

# Wstęp matematyczny

## Pochodna funkcji

Ze względu na ograniczoną dokładność przyrządów pomiarowych, posługujemy się skończonymi przyrostami wielkości, np.  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta V$ , itd.

Często zdarza się, że jedna wielkość fizyczna wyraża się przez stosunek przyrostów dwóch innych wielkości, jak np. prędkość i przyspieszenie. Generalnie jednak zapis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

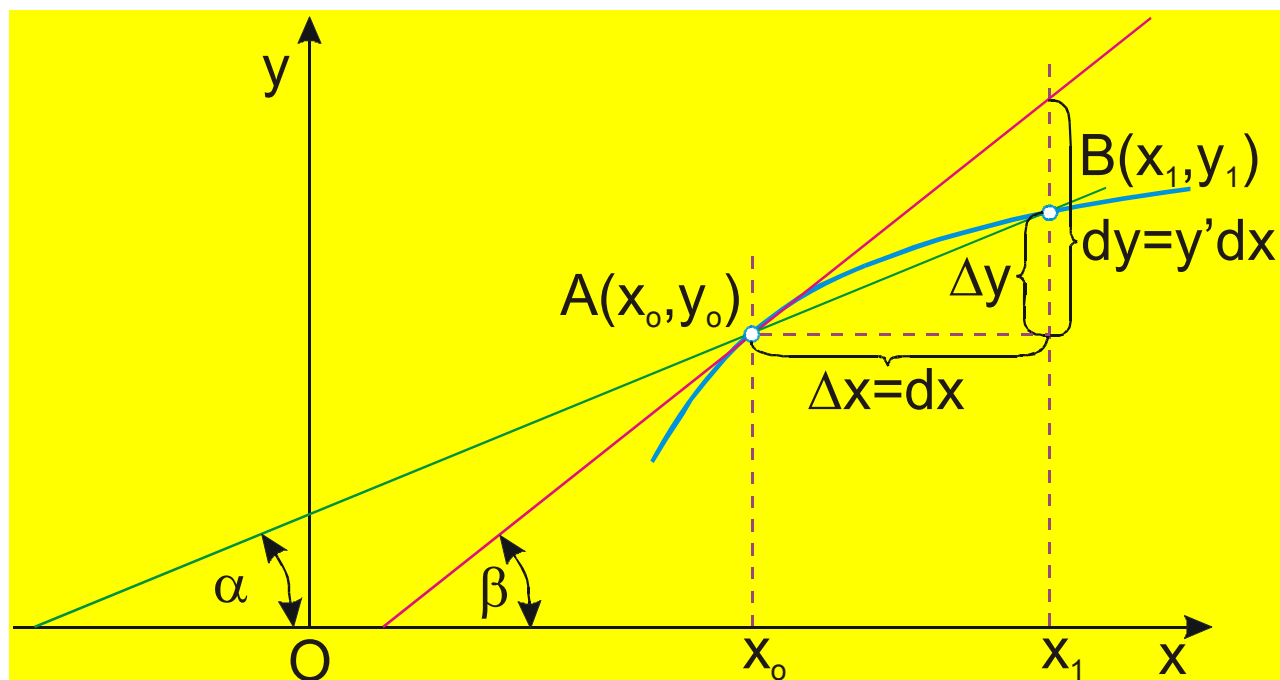
jest nieodpowiedni, gdyż występujące w nim przyrosty są niejednoznacznie określone; wartość tego stosunku zależy na ogół od wartości granicznej przy  $\Delta x$  dążącym do zera, o ile tylko  $\Delta x$  jest dostatecznie małe.

Wartość graniczna to **pochodna funkcji**  $y(x)$  względem  $x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

**Wyrażenie  $dy = y'dx$  nazywa się różniczką funkcji  $y(x)$ , zaś  $dx$  różniczką argumentu  $x$ . Obliczanie pochodnej nazywamy różniczkowaniem.**

## Interpretacja geometryczna pochodnej



### Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji $y(x)$

Gdy punkt  $B$  zbliża się do punktu  $A$  (tzn. gdy  $\Delta x \rightarrow 0$  i w granicznym przypadku pokrywa się z punktem  $A$ ), prosta  $AB$  przechodzi w styczną do krzywej w punkcie  $A$ , a kąt  $\beta$  jest równy kątowi  $\alpha$  jaki tworzy ta styczna z osią  $x$ . Zatem

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

**Pochodna funkcji w danym punkcie jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie do osi  $x$**

Możemy więc powiedzieć, że rysunku pokazano również przyrost argumentu  $\Delta x$  i przyrost funkcji  $\Delta y$ . Nie ma istotnej różnicy między interpretacją geometryczną przyrostu argumentu  $\Delta x$ , a jego różniczką  $dx$ , jest natomiast zasadnicza różnica między przyrostem funkcji  $\Delta y$  a jej różniczką  $dy = y'dx$ .

## Pochodna sumy dwóch funkcji

Jeżeli  $y = u + v$ , przy czym  $u$  i  $v$  są funkcjami tego samego argumentu  $x$ , wówczas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Jeżeli  $y = uv$ , wówczas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}.$$

## Pochodna ilorazu dwóch funkcji

Jeżeli  $y = u/v$ , mamy


$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

## Pochodna funkcji złożonej

Niech  $z$  będzie funkcją zmiennej  $y$ , zaś  $y$  funkcją zmiennej  $x$ ; np.  $z = \cos y$ ,  $y = 3x^2$ , czyli  $z = \cos 3x^2$ . Wówczas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

Jeżeli funkcja  $f$  zależy od kilku zmiennych niezależnych, np.  $f(x,y,z,t)$ , wówczas pochodne po każdej z nich nazywa się **pochodnymi cząstkowymi** i oznacza nieco innym symbolem, np.  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$ , itd. Pochodne te oblicza się identycznie, jak zwykłe pochodne, traktując zmienne po których nie wykonuje się różniczkowania, jako stałe.



# Rachunek całkowy

Operacją odwrotną do różniczkowania jest całkowanie (nieoznaczone). **Całką nieoznaczoną lub funkcją pierwotną** funkcji  $y = f(x)$  nazywamy taką funkcję  $F(x)$ , której pochodna jest równa danej funkcji  $f(x)$ , czyli  $dF(x)/dx = f(x)$ . Całkę nieoznaczoną zapisujemy symbolicznie

$$F(x) = \int f(x)dx = \int dF(x).$$

Całką funkcji  $f(x)$  jest każda funkcja będąca sumą funkcji  $F(x)$  i dowolnej stałej  $C$ , ponieważ zawsze  $d[F(x) \pm C]/dx = dF(x)/dx = f(x)$ . Całka nieoznaczona funkcji  $f(x)$

$$F(x) = \int f(x)dx + C.$$

## Całkowanie przez zmianę zmiennej (metoda podstawienia)

Jeżeli w funkcji  $f(x)$  za zmienną  $x$  podstawimy funkcję  $x = \varphi(t)$ , to

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

## Całkowanie przez części

Jeżeli  $u$  oraz  $v$  są funkcjami tej samej zmiennej  $x$ , to

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx.$$

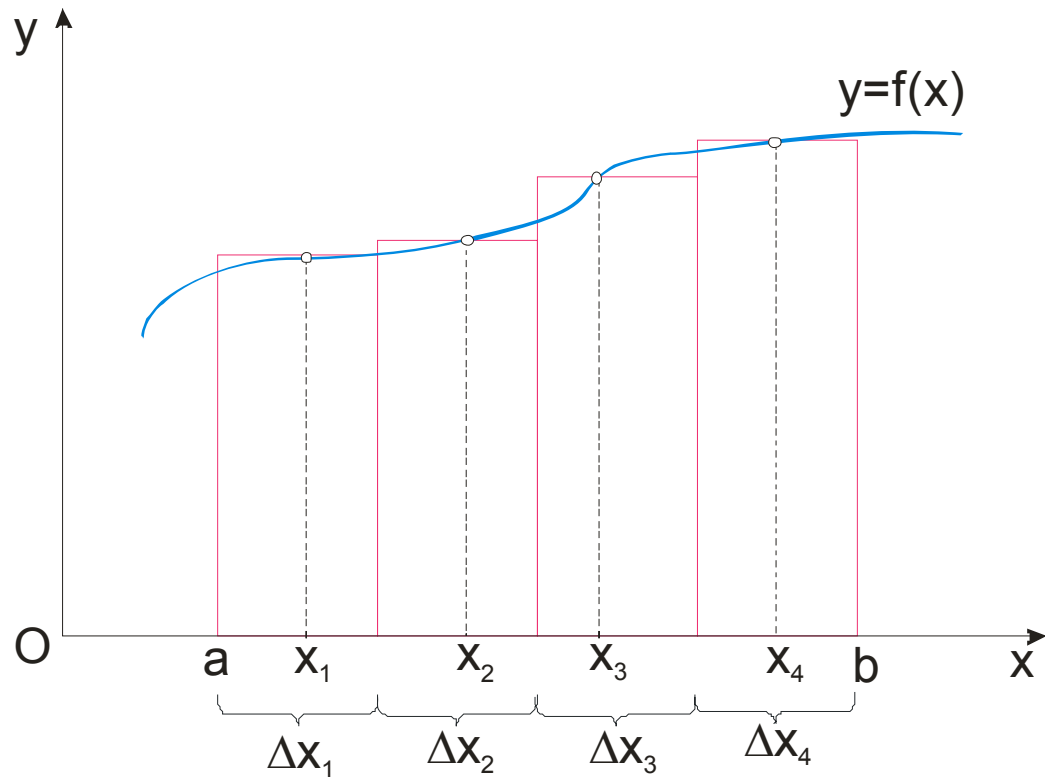
Całka oznaczona funkcji  $f(x)$  w granicach od  $a$  do  $b$  jest definiowana jako

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Z całką oznaczoną mamy do czynienia przy rozpatrywaniu wielkości globalnych, zależnych od wartości innej wielkości w pewnym skończonym przedziale argumentu.

Klasycznym przykładem jest praca wzdłuż pewnej drogi. Jest ona równa sumie prac na dostatecznie małych odcinkach drogi, na jakie dzieli się ją w przypadku siły zależnej od położenia. Przy dostatecznie drobnym podziale można przyjąć, że siła na każdym z odcinków jest stała. Suma  $\sum f_i(x_i)\Delta x_i$  równa jest polu figury ograniczonej krzywą schodkową. Wartość tej sumy nie jest jednoznacznie określona, gdyż zależy od sposobu podziału drogi  $(a,b)$ . W analizie matematycznej dowodzi się, że suma ta niewiele się różni od swej wartości granicznej przy wszystkich  $\Delta x_i$  dążących do zera. Ta granica to właśnie całka oznaczona. Możemy więc zapisać

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i.$$



## Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

W fizyce mamy często do czynienia z całkami po krzywych, powierzchniach (strumienie), bądź też obszarach trójwymiarowych. Wszystkie takie całki rozumiemy w podobnym sensie, jak to opisywaliśmy powyżej. Obszar całkowania dzielimy myślowo na małe fragmenty; na każdym z nich funkcję całkowaną uważamy za stałą, a następnie tworzymy sumę iloczynów tych wartości i miar odpowiadających im fragmentów.

W przypadku całkowania po krzywej, rolę  $\Delta x_i$  odgrywa długość  $\Delta s_i$   $i$ -tego łuku krzywej; przy całkowaniu po powierzchni  $\Delta x_i$  należy zastąpić przez pole  $\Delta S_i$   $i$ -tego wycinka powierzchni; zaś w całkach objętościowych używamy elementów objętości  $\Delta V_i$ . Graniczne wartości tak utworzonych sum nazywają się odpowiednio całkami: krzywoliniowymi, powierzchniowymi i objętościowymi. Możemy zatem zapisać

- całka krzywoliniowa

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i,$$

- całka powierzchniowa

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i,$$

- całka objętościowa

$$\int_V f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Jeżeli krzywa  $C$  lub powierzchnia  $S$ , na które rozciąga się całkowanie, jest zamknięta, to na symbolu całki zwykło się dopisywać kółko:  $\oint_C$  lub  $\oint_S$ .



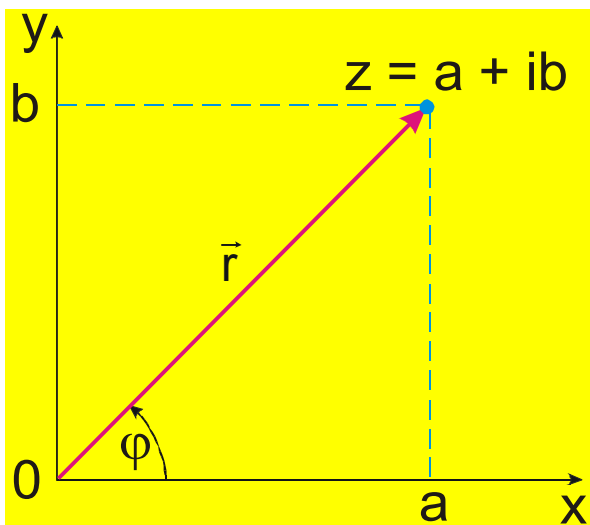
# Liczby zespolone

Liczbą zespoloną  $z$  nazywamy liczbę

$$z = a + ib,$$

gdzie  $a$  i  $b$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, zaś  $i$  – jednostką urojoną spełniającą związek  $i^2 = -1$ . Liczbę  $a$  nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby zespolonej  $z$ , a liczbę  $b$  – **częścią urojoną** liczby  $z$ , co zapisujemy  $a = \operatorname{Re}z$ ,  $b = \operatorname{Im}z$ . Zapis powyższy nazywamy postacią algebraiczną liczby zespolonej.

Dwie liczby zespolone  $z_1 = a_1 + ib_1$  oraz  $z_2 = a_2 + ib_2$  są równe, gdy równe są ich części rzeczywiste i urojone, tzn.  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ . Nie istnieje natomiast pojęcie większej lub mniejszej liczby zespolonej.



## Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną można przedstawić jako punkt na płaszczyźnie zespolonej. Na osiach układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej odkładamy współrzędne punktu będącego obrazem geometrycznym liczby  $z$ ; na osi rzeczywistej  $x$  liczbę  $a$ , zaś na osi urojonej  $y$  liczbę  $b$ . Korzystając z powyższej interpretacji geometrycznej, liczbę zespoloną można przedstawić w postaci trygonometrycznej

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$$

Kąt  $\varphi$  nazywa się argumentem liczby zespolonej.

Długość wektora wodzącego  $r$  nazywamy modułem lub wartością bezwzględną liczby zespolonej

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Liczbę zespoloną

$$z^* = a - ib = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = re^{-i\varphi},$$

nazywamy liczbą zespoloną sprzężoną z liczbą  $z = a + ib$ .

Zauważmy, że moduły liczb zespolonych sprzężonych są równe

$$|z^*| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$

oraz, że

$$zz^* = a^2 + b^2 = r^2.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\frac{z}{z^*} = \frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi},$$

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)].$$

## Działania na wektorach

Większość podstawowych wielkości fizycznych ma charakter kierunkowy, w związku z czym reprezentowane są przez wektory. Początek wektora można umieszczać w dowolnym miejscu, chociaż w niektórych przypadkach jest on narzucony z góry (np. przy wektorze położenia lub siły).

Każdy wektor ma określoną wartość równą długości odcinka łączącego początek i koniec wektora. Długość wektora  $\vec{a}$  oznaczamy zwykle symbolem  $|\vec{a}|$  lub po prostu  $a$ .

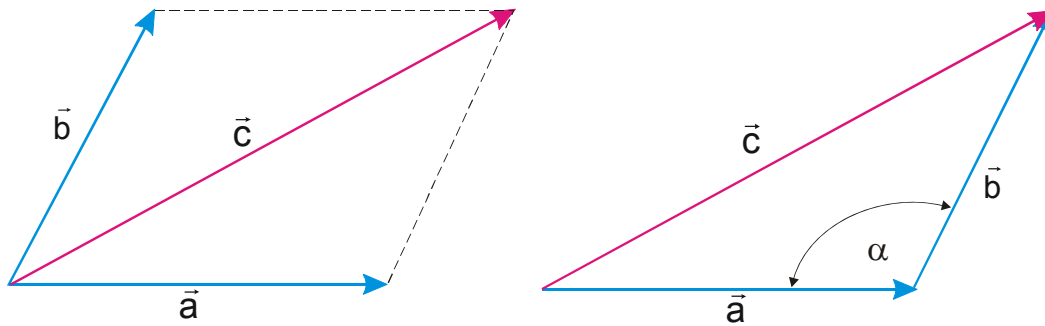
Mnożenie wektora  $\vec{a}$  przez liczbę rzeczywistą  $\lambda$  to nowy wektor  $\lambda\vec{a}$ , o tym samym ( $\lambda > 0$ ) lub przeciwnym ( $\lambda < 0$ ) zwrocie co wektor  $\vec{a}$ . Długość wektora  $\lambda\vec{a}$  wynosi  $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|a$ .

## Dodawanie wektorów

Dwa wektory tego samego rodzaju dodaje się metodą równoległoboku.

Dwa sposoby dodawania wektorów:

- przez sprowadzenie ich do wspólnego początku,
- przez umieszczenie początku drugiego wektora w końcu pierwszego



### Dodawanie dwóch wektorów

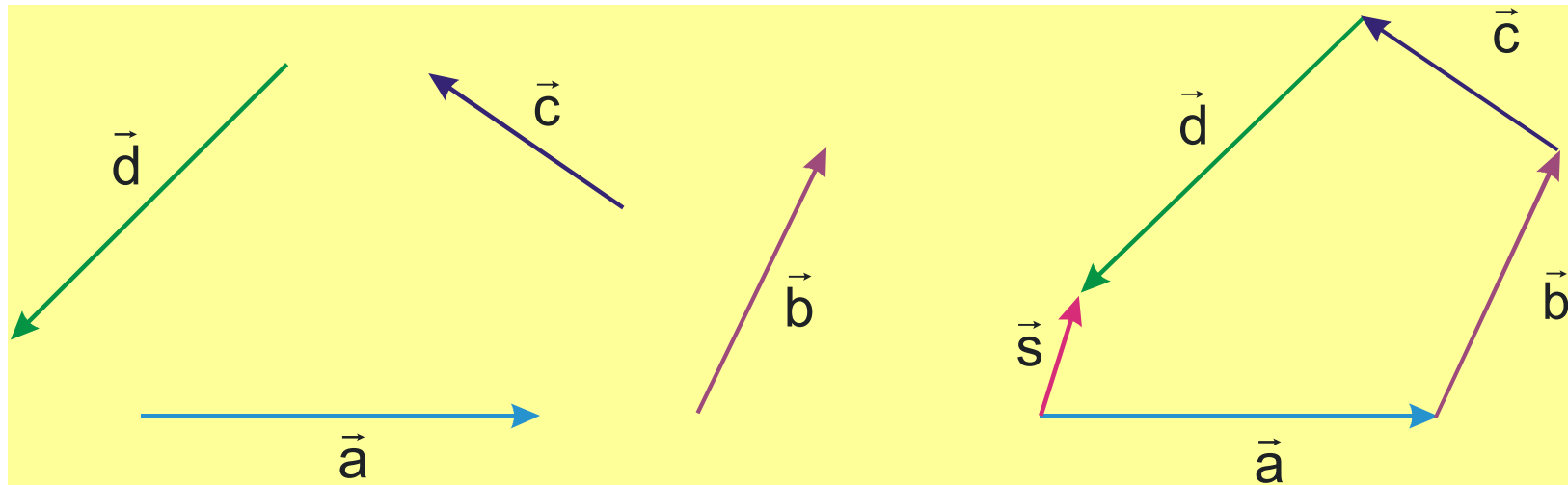
W pierwszym sposobie wypadkowa wektorów jest przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ; w drugim – wektor wypadkowy to odcinek o początku pokrywającym się z początkiem pierwszej składowej i końcem pokrywającym się z końcem drugiej składowej.

Wektor wypadkowy  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , a jego długość można wyznaczyć z twierdzenia cosinusów

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha},$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

Sumę większej liczby wektorów najlepiej jest tworzyć sposobem drugim, jak pokazano na rysunku. Wynik dodawania nie zależy od kolejności poszczególnych składników. Łącząc początek wektora pierwszego z końcem wektora ostatniego otrzymujemy wektor wypadkowy  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ .



**Dodawanie geometryczne dowolnej liczby wektorów**

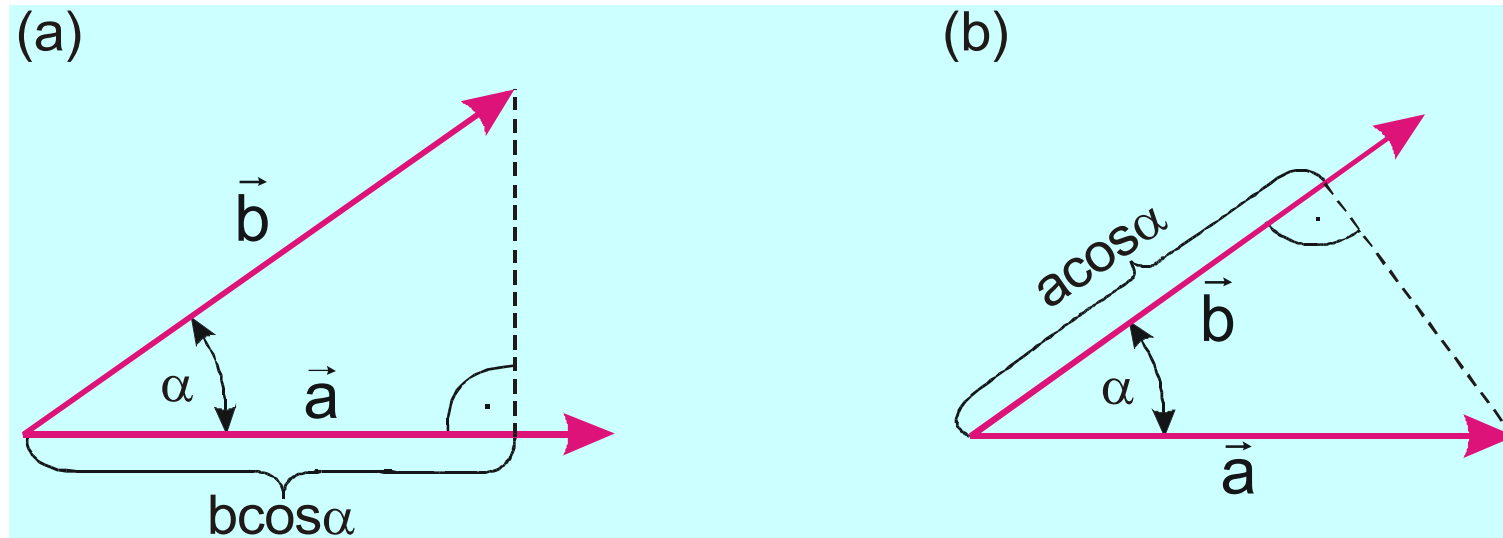
## **Iloczyn skalarny dwóch wektorów**

Często w fizyce dwie wielkości wektorowe występują łącznie dając w rezultacie wielkość skalarną. Zazwyczaj jest to iloczyn długości jednego wektora przez rzut drugiego na pierwszy. Iloczyn taki nazywamy iloczynem skalarnym dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i  $\vec{b}$ , i oznaczamy symbolem  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha,$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i  $\vec{b}$  (rys. 1.6). Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest więc skalarem. Z definicji iloczynu skalarnego widać, że jego wartość nie zależy od kolejności czynników, tzn.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

### Interpretacja geometryczna iloczynu skalarnego wektorów

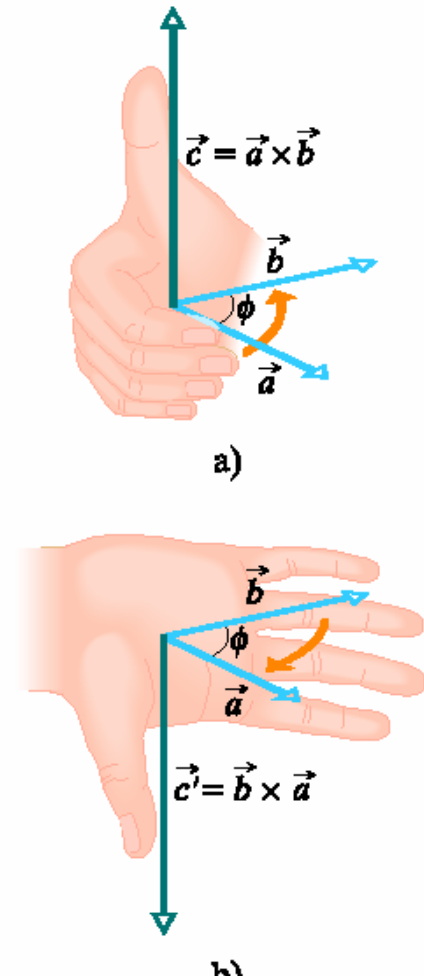
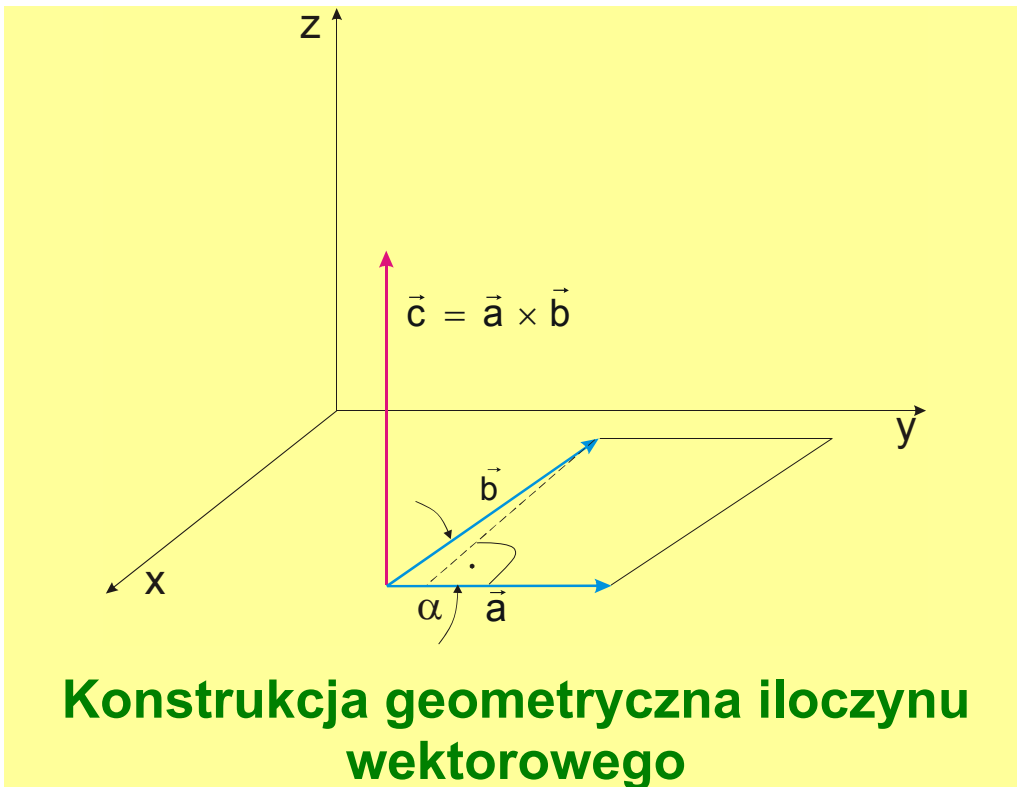


Iloczyn skalarny dwóch wektorów prostopadłych jest równy zero, gdyż  $\cos 90^\circ = 0$ . Klasyczny przykład iloczynu skalarnego to praca siły  $\vec{F}$  na odcinku  $\Delta \vec{s}$  równa iloczynowi skalarnemu tych wektorów  $\vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$ .

# Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Sporo wielkości fizycznych o charakterze wektorowym wyraża się poprzez inne wielkości wektorowe przy pomocy tzw. iloczynu wektorowego. Iloczyn wektorowy  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  jest wektorem  $\vec{c}$  o kierunku prostopadłym do obu wektorów i zwrocie zgodnym z kierunkiem ruchu śruby prawoskrętnej wkręcanej tak, by pierwszy wektor  $\vec{a}$  nałożyć na drugi  $\vec{b}$  po mniejszym kącie. Wartość iloczynu wektorowego równa jest - na mocy definicji - polu równoległoboku utworzonego przez wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i  $\vec{b}$ , czyli

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \alpha.$$





Jest to więc iloczyn długości jednego z tych wektorów (obojętnie którego) przez składową drugiego wektora prostopadłą do niego.

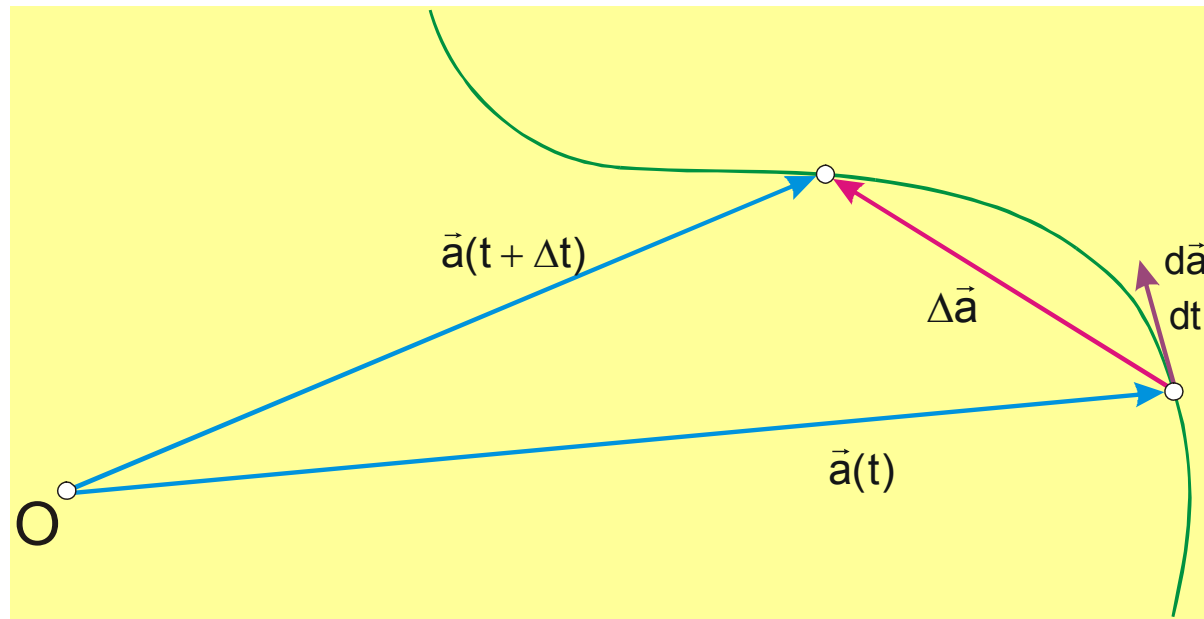
Przy pomocy pojęcia iloczynu wektorowego definiuje się różne wielkości fizyczne, jak np. moment pędu, moment siły, a ponadto zapisuje się szereg praw z mechaniki i elektrodynamiki.

## Różniczkowanie wektorów

Jeżeli wielkość wektorowa jest funkcją pewnej zmiennej (np. czasu  $t$ ), wówczas często zachodzi potrzeba obliczenia jej pochodnej po  $t$ . Pochodna wektora jest również wektorem, który otrzymuje się przez przejście do granicy z przyrostami skończonymi:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} \quad ; \quad \Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t).$$

Pochodna wektora ma na ogół inny kierunek niż wektor różniczkowany, co pokazano na następnym rysunku. Zgodność kierunków ma miejsce tylko wtedy, gdy wszystkie wektory  $\vec{a}(t)$  mają ten sam kierunek. Jeżeli natomiast wszystkie wektory  $\vec{a}(t)$  mają tę samą długość, to  $d\vec{a}/dt$  jest prostopadły do  $\vec{a}$ . Pochodna ta jest różna od zera, gdyż zmienia się kierunek wektora  $\vec{a}$ .

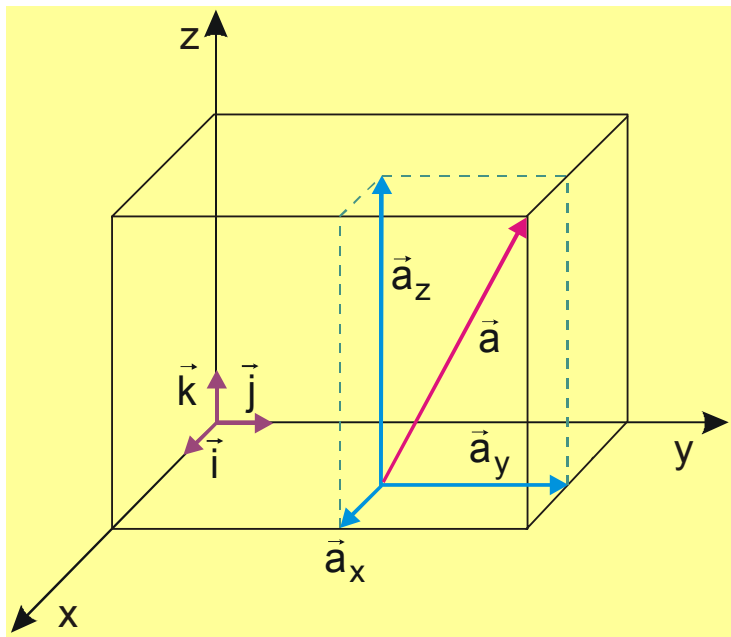


## Interpretacja różniczkowania wektora po czasie

## Współrzędne wektora

Wektory opisuje się przez podanie trzech liczb zwanych współrzędnymi wektora. W najprostszym przypadku są to trzy rzuty na trzy wzajemnie prostopadłe osie, mające wspólny początek umieszczony w początku wektora. Osie te nazywa się najczęściej osiami  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Zespół tych trzech współrzędnych wektora często utożsamia się z samym wektorem pisząc np.  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  choć poprawny jest tylko taki zapis, w którym wektor  $\vec{a}$  przedstawia się w postaci sumy trzech jego składowych w kierunkach osi układu współrzędnych:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$



## Składowe wektora w układzie prostokątnym

gdzie wektory  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  i  $\vec{k}$  są wektorami jednostkowymi w kierunkach trzech osi współrzędnych.

Długość wektora wyraża się przez jego współrzędne w następujący sposób

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Podstawowe operacje na wektorach, zapisane przy użyciu współrzędnych, mają postać

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x),$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left( \frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right).$$

Określone powyżej współrzędne wektora nazywane są jego współrzędnymi kartezjańskimi i są najbardziej naturalnymi współrzędnymi wektorowymi. Oprócz nich stosuje się również inne trójki liczb do scharakteryzowania wektora.

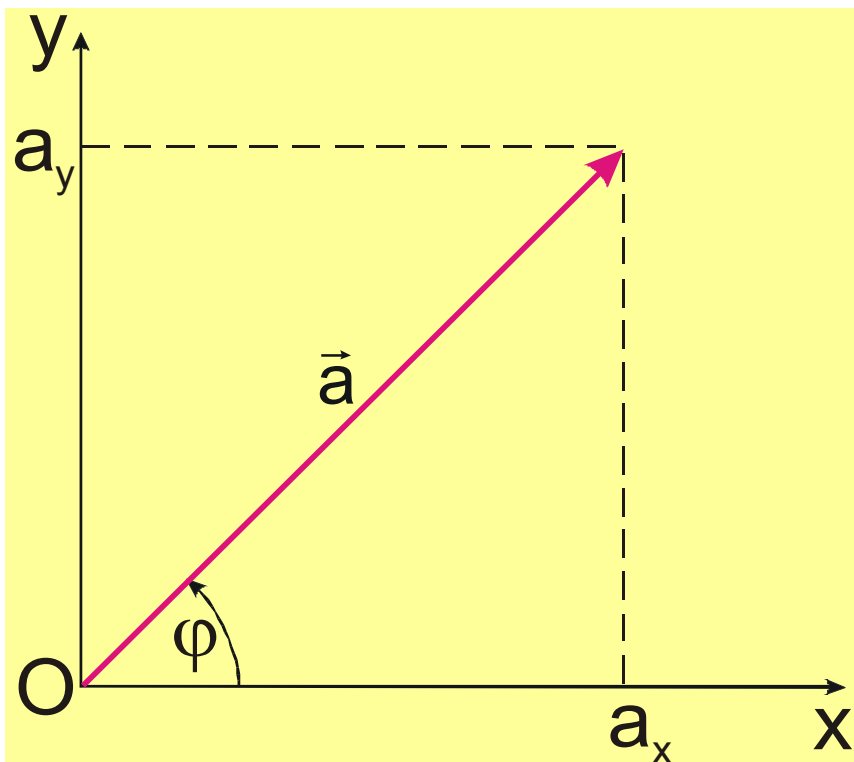
Najczęściej stosowanymi współrzędnymi są:

- współrzędne biegunowe na płaszczyźnie,
- współrzędne walcowe w przestrzeni trójwymiarowej, oraz
- współrzędne sferyczne (także przestrzenne).

Współrzędnymi biegunowymi są: długość wektora  $a$  i kąt  $\varphi$  jaki on tworzy z dodatnim kierunkiem osi  $Ox$ . Związek między współrzędnymi kartezjańskimi  $(a_x, a_y)$  i biegunowymi  $(a, \varphi)$  jest następujący:

$$a_x = a \cos \varphi \quad ; \quad a_y = a \sin \varphi .$$

Współrzędnymi tymi posługujemy się często przy opisie ruchu odbywającego się w jednej płaszczyźnie.



**Współrzędne biegunowe  
w płaszczyźnie Oxy**

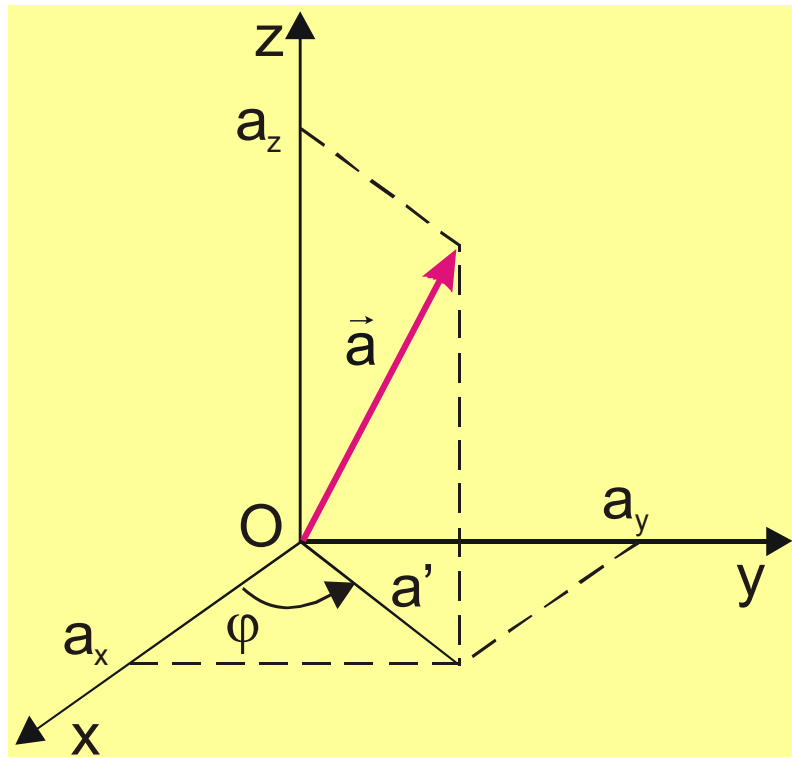
Współrzędne walcowe (cylindryczne) to: długość rzutu wektora  $\vec{a}$  na płaszczyznę Oxy, kąt azymutalny  $\varphi$  w płaszczyźnie Oxy oraz współrzędna kartezjańska  $a_z$  (rys. 1.11)

$$a_x = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cos \varphi = a_{\odot} \cos \varphi,$$

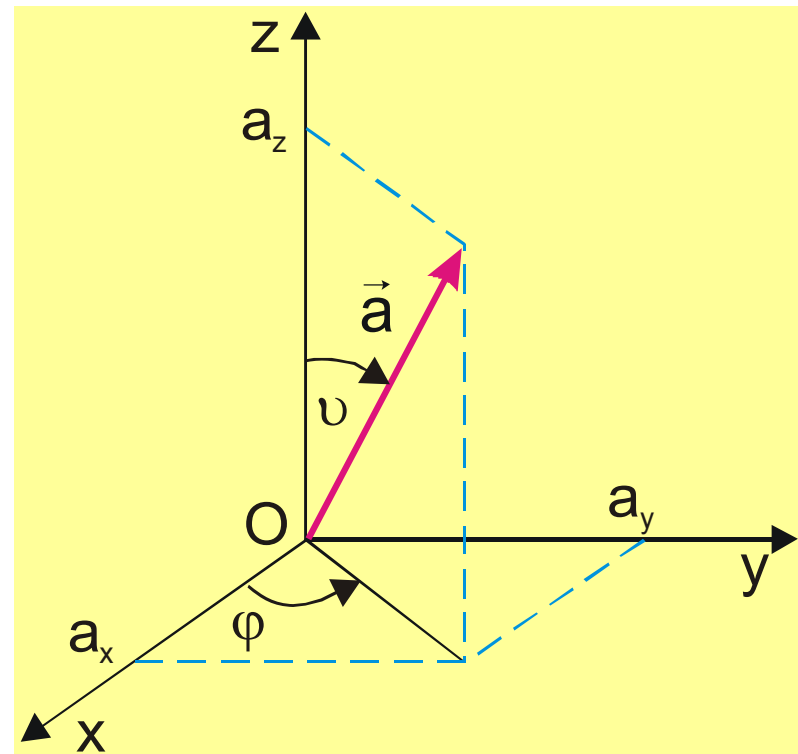
$$a_y = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \sin \varphi = a_{\odot} \sin \varphi,$$

$$a_z = a_z.$$

Współrzędne te są stosowane w zagadnieniach wykazujących symetrię obrotową wokół osi Oz.



**Współrzędne walcowe**



**Współrzędne sferyczne**

Współzrędnymi sferycznymi są: długość wektora  $a$ , kąt biegunowy  $\vartheta$  jaki tworzy wektor  $\vec{a}$  z dodatnią półosią  $Oz$  oraz kąt azymutalny  $\varphi$ . Związek ze współzrędnymi kartezjańskimi jest następujący:

$$a_x = a \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$a_y = a \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$a_z = a \cos \vartheta.$$

Współzrędnymi te są wygodne w rozwiązywaniu zagadnień o symetrii sferycznej.

## Analiza wektorowa

Jeżeli funkcja  $V(x,y,z)$  jest określona w każdym punkcie przestrzeni to mówimy, że funkcja  $V(x,y,z)$  określa pewne pole skalarne. Funkcja  $V(x,y,z)$ , która przyporządkowuje każdemu punktowi pola pewną wielkość skalarną, nazywa się funkcją pola. Typowym przykładem takiej funkcji jest potencjał pola elektrostatycznego  $V(x,y,z)$ . W podobny sposób można zdefiniować temperaturę jako funkcję współrzędnych  $T(x,y,z)$ .

Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni są określone trzy funkcje  $A_1(x,y,z)$ ,  $A_2(x,y,z)$  i  $A_3(x,y,z)$ , to można je traktować jako współrzędne wektora:

$$\vec{A}[A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z)].$$

Można zatem uważać, że każdemu punktowi przestrzeni został przyporządkowany pewien wektor  $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$ . **Przestrzeń, gdzie w każdym punkcie został zdefiniowany wektor według określonego prawa, nazywamy polem wektorowym.** Tak więc każdemu punktowi pola elektrostatycznego można przyporządkować wektor natężenia pola  $\vec{E}$ , a każdemu punktowi pola magnetycznego wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ .

## Gradient pola skalarnego

Niech funkcja  $V(x,y,z)$  określa pewne pole skalarne. Punkty dla których funkcja ta ma stałą wartość [ $V(x,y,z) = \text{const}$ ] leżą na pewnej powierzchni. Zmieniając wartość  $\text{const}$  otrzymujemy rodzinę powierzchni, które nazywamy powierzchniami ekwipotencjalnymi.

Obliczmy różniczkę  $dV$  funkcji  $V(x,y,z)$  przy przejściu od punktu  $(x,y,z)$  określonego wektorem wodzącym  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , do punktu  $(x+dx, y+dy, z+dz)$  leżącego na bliskiej, sąsiedniej powierzchni ekwipotencjalnej i określonego wektorem wodzącym  $\vec{r} \oplus = (x + dx)\vec{i} + (y + dy)\vec{j} + (z + dz)\vec{k}$ . Różniczka ta jest równa

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

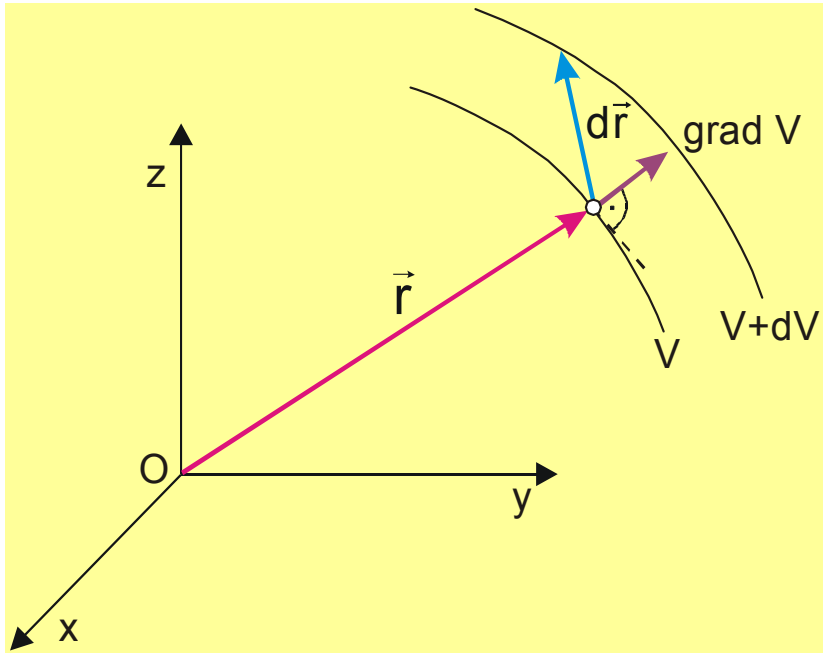
Różniczkę  $dV$  można przedstawić w postaci iloczynu skalarnego wektora

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k},$$

nazwanego gradientem funkcji skalarnej  $V(x,y,z)$  i wektora  $d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$ , gdyż

$$dV = \left( \vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) (\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz) = \text{grad}V \cdot d\vec{r}.$$





**Gradient pola skalarnego**

$GradV$  jest wektorem prostopadłym do powierzchni ekwipotencjalnej i jest skierowany od powierzchni o potencjale niższym do powierzchni o potencjale wyższym (rys. 1.13). Długość wektora  $gradV$  wynosi:

$$|gradV| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \frac{dV}{dr}.$$

# Operator nabla. Dywergencja i rotacja pola wektorowego

Operatorem nazywamy symbol określający przepis działania matematycznego na jakiejś wielkości. Np. symbol  $d/dx$  jest operatorem różniczkowania po zmiennej  $x$ . Oznaczony symbolem  $\nabla$  operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

nazywany jest **operatorem nabla** lub **operatorem Hamiltona**. Sam operator nie oznacza żadnej wielkości, lecz działając na jakąś wielkość (skalar lub wektor) nabiera sensu wielkości. Operator nabla ma charakter wektora, działa więc na inne wielkości tak, jak gdyby był wektorem.

## Iloczyn operatora nabla i skalar

$$\nabla \lambda = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \vec{k} = \text{grad} \lambda.$$

## Iloczyn skalarny operatora nabla i wektora

$$\nabla \vec{a} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Sumę pochodnych cząstkowych kolejnych współrzędnych wektora  $\vec{a}$ , względem kolejnych zmiennych  $x, y, z$ , nazywamy dywergencją wektora  $\vec{a}$  i oznaczamy symbolem  $div\vec{a}$ . Zatem

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

oraz

$$\nabla\vec{a} = div\vec{a}.$$

## Iloczyn wektorowy operatora nabla i wektora

$$\nabla \times \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Wektor występujący po prawej stronie tej równości nazywa się **rotacją wektora**  $\vec{a}$ .

$$rot\vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Mnożąc wektorowo operator  $\nabla$  przez wektor otrzymujemy jego rotację

$$\nabla \times \vec{a} = rot\vec{a}.$$


## Iloczyn skalarny dwóch operatorów nabra

$$\nabla \nabla = \nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Otrzymujemy w ten sposób nowy operator, zwany **operatorem Laplace'a** lub **laplasjanem** i oznaczamy symbolem

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Laplasjan ma charakter skalara, a nie wektora jak operator nabra.

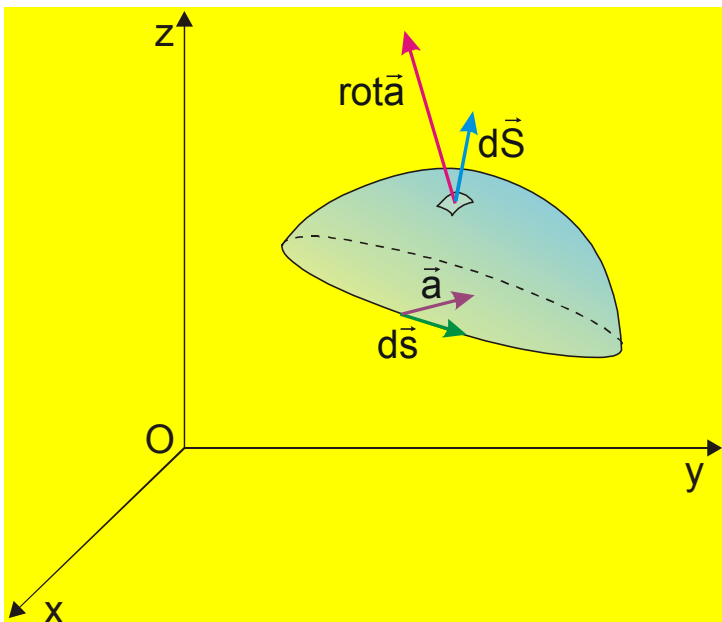


# Twierdzenie Stokesa i twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego

Podstawowe twierdzenia analizy wektorowej, **twierdzenie Stokesa** mówi, że dla pola wektorowego  $\vec{a}(x,y,z)$  całka krzywoliniowa wektora  $\vec{a}$  po obwodzie zamkniętym  $C$  jest równa całce wektora  $rot\vec{a}$  po powierzchni ograniczonej przez ten obwód (rys. 1.14).

$$\oint_C \vec{a} d\vec{s} = \int_S rot\vec{a} d\vec{S}.$$

Wektor  $d\vec{s}$  o długości równej długości elementu  $ds$  jest wektorem stycznym do obwodu i wskazuje kierunek całkowania po obwodzie. Wektor  $d\vec{S}$  jest prostopadły do powierzchni ograniczonej obwodem i ma długość równą polu elementu  $dS$ . Zwrot wektora  $d\vec{S}$  wskazuje przesuw śruby prawoskrętnej obracającej się zgodnie ze zwrotem wektora  $d\vec{s}$ .



Ilustracja do twierdzenia Stokesa

**Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego** mówi, że dla pola wektorowego  $\vec{a}(x,y,z)$  całka wektora  $\vec{a}$  po powierzchni zamkniętej  $S$  jest równa całce  $div\vec{a}$  po objętości  $V$  ograniczonej powierzchnią  $S$ .

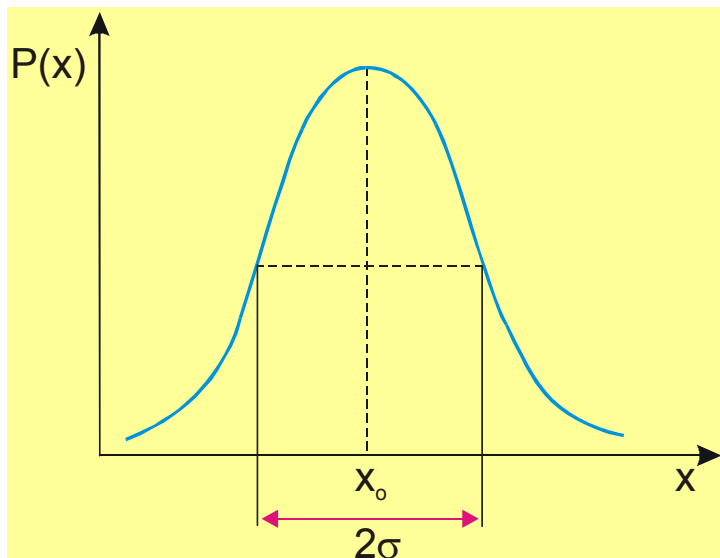
$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{a} \cdot dV.$$

Wektor  $d\vec{S}$  jest prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz powierzchni, element objętości  $dV = dx dy dz$ .

## Prawdopodobieństwa. Wartości średnie

Rachunek prawdopodobieństwa i oparta na nim statystyka matematyczna należą do podstawowych narzędzi współczesnej fizyki. Prawie wszystkie prawa opisujące zachowanie mikrocząstek formułowane są w kategoriach prawdopodobieństwa, a nie pewności - jak w fizyce klasycznej. Rachunkiem tym posługujemy się także w badaniu właściwości układów złożonych z bardzo dużej liczby cząstek. Jest on także podstawą rachunku błędów przy opracowywaniu danych pomiarowych.

W fizyce wystarcza elementarna definicja prawdopodobieństwa  $P(x)$  jako graniczna wartość stosunku liczby zdarzeń (sytuacji) odpowiadających danej wartości  $x$ , do ogólnej liczby zdarzeń (sytuacji), możliwych do zaistnienia w określonych warunkach. Zmienna losowa  $x$  może być dyskretna lub ciągła; odpowiednio do tego mamy dwa rodzaje funkcji  $P(x)$ . Dodajmy, że funkcję określającą rozkład prawdopodobieństw nazywa się zwykle funkcją rozkładu (prawdopodobieństwa) lub krótko – rozkładem.



### Przykład funkcji rozkładu dla zmiennej losowej ciągłej

Jeżeli wielkość  $x$  może przyjmować różne wartości z prawdopodobieństwem  $P(x)$ , to należy ją uśrednić. Sposób uśredniania zależy od charakteru tej wielkości. Przy dyskretnych wartościach tej zmiennej, równych  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , wartość średnia  $\langle x \rangle$  zmiennej  $x$  oblicza się według reguły:

$$\langle x \rangle = \sum_j x_j P(x_j).$$

Nietrudno zauważyć, że jest to zwykła średnia arytmetyczna. Dla ciągłej zmiennej losowej mamy analogicznie

$$\langle x \rangle = \int x P(x) dx,$$

przy czym całkowanie rozciąga się na cały przedział zmienności  $x$ .

Jawna postać funkcji rozkładu zależy oczywiście od konkretnej sytuacji i jej określenie jest często głównym celem rozwiązań problemów fizycznych.

Typowa funkcja rozkładu ma kształt dzwonu, z wyraźnie zaznaczonym maksimum dla pewnej wartości  $x_0$  zmiennej  $x$ . Bardzo ważną charakterystyką takiej krzywej jest szerokość  $2\sigma$  tego maksimum. Większej szerokości odpowiada większy "rozrzut" wartości zmiennej  $x$ .

Warto zwrócić uwagę na pewną subtelną różnicę między rozkładami  $P(x)$  występującymi w dwóch powyższych definicjach. W przypadku dyskretnej zmiennej losowej prawdopodobieństwa  $P(x_j)$  są liczbami bezwymiarowymi, natomiast w ostatnim wzorze wielkością bezwymiarową jest iloczyn  $P(x)dx$ . Iloczyn ten ma znaczenie prawdopodobieństwa wystąpienia wartości zmiennej losowej na odcinku  $dx$  wokół "bieżącej" wartości  $x$ . Samo  $P(x)$  ma więc znaczenie gęstości prawdopodobieństwa, czyli prawdopodobieństwa odniesionego do jednostkowego przedziału wokół  $x$ .

Średnia wartość  $\langle x \rangle$  jest zwykle zbliżona do  $x_0$ , choć na ogół różna od niej.

Szczególnie ważną średnią jest tzw. odchylenie kwadratowe zdefiniowane jako

$$\sigma = \sqrt{\langle (x - x_0)^2 \rangle}.$$

Liczba ta określa "szerokość" rozkładu (rozmycie centralnego maksimum); w ten sposób definiuje się właśnie wprowadzoną wcześniej liczbę  $\sigma$ . W rachunku błędów  $\sigma$  nazywa się błędem średnim kwadratowym; liczby  $x_j$  to wyniki kolejnych pomiarów.