperatur.



Rys. 15.4. Funkcja rozkładu Fermiego-Diraca dla temperatur: 1 – 0K, 2 – 300 K, 3 – 1000 K i 4 – 500 K



Rys. 15.5. Zależność koncentracji elektronów na jednostkowy przedział energii od energii w różnych temperaturach. Zaznaczone pola są miarą całkowitej liczby elektronów i liczby elektronów o energii w przedziale od E_1 do E_2 .

Koncentracja elektronów o energiach w przedziale od E do $E + dE$ wyrazi się wzorem

$$dn = g(E) f(E) dE$$

Ponieważ energia zmienia się od 0 do ∞ , więc

$$n = \int_0^{\infty} g(E) f(E) dE \quad (15.38)$$

Przy spełnieniu warunku

$$\exp\left[\frac{(E - E_F)}{kT}\right] \gg 1 \quad (15.39)$$

rozkład Fermiego-Diraca

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[\frac{(E - E_F)}{kT}\right] + 1} = \exp\left[-\frac{(E - E_F)}{kT}\right] = N e^{-E/kT} \quad (15.40)$$

przechodzi w rozkład Boltzmannna, gdzie $N = \exp(E_F/kT)$.

Aby warunek (15.39) był spełniony dla każdej wartości energii, to w szczególności winien być spełniony dla $E = 0$. Oznacza to, że

$$\exp\left(-\frac{E_F}{kT}\right) \gg 1$$

lub

$$N = \exp\left(\frac{E_F}{kT}\right) \ll 1 \quad (15.41)$$

Stałą N wyznaczamy korzystając z zależności (15.38) i podstawiając w miejsce $f(E)$ wzór (15.40)

$$n = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} N \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

Jeżeli podstawić $E = mv^2/2$, $dE = mv dv$, mamy

$$n = \frac{8\pi m^3}{h^3} N \int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Ponieważ

$$\int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}$$

więc

$$n = \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} N \quad (15.42)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$N = \frac{nh^3}{2(2\pi mkT)^{3/2}} \quad (15.43)$$

Stała N będzie więc duża dla dużych koncentracji n i małych mas cząstek. W tych przypadkach można oczekiwać zwyrodnienia.

Dwa przypadki dla temperatury $T = 300$ K:

- wodór w warunkach normalnych: $n = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $m = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $N = 1.4 \times 10^{-5}$
- gaz elektronowy w miedzi: $n = 8.46 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $N = 3.4 \times 10^3$

Dla wodoru spełniony jest warunek (15.41) i można stosować statystykę Boltzmannna. Podobnie dla innych cząstek gazu doskonałego. Zwyrodnienia można się spodziewać w bardzo niskich temperaturach, znacznie niższych od temperatury skraplania.

Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja dla gazu elektronowego w metalach. Bardzo duże n i małe m powodują, że w zwykłych temperaturach $N \gg 1$. **Gaz elektronowy w metalach jest zawsze gazem zwyrodniałym i podlega rozkładowi Fermiego-Diraca.**

Tylko gdy koncentracje elektronów są niewielkie, gaz elektronowy jest niezwyrodniały. Sytuacja taka występuje w półprzewodnikach.